2121.

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

L. E. J. Brouwer, Constantin Carathéodory, Otto Hölder, Carl Neumann, Max Noether

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

Otto Blumenthal
in Aachen.

76. Band.

Mit 40 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1915.

Inhalt des sechsundsiebzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Zur Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme.

Von

J. A. Schouten in Delft.

Inhalt.

Einleitung.

Höhere komplexe Zahlen können auf zwei Weisen aufgefaßt werden. Entweder kann man eine solche Zahl deuten als eine abgekürzte Bezeichnung für n unabhängig veränderliche gewöhnliche Zahlen in bestimmter Reihenfolge, also als das Symbol der Zuordnung n solcher Zahlen zu den n ersten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe*) oder man kann diese Zahlen auffassen als selbständige Objekte, die eigenen, von denen der Arithmetik verschiedenen Gesetzen unterliegen.

Vom ersten, arithmetischen, Gesichtspunkte ist die Addition zweier Zahlen nur das Symbol für n gleichzeitig auszuführende Additionen, die Multiplikation nur Symbol einer linearen Substitution in n Veränderlichen, und die n Bezugseinheiten sind nur Zeichen zur Unterscheidung der Veränderlichen. Vom zweiten, algebraischen, Gesichtspunkte (Algebra in erweitertem Sinne genommen) sind Addition und Multiplikation selbstständige Verbindungsweisen von Rechnungsobjekten, zu deren Definition die Angabe der Multiplikationsgesetze (Distributivität, Kommutativität, Assoziativität usw.) genügt.**)

Beide Auffassungen haben ihre Berechtigung und ihre Grenzen; die Theorie der linearen Substitutionen ist, als solche, ohne in die Sprache der universellen Algebra übersetzt zu sein, für Teilgebiete der Mathematik wie Gruppentheorie oder Matrizenrechnung von großer Wichtigkeit, andererseits hat aber die direkte algebraische Betrachtungsweise hohe Bedeutung, insbesondere für diejenigen Systeme, die ihre Anwendung in Geometrie und mathematischer Physik gefunden haben.

In Übereinstimmung mit diesen Auffassungen gibt es zwei Methoden die Theorie der assoziativen Systeme aufzubauen. Die erste macht entweder Gebrauch von den Eigenschaften der Theorie der kontinuierlichen Gruppen oder von denen der Matrizentheorie. In ihrer ersten Gestalt beruht sie auf dem zuerst von H. Poincaré***) angedeuteten, darauf von E. Study klargestellten Zusammenhang der Zahlensysteme mit den einfach transitiven projektiven Gruppen. Es sind hier namentlich die Arbeiten

*) B. Russell, The principles of Mathematics, Cambridge (1903), S. 379.

**) Vgl. für verschiedene Definitionen von Zahlensystemen L. E. Dickson, Definitions of a linear associative algebra by independent postulates, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), S. 21—26; On hypercomplex number systems, ebenda 6 (1905), S. 344; J. B. Shaw, Synopsis of linear associative algebra, Washington (1907), S. 9 f.

***) Sur les nombres complexes, Comptes Rendus 99 (1884), S. 740—742.

von F. Schur*), E. Study**), G. W. Scheffers***), T. Molien†), E. Cartan††) zu erwähnen. Eigenschaften der Matrizentheorie verwendeten C. S. Peirce†††), E. Cartan*†), F. G. Frobenius*††) und J. B. Shaw*†††). Die zweite Methode arbeitet direkt mit den Zahlen selbst und macht keinen Gebrauch von Eigenschaften verwandter Gebiete der Mathematik. Sie wurde 1870 begründet von B. Peirce**†). Die Peircesche Methode wurde von H. E. Hawkes 1902**††) aufs neue durchgearbeitet und begründet, wobei aber noch an einer Stelle von gruppentheoretischen Eigenschaften Gebrauch gemacht wurde. Die an diese Arbeit anschließende Klassifizierungsmethode von H. E. Hawkes**†††) verwendet die Resultate beider Richtungen. H. Taber suchte 1904***†) „to establish Peirce's method without recourse to the theory of groups“ und gab in der Tat eine einheitliche direkte Behandlung des Stoffes, dabei gebrauchmachend von einer von ihm eingeführten Erweiterung des Begriffes Skalar der Quaternionentheorie. Seine

---

*) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Größen, Math. Ann. 33 (1888), S. 49—60.

**) Über Systeme von komplexen Zahlen, Gött. Nachr. (1889), S. 237—268; Komplexe Zahlen und Transformationsgruppen, Leipz. Ber. 41 (1889), S. 177—228; Über Systeme von komplexen Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1 (1890), S. 283—355; Rekurrierende Reihen und bilineare Formen, ebenda 2 (1891), S. 23—54.

***) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten ableitbaren höheren komplexen Zahlen, Leipz. Ber. 41 (1889), S. 290—307; Über die Berechnung von Zahlensystemen, ebenda S. 400—457; Zurückführung komplexer Zahlensysteme auf typische Formen, Math. Ann. 39 (1891), S. 293—390; Über die Reduzibilität komplexer Zahlensysteme, ebenda 41 (1892), S. 601—604; S. Lie, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, herausgeg. von G. W. Scheffers, Leipzig (1903).

†) Über Systeme höherer komplexer Zahlen, Math. Ann. 41 (1892), S. 83—156.

††) Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes, Ann. de Toulouse 12 (1898), S. B. 1—99, namentlich Kap. I—III, VIII, IX.

†††) On the relative forms of the algebras, Am. Journ. Math. 4 (1881), S. 221.

*†) A. a. O. Kap. IV.

*††) Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Crelles Journ. 84 (1878), S. 1—63; Theorie der hyperkomplexen Größen, Berliner Ber. (1903), S. 504—537, 634—645.

*†††) Theory of linear associative algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), S. 251—287; On nilpotent algebras, ebenda S. 405—422; a. S. 2 a. O.

**†) Linear associative Algebra, Lithographie (1870) und Amer. Journ. Math. 4 (1881), S. 97—227.

**††) Estimate of Peirce's Linear associative Algebra, Amer. Journ. Math. 24 (1902), S. 87—95: On hypercomplex number systems, Trans. Amer. Math. Soc. 3 (1902), S. 312—330.

**†††) Enumeration of non-quaternion number systems, Math. Ann. 58 (1904), S. 361—379; On quaternion number Systems, ebenda 60 (1905), S. 437—447.

***†) On hypercomplex number systems, Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904), S. 509—548.

Betrachtungen gehen aber nicht bis zur Regelung eines Systemes in bezug auf ein Hauptquadrat (vgl. S. 25) und umfassen also noch nicht das ganze bis jetzt bekannte Gebiet. Als letzte und, im Prinzip, der Materie in der Tat vollkommen angepaßte Behandlungsweise erscheint die Methode von J. H. Maclagan Wedderburn, der 1907*) unter Anwendung der schon bekannten Addition und Multiplikation der Systeme (vgl. S. 39) und unter Hinzuziehung von Bezeichnungsweisen der Algebra der Logik, eine neue Darstellung der Systeme und ihrer Eigenschaften begründete. In gewissem Sinne erinnert diese Darstellung an die Graßmannsche Ausdehnungslehre, und wenn auch die jetzt vorliegende Form noch nicht alle Eigenschaften zum vollen Ausdruck bringt, so bildet sie doch die Grundlage zu einem natürlichen Kalkül der Systeme.

Es ist die vorliegende Arbeit zunächst aus dem Bedürfnis hervorgegangen, die assoziativen Systeme daraufhin zu untersuchen, ob und inwieweit sich unter denselben noch andere für Zwecke der wirklichen Rechnung in Geometrie und mathematischer Physik nutzbar machen lassen, als die bisher schon verwendeten. Dieses Bedürfnis war entstanden durch das Auffinden einer Reihe neuer, zur praktischen Rechnung mit geometrischen Größen verschiedener Ordnung brauchbaren Analysen, deren jede ein assoziatives Zahlensystem zur Grundlage hat.**) Es ergab sich dabei das in Kap. VI ausgesprochene Resultat, daß alle Systeme in besonderer Weise auf das Ursprüngliche (vgl. S. 25) zurückzuführen sind und es eben nur dieses ursprüngliche System irgend einer Ordnung, oder dessen einfachste Untersysteme, besonders die Hauptreihe (vgl. S. 19), oder deren Kombinationen sind, die im allgemeinen zur Verwendung gelangen werden, und daß nur in besonderen Fällen der Gebrauch anderer Untersysteme des ursprünglichen Nutzen bringen wird, ein Resultat, das in der Tat durch die in der Praxis verwendeten sowie durch die neu gefundenen Analysen vollends bestätigt wird. Bei der Untersuchung hatte sich nun weiter gezeigt, daß es möglich war, auf direktem Wege auch zu den Hauptquadraten und der Regelung der Systeme in bezug auf dieselben zu gelangen. Ferner ergab sich bei der Ableitung eine bisher unbeachtete Eigenschaft, das Prinzip der durchgehenden Selbstisomorphie der Systeme, das sich als die eigentliche Grundlage der bisher unzulänglich begründeten, aber an sich richtigen Hawkesschen Klassifizierungsmethode erwies. So entstand die weitere Aufgabe, alle die wichtigsten Eigenschaften der Zahlensysteme, samt der Klassifizierungsmethode Hawkes und ihrer Begründung in eine nach der direkten Methode abgefaßte, einheitliche

*) On hypercomplex numbers, Proc. Lond. Math. Soc. 6 (1901), S. 77.

**) Vgl. die im Verlage von B. G. Teubner erschienene Arbeit des Verfassers: „Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis".

Darstellung zu bringen, wobei es zugleich möglich sein mußte, das Ganze so zu gestalten, daß dasselbe sich zur schnellen und leichten Einführung in die Theorie der assoziativen Zahlensysteme eignete. Denn gerade diese Möglichkeit bildet einen der Vorzüge der direkten Methode. Um eine, jedem ohne weiteres geläufige Methode der Darstellung zu erzielen, ist von dem neuen Maclagan-Wedderburnschen Kalkül grundsätzlich kein Gebrauch gemacht worden, es wird aber gewiß von großem Interesse sein, auch die hier erhaltenen Resultate, namentlich das Prinzip der durchgehenden Selbstisomorphie in das Gewand dieses Kalküls zu kleiden. Dies alles ist in den Kapiteln I—IV untergebracht, an welche sich Kapitel VI unmittelbar anschließt. Die Beweise der Theoreme sind in diesem Teile dem Zwecke gemäß alle vollständig angegeben, mit einer Ausnahme, Theorem V. Die sogenannten Gleichungen der Systeme, die in der direkten Methode nicht als Grundlage der Betrachtungen auftreten, wurden vollständigkeitshalber in Kapitel V besprochen; indem sie sofort zu den schon geregelten Systemen in Beziehung gesetzt wurden, war es möglich, namentlich durch Anwendung des Prinzips der durchgehenden Selbstisomorphie, ihre Eigenschaften, ihre Beziehungen und ihre Form bei verschiedenen Systemen, in sehr einfacher Weise abzuleiten.

Zur Klassifizierung der nilpotenten Systeme (vgl. S. 19), die letzte „terra incognita" unseres Gebietes, wurden keine weiteren Beiträge geliefert, nur ergab sich indirekt, daß, da jedes solche System als ein ursprüngliches aufgefaßt werden kann, aus welchem zumindest die ganze Hauptreihe verschwunden ist, von einer weiteren Klassifizierung, die allerdings rein mathematisch betrachtet eine interessante Aufgabe bleibt, für das praktische Rechnen mit höheren Zahlen nichts erwartet werden kann.

Die Systeme, wo der Zahlkörper der Koordinaten nicht der der gewöhnlichen komplexen Zahlen ist, wurden nicht berührt. Solche weiteren Annahmen bezüglich dieses Zahlkörpers eröffnen ein ganz neues Feld der Untersuchung, auf welchem namentlich in letzter Zeit wichtige Arbeiten zu verzeichnen sind, welches sich aber gegen das uns hier interessierende scharf abgrenzt.*)

---

*) E. Cartan a. S. 3 a. O. Kap. VII; H. Poincaré, Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes, Journ. des Math. Sér. 5 vol. 9 (1903), S. 139—213; J. B. Shaw, Algebras defined by finite groups, Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904), S. 326—342; L. E. Dickson a. S. 2 zweitang. O.; Linear algebras in which division is always uniquely possible, Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), S. 370; On commutative linear algebras in which division is always uniquely possible, ebenda S. 514; F. G. Frobenius a. S. 3 erstang. O.; C. S. Peirce a. S. 3 a. O.

I. Hauptbegriffe und Darstellungsweisen.

Definition der Systeme. n Elemente $e_1, \cdots, e_n$, die einer eindeutigen kommutativen und assoziativen Verknüpfungsweise, $+$, mit eindeutiger Umkehrung, $-$, unterliegen, formen ein Gebiet mit numerischer Addition, $+$, und Subtraktion, $-$.*)

Werden

$$e_i + e_i, \quad e_i + e_i + e_i, \cdots$$

und

$$(e_i + e_j + \cdots) + (e_i + e_j + \cdots)$$

$$(e_i + e_j + \cdots) + (e_i + e_j + \cdots), \cdots$$

dargestellt durch die Verknüpfungen

$$2e_i = e_i 2, \quad 3e_i = e_i 3, \cdots$$

bzw.

$$2(e_i + e_j + \cdots) = (e_i + e_j + \cdots) 2 \cdots {}^{**}),$$

dann ist die neue, hierdurch definierte Verknüpfung von ganzen Zahlen mit Elementen in bezug auf die erstdefinierte Addition und Subtraktion vor- und nachdistributiv, und in Verbindung mit der Multiplikation von gewöhnlichen Zahlen assoziativ.

Überträgt man diese Eigenschaften auf die Zahlen eines beliebigen Zahlkörpers F, so erscheint als allgemeine Kombination von Elementen und gewöhnlichen Zahlen:

$$\sum_i^{1\cdots n} \xi_i e_i,$$

wo die ξ beliebige Zahlen des Körpers F sind.

Sind insbesondere keine anderen Werte der ξ angegeben, die der Gleichung

$$\sum_i^{1\cdots n} \xi_i e_i = 0$$

genügen, als

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0,$$

so sind die n Elemente $e_1, \cdots, e_n$ linear unabhängig im Bereiche des Körpers F und können als *Einheiten* angenommen werden. Die Zahlen ξ

*) H. Graßmann, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig (1844), S. 7; A. N. Whitehead, A Treatise on Universal Algebra, Cambridge (1898), S. 30.

**) Diese Zuordnung ist stets möglich, wenn die Umkehrung eindeutig ist, im anderen Falle entsteht für $a = a + a$ die nicht numerische Addition der Algebra der Logik. A. N. Whitehead a. a. O.

werden dadurch als *Koordinaten* gefaßt und das Gebiet sämtlicher Zahlen, die sich aus $e_1, \cdots, e_n$ ableiten, ist ein *Gebiet n^{ter} Stufe.**)

Die Kombination

$$x = \sum_i^{1\cdots n} \xi_i e_i = \sum_i^{1\cdots n} x_i \tag{1}$$

ist eine *Zahl* innerhalb dieses Gebietes, wenn die ξ in F enthalten sind. Für F wird hier ferner, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil vermerkt wird, der Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen gewählt.

Das Charakteristische irgend einer Multiplikation ist die Eigenschaft, vor- und nachdistributiv zu sein in bezug auf irgend eine andere Verknüpfungsweise, die dann Addition genannt wird.**) Die Multiplikation zweier Zahlen $x = \sum_i^{1\cdots n} \xi_i e_i$ und $y = \sum_i^{1\cdots n} \eta_i e_i$ genügt also jedenfalls der Gleichung:

$$xy = \sum_{i,j}^{1\cdots n} \xi_i \eta_j e_i e_j. \tag{2}$$

Zur Bestimmung eines Produktes genügt also das Bekanntsein aller einzelnen Produkte von Einheiten. Führen diese Produkte immer wieder in das Gebiet zurück, d. h., ist

$$e_i e_j = \sum_k^{1\cdots n} \gamma_{ijk} e_k, \tag{3}$$

wo die γ Zahlen des Zahlkörpers F sind, so heißt die Multiplikation eine lineare und das Gebiet ein *geschlossenes System* oder kurz *System* in bezug auf diese Multiplikation. Die n^3 Konstanten der Multiplikation genügen, falls dieselbe assoziativ sein soll, den n^4 Gleichungen

$$\sum_s^{1\cdots n} (\gamma_{iks}\gamma_{slt} - \gamma_{kls}\gamma_{ist}) = 0 \qquad (i, k, l, t, = 1, \cdots, n) \tag{4}$$

Die Lösung dieser Gleichungen, die zu allen möglichen Systemen führen würde, ist schon bei $n = 3$ mit unüberwindlichen Schwierigkeiten verbunden. Es sind daher andere Methoden zur Klassifizierung ausgebildet worden. Dabei treten folgende Hauptbegriffe und Darstellungsweisen in den Vordergrund.

---

*) H. Graßmann, Die Ausdehnungslehre, Berlin (1862), S. 16.

**) Von Multiplikationen, die nur einem der beiden distributiven Gesetze gehorchen, wird hier abgesehen.

Gleichheit, Gestaltgleichheit, Isomorphie, Selbstisomorphie, Äquivalenz der Systeme. Ein System wird dargestellt durch seine Multiplikationstabelle, z. B.

$$\begin{array}{c|cccc|}
\nearrow & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline
e_1 & e_1 & e_2 & 0 & 0 \\
e_2 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\
e_3 & e_3 & e_4 & 0 & 0 \\
e_4 & 0 & 0 & e_3 & e_4 \\ \hline
\end{array}$$

Der Pfeil, der die Richtung der Multiplikation angibt, und die Randangaben werden, wo Undeutlichkeit ausgeschlossen ist, meist fortgelassen.

Führt man statt der n ursprünglichen Einheiten durch eine lineare Substitution n andere linear unabhängige Zahlen als Einheiten ein, so ändern sich auch die Konstanten γ, und die Multiplikationstabelle nimmt eine andere Gestalt an. Wir nennen aber die beiden erhaltenen Systeme *gleich*, z. B.:

$$\begin{array}{c|cc|}
 & e_1 & e_2 \\ \hline
e_1 & e_1 & e_2 \\
e_2 & e_2 & -e_1 \\ \hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc|}
 & e_1' & e_2' \\ \hline
e_1' & e_1' & e_2' \\
e_2' & e_2' & e_1' \\ \hline
\end{array}$$

Vermöge der Substitution:

$$e_1' = e_1, \qquad e_2' = e_2\sqrt{-1},$$

werden diese Systeme *gleich und gestaltgleich.*

Zwei Systeme heißen *isomorph* oder formgleich, wenn sie der Form der Tabelle nach gleich und gestaltgleich, den Einheiten nach aber verschieden sind, z. B.:

$$\begin{array}{c|cc|}
 & e_1 & e_2 \\ \hline
e_1 & e_1 & 0 \\
e_2 & 0 & e_2 \\ \hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cc|}
 & e_2 & e_3 \\ \hline
e_2 & e_2 & 0 \\
e_3 & 0 & e_3 \\ \hline
\end{array}$$

Ein System ist in zwei verschiedenen Gestalten *selbstisomorph*, wenn die beiden Gestalten formgleich sind, z. B.:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline
e_1 & e_1 & e_2 & 0 & 0 \\
e_2 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \\
e_3 & e_3 & e_4 & 0 & 0 \\
e_4 & 0 & 0 & e_3 & e_4 \\ \hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|cccc|}
 & e_1' & e_2' & e_3' & e_4' \\ \hline
e_1' & e_1' & e_2' & 0 & 0 \\
e_2' & 0 & 0 & e_1' & e_2' \\
e_3' & e_3' & e_4' & 0 & 0 \\
e_4' & 0 & 0 & e_3' & e_4' \\ \hline
\end{array}$$

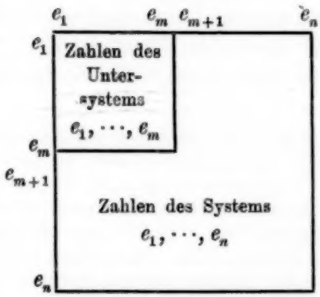
vermöge der Substitution:

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 + e_2, \\ e_2' &= e_2, \\ e_3' &= -e_1 - e_2 + e_3 + e_4, \\ e_4' &= e_4 - e_2. \end{aligned}$$

Die Selbstisomorphie ist für die Klassifizierung der Systeme besonders wichtig.

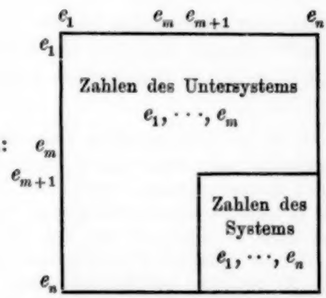
Zwei Systeme heißen *äquivalent*, wenn es möglich ist, dieselben durch lineare Substitution isomorph zu machen.

Untergebiete und Untersysteme, begleitende Systeme. Alle Zahlen, die aus m voneinander unabhängigen Zahlen des Systems linear ableitbar sind, formen zusammen ein *Untergebiet* m^{ter} Stufe.*) Führt jede Multiplikation von Zahlen eines Untergebietes wieder in das Untergebiet zurück, so heißt dasselbe *Untersystem*. Führt jede Multiplikation einer Zahl eines Untersystems mit einer Zahl des Hauptsystems wieder in das Untersystem zurück, so heißt letzteres ein *invariantes Untersystem*.**) Führt man in die Tabelle des Hauptsystems m unabhängige Zahlen eines Untersystems m^{ter} Stufe als erste m Einheiten ein, so erhält die Tabelle in den beiden letzten Fällen die Form:



$e_1, \cdots, e_m$ Untersystem.

bez.:



$e_1, \cdots, e_m$ invariantes Untersystem.

Kann ein System in zwei invariante Untersysteme zerlegt werden, die keine Zahlen gemein haben und zusammen alle Zahlen des Systems bestimmen, so ist das Produkt einer Zahl des ersten mit einer Zahl des zweiten

---

*) H. Graßmann a. S. 7 a. O.; J. H. Maclagan Wedderburn a. S. 4 a. O. S. 82; A. N. Witehead a. S. 6 a. O. S. 123.

**) Halbinvariante Untersysteme, das sind solche, die nur bei Multiplikation als Vorfaktor oder nur als Nachfaktor invariant sind, sind behandelt worden von J. H. Maclagan Wedderburn a. S. 4 a. O. S. 113.

Untersystems stets null, und das System heißt reduzibel.*) Die Tabelle eines solchen Systems läßt sich folgendermaßen gestalten:

	$e_1 \ldots e_m$	$e_{m+1} \ldots e_n$
$e_1 \ldots e_m$	Zahlen des Untersystems $e_1, \cdots, e_m$	Null
$e_{m+1} \ldots e_n$	Null	Zahlen des Untersystems $e_{m+1}, \cdots, e_n$

Da dieselbe also durch einfache Zusammensetzung von Tabellen niederer Ordnung erhalten werden kann, brauchen die reduzibelen Systeme zum Zwecke der Klassifizierung nicht untersucht zu werden.

Hat man ein invariantes Untersystem und betrachtet man die nicht zu diesem gehörenden Einheiten für sich, dabei in den Produkten alle Glieder, die sich aus $e_1, \cdots, e_m$ ableiten, fortlassend, so erhält man eine neue Tabelle für $e_{m+1}, \cdots, e_n$. Diese Tabelle genügt, wie leicht nachweisbar, dem assoziativen Gesetz und stellt also wiederum ein System dar. Molien**) nannte dasselbe ein *begleitendes System* des Hauptsystems. Zu jedem invarianten Untersystem gesellt sich also ein begleitendes System.

---

*) In der amerikanischen Literatur sind auch noch sogenannte halbreduzibele Untersysteme untersucht worden: S. Epsteen, On the definition of reducible hypercomplex number systems, Trans. Amer. Math. Soc. 5 (1904), S. 105–109; S. Epsteen and H. B. Leonard, On the definition of reducible hypercomplex number systems, Amer. Journ. Math. 27 (1905), S. 217–242, 381; S. Epsteen and J. H. Maclagan Wedderburn, On the structure of hypercomplex number systems, Trans. Amer. Math. Soc. 6 (1905), S. 172–178. Es gibt zwei Arten, die erster Art sind identisch mit den Systemen mit einem invarianten Untersystem, die zweiter Art genügen überdies der Bedingung, daß bei geeigneter Wahl der Einheiten in der Tabelle eines der beiden seitlichen Rechtecke nur Null enthält. Die halbreduzibelen Systeme korrespondieren mit den reduzibelen Gruppen der Gruppentheorie; vgl. A. Löwy, Über die Reduzibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), S. 44–64. Für die Klassifizierung erscheinen dieselben weniger wichtig.

Die Forderung, daß die Teilsysteme keine Einheiten gemeinsam haben sollen, ist aufgestellt von G. W. Scheffers a. S. 3 drittang. O. S. 317. B. Peirce hatte 1870 eine Definition für „mixed systems" aufgestellt, ohne diese Forderung, diese Peircesche Definition hat sich jedoch als weniger nützlich erwiesen: a. S. 3 a. O., vgl. H. E. Hawkes, a. 3 erstang. O. S. 87–95.

**) A. S. 3 a. O.

Idempotente und nilpotente Zahlen. Eine besonders einfache Form eines Untersystems ist eine Zahl, die ihr eigenes Quadrat ist; solche Zahlen heißen *idempotent**), sie spielen bei der Klassifikation eine große Rolle. *Nilpotent* ist jede Zahl, von der irgend eine Potenz null ist. Ist insbesondere die zweite Potenz null, so heißt die Zahl *direkt nilpotent***), sie bildet dann ebenfalls ein Untersystem für sich.

Teiler der Null und Modul. Im allgemeinen ist es möglich, daß in einem Systeme Produkte vorkommen, die null sind, ohne daß einer der Faktoren null ist. Die Faktoren heißen dann *Teiler der Null*. Es gibt nur wenige Systeme, die außer Null selbst keine Teiler der Null enthalten, alle anderen weichen in diesem wesentlichen Punkte von den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik ab. Besonderes Interesse bieten diejenigen, bei denen wenigstens nicht alle Zahlen Teiler der Null sind. Ist x kein Teiler der Null, so genügt nur ein y der Gleichung:

$$z = xy,$$

und dasselbe gilt für

$$z = yx,$$

wo z beliebig, es ist also der Quotient $\frac{z}{x\cdot}$ und ebenso $\frac{z}{\cdot x}$ eindeutig bestimmt.

Sei der Quotient

$$\frac{x}{\cdot x} = M,$$

also

$$x = Mx,$$

so ist, da jede Zahl z des Systems in der Form xy geschrieben werden kann:

$$z = Mz.$$

Ferner lehrt das assoziative Gesetz, daß

$$(zM)x = z(Mx) = zx,$$

also, da x kein Teiler der Null ist:

$$zM = z.$$

---

*) Die Namen „idempotent", „nilpotent" sind von B. Peirce (a. S. 3 a. O.). Es erscheint schwierig, die Bezeichnung „idempotent" zu übersetzen. F. G. Frobenius, der „Grundzahlen" nennt, was hier als „Einheiten" angesprochen wird, benutzt die Bezeichnung „Einheit" für jede idempotente Zahl (a. S. 3 zweitang. O. S. 638). In gewisser Beziehung hat er darin recht, ist doch das Idempotentsein eine der charakteristischen Eigenschaften der gewöhnlichen Einheit, es hat aber auch einen Vorzug, gerade die zufälligen Grundzahlen, worauf die Rechnung sich aufbaut, „Einheiten" zu nennen, und insbesondere bei den praktischen Systemen (Vektoranalysis, Quaternionen usw.) wird man dies schwerlich anders können, da doch diese Grundzahlen tatsächlich als Einheiten dem Messen von Strecken verschiedener Richtungen zugrunde gelegt werden.

**) Der Ausdruck ist hier eingeführt, weil die Unterscheidung später oft vorkommt und eine geeignete Bezeichnung fehlte.

Es existiert also in Systemen dieser Art stets eine und nur eine Zahl, die sich bei Multiplikation mit jeder anderen Zahl des Systems verhält wie die Zahl Eins bei der multiplikativen Verknüpfung von gewöhnlichen mit höheren Zahlen.*) Diese Zahl ist der Modul des Systems, es ist hervorzuheben, daß derselbe keineswegs identisch ist mit der gewöhnlichen Zahl Eins, da die Verknüpfungsweisen in beiden Fällen verschieden sind.

Soll die Gleichung

$$z = xy$$

oder

$$\zeta_k = \sum_{i,j}^{1\cdots n} \gamma_{ijk}\xi_i\eta_j \qquad (k=1,\cdots,n)$$

nach x oder nach y lösbar sein, so dürfen die beiden Determinanten

$$(5) \qquad \Delta = \left| \sum_{i}^{1\cdots n} \gamma_{ijk}\xi_i \right|_{j,k=1,\cdots,n}, \quad \Delta' = \left| \sum_{j}^{1\cdots n} \gamma_{ijk}\eta_j \right|_{i,k=1,\cdots,n}$$

nicht identisch null sein. Für ein System mit Modul gesellt sich also zu den in den Formeln (1), (2), (3) und (4) niedergelegten Grundregeln die Regel:

$$(6) \qquad \Delta \not\equiv 0, \quad \Delta' \not\equiv 0.$$

Ist in einem Systeme mit Modul x ein Teiler der Null, so werden beide Determinanten Δ_x und Δ_x' Null, und umgekehrt.**) Die Gleichungen

$$(7) \qquad \Delta_x = 0, \quad \Delta_x' = 0$$

bestimmen also jede alle Teiler der Null des Systems.***)

---

*) G. W. Scheffers a. S. 3 erstang. und drittang. O.; E. Study a. S. 3 erstang. O.

**) Nennt man x einen rechtsseitigen Teiler der Null, wenn es eine Zahl y gibt, so daß

$$xy = 0,$$

und einen linksseitigen, wenn eine Zahl y vorhanden ist, so daß

$$yx = 0,$$

so lassen sich die hier angegebenen Eigenschaften folgendermaßen noch näher präzisieren. Sind nicht alle Zahlen des Systems rechtsseitige Teiler der Null, so gibt es im System eine Zahl mit rechtsseitigen Moduleigenschaften. Ebenso links. Gibt es im System eine Zahl, die weder rechtsseitiger noch linksseitiger Teiler der Null ist, so enthält das System einen Modul. In diesem und nur in diesem Falle ist jeder rechtsseitige Teiler der Null auch linksseitiger und die beiden Gleichungen (7) haben dieselben Wurzeln. Vgl. G. W. Scheffers a. S. 3 drittang. O. und für Systeme mit halbseitigen Teilern der Null: L. E. Dickson, Definitions of a linear associative algebra by independent postulates, Trans. Amer. Math. Soc. 4 (1903), S. 21—26.

***) G. W. Scheffers a. S. 3 erst- u. drittang. O.; E. Study a. S. 3 erstang. O.

Wir betrachten zunächst nur Systeme mit Modulus, die anderen ergeben sich dann später in einfacher Weise.

Charakteristische Gleichung und Hauptgleichungen.*) Da das System nur unabhängige Zahlen besitzt, besteht notwendig für jede Zahl x eine Gleichung der Form:

$$x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k M = 0, \tag{8}$$

wo M der Modul und $k \leq n$. Die Koeffizienten $a_1, \cdots, a_k$ sind gewöhnliche Zahlen, die Funktionen der Koeffizienten $\xi_1, \cdots, \xi_n$ sind. Die Gleichung niedrigsten Grades, die für jede Zahl des Systems gilt, heißt die *charakteristische Gleichung* in x des Systems.

Dieselbe läßt sich in Faktoren zerlegen:

$$(x - u_1 M)^{\mu_1} \cdots (x - u_{s''} M)^{\mu_{s''}}, \tag{9}$$

wo $u_1, \cdots, u_{s''}$ die μ_1, bzw. $\mu_2, \cdots, \mu_{s''}$-mal vorkommenden Wurzeln der Gleichung:

$$u^k + a_1 u^{k-1} + \cdots + a_{k-1} u + a_k = 0, \tag{10}$$

der *charakteristischen Gleichung in u* des Systems sind. Die Faktoren sind sämtlich Teiler der Null und zusammen stellen sie, wie Scheffers bemerkte, alle Teiler der Null dar, die in die Form

$$x - uM$$

eingehen können, wo x eine beliebige bestimmte Zahl des Systems und u eine gewöhnliche Zahl ist.**)

Da die Teiler der Null die beiden Determinanten Δ und Δ' verschwindeu lassen, ergeben sich alle Zahlen u, die in dieser Weise Teiler der Null bilden können, aus:

$$\Delta_{x-uM} \equiv \left| \begin{matrix} \sum\limits_i^{1\cdots n} \gamma_{ijk}(\xi_i - u\overline{M}_i) \\ j, k = 1, \cdots, n \end{matrix} \right| \tag{11}$$

und ebenfalls aus:

$$\Delta'_{x-\;M} \equiv \left| \begin{matrix} \sum\limits_j^{1\cdots n} \gamma_{ijk}(\xi_j - u\overline{M}_j) \\ i, k = 1, \cdots, n \end{matrix} \right|, \tag{12}$$

---

*) Vgl. für die Namen dieser Gleichungen bei verschiedenen Autoren J. B. Shaw a. S. 2 a. O. S. 22.

**) Deutet man die Koeffizienten ξ als Koordinaten eines n-dimensionalen Raumes, so korrespondiert mit jeder Zahl des Systems ein Punkt dieses Raumes. Die Faktoren der charakteristischen Gleichung in x stellen dann sämtliche Teiler der Null dar, die sich auf der Strecke durch x und M befinden. Vgl. G. W. Scheffers a. S. 3 drittang. O. S 301 f.

wenn

$$M = \sum_{i}^{1\cdots n} \overline{M}_i e_i = \sum_{i}^{1\cdots n} M_i.$$

Die Determinanten lassen sich einfacher schreiben:

$$(13) \qquad \Delta_{x-uM} \equiv \begin{vmatrix} \sum_{i}^{1\cdots n} \gamma_{i11}\xi_i - u & \sum_{i}^{1\cdots n} \gamma_{i21}\xi_i & \cdots \\ \sum_{i}^{1\cdots n} \gamma_{i12}\xi_i & \sum_{i}^{1\cdots n} \gamma_{i22}\xi_i - u & \cdots \\ \vdots & & \end{vmatrix},$$

$$(14) \qquad \Delta'_{x-uM} \equiv \begin{vmatrix} \sum_{j}^{1\cdots n} \gamma_{1j1}\xi_j - u & \sum_{j}^{1\cdots n} \gamma_{2j1}\xi_j & \cdots \\ \sum_{j}^{1\cdots n} \gamma_{1j2}\xi_j & \sum_{j}^{1\cdots n} \gamma_{2j2}\xi_j - u & \cdots \\ \vdots & & \end{vmatrix},$$

da allgemein:

$$\sum_{i}^{1\cdots n} \gamma_{ijk} \overline{M}_i = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k, \end{cases}$$

$$\sum_{j}^{1\cdots n} \gamma_{ijk} \overline{M}_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$

Die Gleichungen (13) und (14) nennen wir die erste und zweite Hauptgleichung in u des Systems, beide sind Gleichungen n^{ten} Grades in u, die jede, nach dem vorangehenden, s'' verschiedene Wurzeln haben, die identisch sind mit den s'' verschiedenen Wurzeln der charakteristischeren Gleichung (10). Kommt eine Wurzel u_i in (10) μ_i-mal, in (13) λ_i-mal und in (14) ν_i-mal vor, so ist jedenfalls $\mu_i < \lambda_i$ und $\mu_i < \nu_i$ (8). Die beiden Hauptgleichungen lassen sich offenbar auch in x schreiben.*)

*) Die Beziehung zwischen charakteristischer Gleichung und Hauptgleichungen wurde zuerst angegeben durch G. W. Scheffers a. S. 3 drittang. O. S. 303; er benutzte namentlich erstere. Cartan a. S. 3 a. O. rückte die Hauptgleichungen in u in den Vordergrund seiner Betrachtungen und nannte dieselben „équation scharactéristiques". Beide Gleichungsarten sind für die Systeme gleich wichtig.

II. Die idempotenten Haupteinheiten und die Regelung des Systems in bezug auf eine Hauptreihe.

Regelung des Systems in bezug auf eine idempotente Zahl. Enthält ein System eine idempotente Zahl e_{ii}, so läßt sich jede andere Zahl x des Systems in vier Teile teilen:

$$(15)\qquad \begin{aligned} &1)\quad x_{ii} = e_{ii} x e_{ii} \\ &2)\quad x_{iy} = e_{ii}(x - x e_{ii}) \\ &3)\quad x_{zi} = (x - e_{ii} x) e_{ii} \\ &4)\quad x_{zy} = x - e_{ii} x - x e_{ii} + e_{ii} x e_{ii}, \end{aligned}$$

die offenbar den Bedingungen genügen:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &1)\quad x_{ii} e_{ii} = e_{ii} x_{ii} = x_{ii} \\ &2)\quad x_{iy} e_{ii} = 0 \qquad e_{ii} x_{iy} = x_{ix} \\ &3)\quad x_{zi} e_{ii} = x_{zi} \qquad e_{ii} x_{zi} = 0 \\ &4)\quad x_{zy} e_{ii} = e_{ii} x_{zy} = 0. \end{aligned}$$

Einige dieser Teile können Null sein. Verteilt man alle zuerst gegebenen Einheiten des Systems in dieser Weise, so ist eine Anzahl von wenigstens n und höchstens $4n$ Zahlen entstanden, die in 4 Klassen zerfällt. Es können unter diesen Zahlen nur n unabhängige vorhanden sein, da nun aber eine Zahl irgend einer Klasse offenbar nie linear abgeleitet werden kann aus Zahlen anderer Klassen, gibt es innerhalb jeder Klasse eine bestimmte Anzahl unabhängiger Zahlen. Wir haben also den Satz erhalten:

Theorem I. *In einem System kann man die Einheiten so wählen, daß sich jede einzelne in bezug auf irgend eine idempotente Zahl in einer von 4 Klassen befindet, deren jede einer besonderen Multiplikationsregel in bezug auf die idempotente Zahl gehorcht. Die Anzahl der Einheiten in jeder Klasse ist bei gegebener idempotenter Zahl eindeutig bestimmt.**)

Bezüglich der Produkte der Einheiten, die verschiedenen oder derselben Klasse angehören, folgt aus dem assoziativen Gesetz, daß ein Produkt entweder Null ist oder der Klasse angehört, die folgender Tabelle zu entnehmen ist:

	1	2	3	4
1	1	2	0	0
2	0	0	1	2
3	3	4	0	0
4	0	0	3	4

*) B. Peirce a. S. 3 a. O.

Jede Zahl der zweiten oder dritten Klasse ist also direkt nilpotent. e_{ii} gehört selbst in die erste Klasse. Unter den Zahlen der ersten oder vierten Klasse können sich noch weitere idempotente Zahlen vorfinden. Gibt es eine solche x in der ersten Klasse, so führe man eine neue Einheit ein, $e_{ii} - x$, dieselbe ist, wie ersichtlich, idempotent. Regelt man nun das System in bezug auf diese neue Einheit, so bleiben alle Zahlen, die in Klasse 4 waren, in derselben Klasse, dazu gesellt sich die idempotente Zahl x. In Klasse 1 bleiben alle Zahlen, die aus den zuerst in Klasse 1 vorhandenen Zahlen, ausgenommen x, ableitbar sind, es können keine dazu kommen, da, wie aus der Tabelle hervorgeht, nie Zahlen, die auch Einheiten der Klassen 2, 3 oder 4 in bezug auf e_{ii} enthalten, in Klasse 1 in bezug auf $e_{ii} - x$ sein können. Enthält das System nun wiederum eine idempotente Zahl in Klasse 1 zu $e_{ii} - x$, so kann man dasselbe Verfahren anwenden usw., bis in Klasse 1 nur noch eine idempotente Zahl e_{11} übrigbleibt, und alle anderen idempotenten Zahlen des Systems, die sich überhaupt in einer Klasse zu e_{11} befinden, in Klasse 4 sind. Die Zahlen in Klasse 4 formen ein Untersystem des gegebenen, dasselbe läßt sich nun wiederum so regeln in bezug auf irgend eine, e_{22}, der eventuell in demselben vorhandenen idempotenten Zahlen, daß sich alle noch weiter vorhandenen in Klasse 4 zu e_{22} befinden. Dabei bleibt das ganze Untersystem in Klasse 4 zu e_{11}. Das Verfahren läßt sich mit der neu erhaltenen Klasse 4 fortsetzen, und man kann dabei so weit gehen, bis die letzte Klasse 4 nur noch eine idempotente Zahl e_{ss} enthält. Die idempotenten Zahlen $e_{11}, \cdots, e_{ss}$ sind dann sämtlich zueinander in Klasse 4, d. h., alle Produkte zweier verschiedenen sind Null. Es gibt keine weiteren idempotenten Zahlen im System, die in bezug auf $e_{11}, \cdots, e_{ss}$ dieselbe Eigenschaft haben, denn eine solche Zahl wäre in der letzten Klasse 1 erschienen. Auch gibt es keine idempotenten Zahlen, die in bezug auf eine der Zahlen $e_{11}, \cdots e_{ss}$ in Klasse 1 sind, denn diese Zahlen sind bei der Ableitung von $e_{11}, \cdots e_{ss}$ gerade alle entfernt.*)

Einen solchen Satz idempotenter Zahlen nennen wir eine *Hauptreihe*, die Zahlen selbst, sofern sie als Einheiten angenommen werden, *idempotente Haupteinheiten* des Systems.

Erste Regelung des Systems in bezug auf eine Hauptreihe. Sei das System geregelt in bezug auf irgend eine Einheit e_{11} einer Hauptreihe. Dann folgt unmittelbar aus dem assoziativen Gesetz, daß jede Einheit, die in Klasse 1 zu e_{11} ist, sich in Klasse 4 zu jeder anderen Einheit der Hauptreihe befindet. Es sei ferner e_i eine Einheit in Klasse 2 zu e_{11}, also

$$e_{11}e_i = e_i, \quad e_ie_{11} = 0,$$

*) B. Peirce a. S. 3 a. O.; H. E. Hawkes a. S. 3 zweitang. O.

dann folgt aus dem assoziativen Gesetz, daß

$$e_{22} e_i = 0.$$

e_i kann sich also nur aus Zahlen zusammenstellen, die in Klasse 3 oder Klasse 4 zu e_{22} sind, und läßt sich demnach in zwei, je zu einer dieser Klasse gehörige Teile zerlegen:

$$e_i e_{22},$$
$$e_i - e_i e_{22}.$$

Einer dieser Teile kann Null sein. Der erste Teil ist offenbar in Klasse 4 zu allen anderen Einheiten der Hauptreihe, der zweite läßt sich in bezug auf e_{33} in derselben Weise spalten, usw. In derselben Weise können alle Einheiten der Klasse 2 zu e_{11}, und auch die in Klasse 3 und 4 geteilt werden.

Schließlich sind alle Einheiten des Systems in Zahlen zerlegt, die alle in bezug auf jede der Einheiten der Hauptreihe zu irgend einer Klasse gehören. Die Zahlen zerfallen also in so viele Unterklassen, als es mögliche Kombinationen von Klassen zu e_{11}, zu e_{22} usw. gibt. Für s dieser Zahlen kann man die s Einheiten der Hauptreihe selbst wählen, unter den übrigen kann es nur $n-s$ unabhängige geben. Da sich nun aber eine Zahl irgend einer Unterklasse nie linear ableiten läßt aus Zahlen anderer Unterklassen, so befinden sich in jeder Unterklasse eine bestimmte Anzahl unabhängiger Zahlen. Zusammen bestimmen dieselben das ganze System. Es ergibt sich demnach der erweiterte Satz:

Theorem II *In einem System kann man die Einheiten so wählen, daß sich jede einzelne in bezug auf jede idempotente Haupteinheit e_{ii} irgend einer Hauptreihe $e_{11}, \cdots, e_{ss}$ in irgend einer von vier Klassen befindet. Die möglichen Kombinationen der Klassen zu e_{11}, zu e_{22}, usw. bestimmen eine Anzahl Unterklassen, deren jede besonderen Multiplikationsregeln in bezug auf die Einheiten der Hauptreihe gehorcht. Die Anzahl der Einheiten in jeder Unterklasse ist bei gegebener Hauptreihe eindeutig bestimmt.**)

Hat das System einen Modul, so muß derselbe zunächst jede Einheit der gegebenen Hauptreihe mit dem Koeffizienten 1 enthalten, denn enthielte er z. B. e_{ii} nicht, so wäre niemals

$$M e_{ii} = e_{ii},$$

*) Theorem I ist 1870 von B. Peirce a. S. 3 a. O. aufgefunden, seine Erweiterung, Theorem II, wurde unabhängig 1898 von E. Cartan a. S. 3 a. O. und 1902 von H. E. Hawkes a. S. 3 zweitang. O. abgeleitet. Hawkes regelte zuerst das System in bezug auf zwei idempotente Haupteinheiten (sein Theorem V) usw. (sein Theorem VI), es ist hier der kürzere Weg gewählt, zunächst eine Hauptreihe aufzufinden, und dann das System auf einmal in bezug auf alle Einheiten derselben zu regeln.

da, wie aus der Tabelle hervorgeht, keine Kombination von anderen Einheiten e_{ii} in dieser Beziehung ersetzen kann. Ferner kann der Modul keine der anderen Einheiten enthalten, denn enthielte er z. B. eine solche Einheit, die in Klasse 1, 2 oder 3 zu e_{ii} wäre, so könnte wiederum niemals

$$Me_{ii} = e_{ii}M = e_{ii},$$

und enthielte M schließlich eine Zahl, die zu jeder Einheit der gegebenen Hauptreihe in Klasse 4 wäre, so wäre diese Zahl offenbar selbst idempotent, was nach der Ableitung der Hauptreihe ausgeschlossen ist, sodaß es eine solche Zahl in einem System mit Modul überhaupt nicht gibt. Wir haben also den Satz erhalten:

Theorem III. *Der Modul eines Systems ist gleich der Summe der Einheiten einer jeglichen Hauptreihe.**)

Aus diesem Satze ergibt sich dann, da für jede Zahl

$$Mx = xM = x$$

der weitere Satz:

Theorem IV. *In einem in bezug auf eine Hauptreihe geregelten System sind die nichtidempotenten Einheiten entweder in Klasse 1 zu irgend einer Einheit der Hauptreihe, oder in Klasse 2 zu irgend einer und in Klasse 3 zu irgend einer anderen Einheit, und in beiden Fällen in Klasse 4 zu allen anderen Einheiten der Hauptreihe.*

Die Einheiten ersterer Art nennen wir Einheiten *geraden Charakters*, die anderen *schiefen Charakters*,**) und bezeichnen sie mit e_{iia} bez. e_{iib}, wo die ersten zwei Indizien den Charakter angeben, und der dritte Buchstabe dient zur Unterscheidung von Einheiten desselben Charakters. Es gelten die Multiplikationsregeln

$$(17)\qquad \begin{aligned} e_{ii}\,e_{jka} &= \begin{cases} e_{jka} & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j; \end{cases} \\ e_{jka}\,e_{ii} &= \begin{cases} e_{jka} & \text{wenn } k = i, \\ 0 & \text{wenn } k \neq i; \end{cases} \\ e_{iju}\,e_{klv} &= \begin{cases} 0 \text{ wenn } j \neq k, \\ \text{Zahl des Char. } il \text{ oder } 0 \text{ wenn } j = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Einheiten schiefen Charakters sind alle nilpotent, und zwar direkt nilpotent. Die Einheiten geraden Charakters zerfallen in so viele Gruppen, als es idempotente Haupteinheiten in der Hauptreihe gibt, und jede solche

*) G. W. Scheffers a. S. 3 drittang. O. S. 316 (nur für Nichtquaternionensysteme); E. Cartan a. S. 3 a. O. S. 18; H. E. Hawkes a. S. 3 zweitang. O. S. 319; J. B. Shaw a. S. 2 a. O. S. 27.

**) G. W. Scheffers a. S. 3 drittang. O. S. 313.

Einheit e_{ii} formt mit den nichtidempotenten Einheiten des Charakters ii ein Untersystem mit e_{ii} als einzige idempotente Zahl, zugleich Modul.

Weitere Regelung der Einheiten geraden Charakters. Die Einheiten geraden Charakters lassen sich zunächst folgendem Satze gemäß wählen:

Theorem V. *In einem System, daß nur eine idempotente Zahl enthält, lassen sich die nichtidempotenten Einheiten so wählen, daß sie samt allen ihren linearen Zusammensetzungen nilpotent sind, und ein invariantes Untersystem bilden.**)

Ein System, dessen sämtliche Zahlen nilpotent sind, heißt ein *nilpotentes System*. Die nichtidempotenten Einheiten irgend eines geraden Charakters lassen sich also zunächst so wählen, daß die zugehörige Einheit der Hauptreihe in keiner ihrer Produktbildungen erscheint.

Für ein nilpotentes System gilt nun weiter, daß wenn das Produkt:

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(p)}$$

von p beliebigen Zahlen $x^{(1)}, \cdots, x^{(p)}$ nicht verschwindet, die Produkte:

$$x^{(1)}, x^{(1)}x^{(2)}, \cdots, x^{(1)}x^{(2)} \cdots x^{(p)}$$

linear unabhängig sind. Denn, existierte eine Gleichung der Form

$$a_l x^{(1)} \cdots x^{(l)} + a_{l+1}x^{(1)} \cdots x^{(l+1)} + \cdots = 0,$$

wo a_l der erste von Null verschiedene Koeffizient, und setzt man:

$$a_{l+1}x^{(l+1)} + a_{l+2}x^{(l+1)}x^{(l+2)} + \cdots = y$$

und:

$$x^{(1)} \cdots x^{(l)} = x,$$

---

*) Dieser Satz wurde 1870 angegeben von P. Peirce a. S. 3 a. O. Der Beweis wurde von mehreren Autoren in der verschiedensten Weise geliefert. So von G. W. Scheffers 1891 a. S. 3 drittang. O. auf gruppentheoretischem Wege, und von E. Cartan 1898 a. S. 3 a. O. und F. G. Frobenius 1903 a. S. 3 zweitang. O. unter Anwendung von Eigenschaften der Matrizenrechnung. Auch J. B. Shaw bezog sich 1902 a. S. 3 erst- und zweitang. O. auf solche Eigenschaften. H. E. Hawkes, der 1902 a. S. 3 zweitang. O. (vgl. auch den dort erstang. O.) die direkte Methode aufs neue durcharbeitete, bewies zunächst auf direkte Weise, daß, wenn in einem System mit einer idempotenten Zahl, diese, als Einheit gefaßt, nicht erscheint in den Produkten irgend zweier anderer Einheiten, letztere alle nilpotent sind, a. S. 3 zweitang. O. S. 319. Zum Beweise, daß nun auch jedes solches System so transformiert werden kann, daß es dieser Bedingung genügt, griff er dann aber wieder zur Gruppentheorie, ebenda S. 322, vgl. auch den dort drittang. O. S. 510. H. Taber gab 1904 den direkten Beweis a. S. 3 a. O. Derselbe müßte, um ein einheitliches Ganze zu bekommen, hier eingeschaltet werden. Da dieser Beweis aber die Einführung des Taberschen Begriffs des Skalars und dabei noch ziemlich weitläufige Erörterungen verlangen würde, ist dies nicht geschehen, und wird auf die betreffende Arbeit Tabers hingewiesen.

so wäre:

$$xy = a_i x$$

also:

$$x\left(\frac{y}{a_i}\right)^q = x$$

wo q beliebig groß, und demnach, da y nilpotent ist:

$$x = 0.$$

Für

$$x^{(1)} = x^{(2)} = \cdots = x^{(p)}$$

sagt der Satz aus, daß alle nicht verschwindenden Potenzen einer nilpotenten Zahl linear unabhängig sind.*)

Eine direkte Folge ist, daß in einem nilpotenten Systeme mit n Einheiten das Produkt von je $n+1$ beliebigen Zahlen verschwindet, denn es gäbe sonst im Systeme $n+1$ unabhängige Zahlen. Es existiert ferner eine für das System charakteristische gewöhnliche Zahl k', sodaß alle Produkte von k' Faktoren aber nicht alle von $k'-1$ Faktoren Null sind.**) Bildet man nun irgend ein nicht verschwindendes Produkt von k' Zahlen, so ist eine Zahl entstanden, die mit jeder anderen des Systems multipliziert Null erzeugt. Man nehme diese Zahl als Einheit e_n an, und lasse in der Multiplikationstabelle der anderen Einheiten diese Einheit überall einfach fort, so entsteht eine neue Tabelle mit $n-1$ Einheiten, die, wie leicht nachzuweisen, wiederum dem assoziativen Gesetze gehorcht, also ein nilpotentes System darstellt. Man nennt dieses Verfahren das System um die Einheit e_n verkürzen.***) Verkürzt man das neue System um eine passend gewählte Einheit e_{n-1}, und setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man n Einheiten $e_1, \cdots, e_n$, die dem Multiplikationsgesetz gehorchen:

$$e_i e_j = \sum_k^{p,\cdots,n} \gamma_{ijk} e_k \qquad p = \begin{cases} i+1 & \text{wenn } i > j, \\ j+1 & \text{„} \quad i < j \end{cases} \tag{18}$$

was sich in dem Satze aussprechen läßt:

Theorem VI. *Die Einheiten eines nilpotenten Systems lassen sich so wählen und ordnen, daß in jedem Produkt zweier Einheiten nur diejenigen vorkommen, deren Ordnungszahl höher ist als die jedes Faktors.*†)

---

*) Dieser Satz wurde 1870 von B. Peirce angegeben a. S. 3 a. O., die erweiterte Fassung, sowie der hier gegebene Beweis, rühren von F. G. Frobenius 1903 her, a. S. 3 zweitang. O. S. 640.

**) Von J. H. Maclagan Wedderburn wurde diese Zahl k' der Index des Systems genannt a. S. 4 a. O.

***) G. W. Scheffers a. S. 3 drittang. O. S. 307, vgl. auch H. E. Hawkes a. S. 3 drittang. O. S. 368, 369, der noch eine allgemeinere Art der Verkürzung, um mehrere Einheiten, angibt.

†) Der hier angegebene Beweis ist nach Cartan, a. S 3 a. O. S. 29, verkürzt durch Frobenius a. zweitang. O. S. 3 S. 640.

Sind zu einer gegebenen Hauptreihe die anderen Einheiten gewählt gemäß Theorem II, und überdies die geraden Charakters gemäß Theorem V und VI, so nennen wir das System *geregelt in bezug auf diese Hauptreihe.*

III. Die Scheidung der nilpotenten Einheiten in Haupteinheiten und Nebeneinheiten, und die Regelung des Systems in bezug auf ein Hauptquadrat.

Bestimmung eines Hauptquadrats. Betrachten wir in einem in bezug auf eine Hauptreihe geregelten System die Zahlen zweier entgegengesetzt schiefer Charaktere ij und ji, so tritt in allen möglichen Produkten der Art

$$x_{ija}x_{jib}$$

entweder irgendwo die Einheit e_{ii} auf, oder nicht. Ist der erste Fall vorhanden, also,

$$x_{ija}\,y_{jib} = e_{ii} - p_{iic}$$

wo

$$p_{iic}$$

eine nilpotente Zahl, so bilden wir die Zahl

(19) $$q_{iid} = -p_{iic} - p_{iic}^2 - \cdots,$$

es ist dann auch

$$p_{iic} = - q_{iid} - q_{iid}^2 - \cdots$$

und

(20) $$(e_{ii} - p_{iic})(e_{ii} - q_{iid}) = (e_{ii} - q_{iid})(e_{ii} - p_{iic}) = e_{ii}$$

(es ist zu bemerken, daß, wie leicht darzutun, der eine Faktor durch den anderen eindeutig bestimmt ist) also auch

$$(e_{ii} - q_{iid})\,x_{ija}\,y_{jib} = e_{ii}$$

oder

$$z_{ije}\,y_{jib} = e_{ii},$$

wodurch wir zwei Zahlen erhalten haben, deren Produkt e_{ii} ist. Wir können jetzt folgenden Satz beweisen.

Theorem VII. *Gibt es in einem in bezug auf eine Hauptreihe* $e_{11}, \cdots, e_{ss}$ *geregelten System zwei Zahlen von entgegengesetzt schiefem Charakter* x_{ija} *und* y_{jib}, *sodaß*

$$x_{ija}\,y_{jib} = e_{ii},$$

so gibt es keine Zahl $u_{ija} \neq x_{ija}$ *oder* $v_{ji\beta} \neq y_{jib}$, *sodaß*

$$u_{ija}\,y_{jib} = e_{ii}$$

oder

$$x_{ija}\,v_{ji\beta} = e_{ii}$$

wäre, und außerdem ist:

$$y_{jib}\,x_{ija} = e_{jj}.$$

Der Beweis läßt sich folgendermaßen führen. Zunächst ist

$$y_{jib}\, x_{ija}\, y_{jib} = y_{jib}$$

also

$$(y_{jib}\, x_{ija})^2 = y_{jib}\, x_{ija},$$

y_{jib}, x_{jia} ist also eine idempotente Zahl des Charakters jj, die nicht Null ist, und folglich gleich e_{jj} sein muß.

Man nehme nun an, es sei

$$u_{ija}\, y_{jib} = e_{ii},$$

so wäre

$$(x_{ija} - u_{ija})\, y_{jib} = 0,$$
$$(x_{ija} - u_{ija})\, e_{jj} \;= 0.$$

Eine Zahl des Charakters ij, die, als Vorfaktor mit e_{jj} multipliziert, Null erzeugt, ist aber selbst Null, also ist

$$u_{ija} = x_{ija}$$

und es gibt demnach keine andere Zahl als x_{ija} die mit y_{jib} multipliziert e_{ii} und e_{jj} erzeugt. Derselbe Beweis ist für $v_{ji\beta}$ durchzuführen.

Hat man zu den idempotenten Haupteinheiten e_{ii} und e_{jj} zwei Zahlen x_{ija} und y_{jib} gefunden, die der angegebenen Regel folgen, so ist es möglich, daß es noch ein anderes Paar $x'_{ija}, y'_{ji\beta}$ gibt mit denselben Eigenschaften. Solche Paare stehen in einfacher Beziehung. Es sei:

$$x_{ija}\, y_{jib} = e_{ii}, \qquad y_{jib}\, x_{ija} = e_{jj},$$
$$x'_{ija}\, y'_{ji\beta} = e_{ii}, \qquad y'_{ji\beta}\, x'_{ija} = e_{jj}$$

also auch:

$$(x_{ija}\, y'_{ji\beta})\,(x'_{ija}\, y_{jib}) = e_{ii},$$
$$(x'_{ija}\, y_{jib})\,(x_{ija}\, y'_{ji\beta}) = e_{ii},$$

dann soll es also zwei Zahlen des Charakters ii geben, deren Produkt in beiden Richtungen e_{ii} ist. Sind außer e_{ii} keine Einheiten des Charakters ii vorhanden, so genügt nur e_{ii} selbst der Bedingung, und es folgt leicht, daß

$$x'_{ija} = x_{ija},$$
$$y'_{ji\beta} = y_{jib},$$

usw., es existiert also nur ein Paar Zahlen x_{ija} und y_{jib}. Gibt es aber auch nilpotente Zahlen des Charakters ii, dann kann man immer mehrere Paare von Zahlen des Charakters ii angeben, deren Produkte nach beiden Richtungen e_{ii} sind, denn, wie oben gezeigt (Formel (19) und (20)), kann zu jeder nilpotenten Zahl p_{iic} eine andere q_{iid} gefunden werden, so, daß die Zahlen $(e_{ii} - p_{iic})$ und $(e_{ii} - q_{iid})$ der gestellten Bedingung genügen.

Führt man diese Werte ein:

$$x_{ija}\, y'_{ji\beta} = e_{ii} - p_{iic},$$
$$x'_{ija}\, y_{ji} \;= e_{ii} - q_{iid},$$

so folgt:

$$x'_{ija} = x_{ija} - q_{iid}\, x_{ija},$$

$$y'_{ji\beta} = y_{jib} - y_{jib}\, p_{iic},$$

$q_{iid}\, x_{ija}$ und $y_{jib}\, p_{iic}$ können nicht Null sein, da sonst $q_{iid}\, e_{ii}$ und $e_{ii}\, p_{iic}$ Null wären. Gibt es also überhaupt ein Zahlenpaar x_{ija}, y_{jib}, das bei Multiplikation e_{ii} bez. e_{jj} erzeugt, so gibt es überdies für jede nilpotente Zahl des Charakters ii ein solches Paar, und natürlich ebenso für jede nilpotente Zahl des Charakters jj.

Jedes dieser Paare bestimmt eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Zahlen der vier Charaktere ii, ij, jj, ji. Zu einer Zahl z_{iie} des Charakters ii gehören die Zahlen

$$\begin{cases} z_{ije} = z_{iie}\, x_{ija}, \\ z_{jie} = y_{jib}\, z_{iie}, \\ z_{jje} = y_{jib}\, z_{iie}\, x_{ija}, \end{cases}$$

wenn man x_{ija}, y_{jib} als bestimmende herausgreift. Dabei entsprechen sich dann e_{ii}, x_{ija}, e_{jj}, y_{jib}. Da ebenfalls

$$z_{iie} = z_{ije}\, y_{jib}$$

usw.

ist die Korrespondenz eine eindeutige. Ein anderes Zahlenpaar erzeugt eine andere Korrespondenz, jedenfalls gehören aber, wenn überhaupt ein solches Paar da ist, zu jedem der vier Charaktere die gleiche Anzahl unabhängiger Zahlen.

Wir wählen jetzt ein beliebiges Zahlenpaar x_{ija}, y_{jib} als Einheiten. Da sich dann die Zahlen e_{ii}, x_{ija}, e_{jj}, y_{jib} entsprechen, drängt sich für die Einheiten x_{ija} und y_{jib} von selbst die Bezeichnung e_{ij}, e_{ji} auf. Ferner wählen wir alle nichtidempotenten Einheiten der Untersysteme des Charakters ii und jj gemäß Theorem V und VI, und so, daß zwischen je zwei derselben die Korrespondenz besteht

$$\begin{cases} e_{ji}\, e_{iia}\, e_{ij} = e_{jja}, \\ e_{ij}\, e_{jja}\, e_{ji} = e_{iia}. \end{cases} \tag{21}$$

Führen wir nun schließlich für alle Einheiten der Charaktere ij und ji außer e_{ij} und e_{ji} diejenigen Zahlen ein, die durch Multiplikation mit e_{ij} oder e_{ji} aus den nilpotenten Einheiten der Charaktere ii und jj entstehen, also z. B.:

$$e_{ija} = e_{iia}\, e_{ij} = e_{ij}\, e_{jja}, \tag{22}$$

so kann die Multiplikation zweier Zahlen entgegengesetzten Charakters ij bez. ji nur dann e_{ii} und e_{jj} erzeugen, wenn der eine Faktor die Einheit e_{ij}, der andere e_{ji} enthält. Produkte zweier Zahlen, die sich nur aus den Einheiten e_{ija} bez. e_{jia}, $a = 1, \cdots$ zusammensetzen, enthalten demnach niemals e_{ii} oder e_{jj}.

Untersuchen wir über das ganze System, zwischen welchen Einheiten der gewählten Hauptreihe Zahlenpaare dieser Art eingeführt werden können, so ist dabei noch eines zu bemerken. Existiert nämlich zwischen e_{ii} und e_{jj} ein Zahlenpaar e_{ij}, e_{ji}, und zwischen e_{jj} und e_{kk} ein Paar e_{jk}, e_{kj}, so ist

$$e_{ij}\,e_{jk}, \quad e_{kj}\,e_{ji}$$

jedenfalls ein Paar mit derselben Eigenschaft zwischen e_{ii} und e_{kk}. Denn $e_{ij}\,e_{jk}$ kann nie Null sein, sonst wäre $e_{jj}\,e_{jk}$ und demnach auch e_{jk} Null. Ferner ist

$$e_{ij}\,e_{jk}\,e_{kj}\,e_{ji} = e_{ij}\,e_{ji} = e_{ii};$$

die Zahlenpaare lassen sich also über das ganze System so wählen, daß die Produkte ihrer Zahlen nicht entgegengesetzten Charakters entweder Null oder einer Zahl eines der Paare gleich sind. Werden die Zahlen dieser Paare als Einheiten gewählt, so können die anderen nilpotenten Einheiten so angenommen werden, daß ihre gegenseitigen Produkte niemals eine idempotente Einheit, und folglich auch niemals eine nilpotente Einheit irgend eines Paares enthalten. Wir haben also den Satz erhalten:

Theorem VIII. *Ist ein System geregelt in bezug auf irgend eine Hauptreihe, so formen entweder alle nilpotenten Einheiten ein invariantes Untersystem, oder man kann einen oder mehrere Sätze von zwei oder mehreren idempotenten Haupteinheiten angeben, so, daß zwischen je zwei der zu einem Satze gehörigen, zwei direkt nilpotente Zahlen entgegengesetzten Charakters aufgefunden werden können, die, miteinander multipliziert, eben diese beiden idempotenten Haupteinheiten erzeugen und die man so wählen kann, daß bei Multiplikation zweier, zu verschiedenen Paaren gehörigen, entweder Null, oder wieder eine Zahl eines solchen Paares entsteht, je nachdem der hintere Charakter des Vorfaktors dem vorderen Charakter des Nachfaktors ungleich oder gleich ist. Werden die Zahlen der gewählten Paare als Einheiten eingeführt, so lassen sich die anderen nilpotenten Einheiten des Systems so wählen, daß sie ein invariantes nilpotentes Untersystem bilden.*

Wir nennen die diesem Theorem gemäß als Einheiten eingeführten Zahlen der Paare *nilpotente Haupteinheiten* des Systems. Zusammen mit der Hauptreihe der sie angehören, bilden sie ein *Hauptquadrat* des Systems. Jedes Hauptquadrat bildet ein Untersystem. Von einer Hauptreihe ausgehend kann man im allgemeinen zu verschiedenen Hauptquadraten gelangen.

Regelung des Systems in bezug auf ein Hauptquadrat. Die nicht zu dem Hauptquadrat gehörenden Einheiten bilden ein invariantes nilpotentes Untersystem. Sie können demnach noch näher gemäß Theorem VI geregelt werden und erscheinen dann in einer bestimmten Reihenordnung.

Sind die nilpotenten Einheiten geraden Charakters schon vorher diesem Theorem gemäß gewählt, und bilden diese demnach schon geordnete Reihen, so werden die Einheiten ungeraden Charakters bei der weiteren Regelung die Reihen der schon geordneten Einheiten geraden Charakters unterbrechen, und sich zwischen denselben einschieben, ohne daß es nötig ist, neue Einheiten geraden Charakters zu wählen und ohne daß die Reihenfolge jeder einzelnen Reihe derselben zerstört wird. Das nun in solcherweise geregelte System heißt *geregelt in bezug auf das gewählte Hauptquadrat*, oder kurz, *geregelt*, und die nilpotenten Einheiten, die nicht zum Hauptquadrat gehören, heißen die *Nebeneinheiten* des Systems.

Die n Einheiten sind in dem geregelten System wie folgt verteilt

s idempotente Haupteinheiten,

N_{ij} Haupteinheiten des Charakters ij,

$$i, j = 1, \cdots, s, \quad N_{ij} = N_{ji} = 0 \text{ oder } 1;$$

n_{ij} Nebeneinheiten des Charakters ij,

$$i, j = 1, \cdots, s,$$

und es gilt also die Beziehung:

$$n = \sum_{i,j}^{1,\cdots,s} (n_{ij} + N_{ij}). \tag{23}$$

Ist die Hauptreihe gegeben, so sind s, N_{ij} und n_{ij}, $i, j = 1, \cdots, s$ eindeutig bestimmt.

Ursprüngliche Systeme, Quaternion- und Nichtquaternionssysteme. Zwei Einheiten der Hauptreihe e_{ii}, e_{jj}, zu denen nilpotente Haupteinheiten e_{ij}, e_{ji} gehören, formen mit diesen zusammen ein Untersystem mit der Tabelle:

	e_{ii}	e_{ij}	e_{ji}	e_{jj}
e_{ii}	e_{ii}	e_{ij}	0	0
e_{ij}	0	0	e_{ii}	e_{ij}
e_{ji}	e_{ji}	e_{jj}	0	0
e_{jj}	0	0	e_{ji}	e_{jj}

Es ist dies das System der Hamiltonschen Quaternionen. Eine ähnliche Tabelle ergibt sich für drei Einheiten e_{ii}, e_{jj}, e_{kk}, verbunden durch sechs nilpotente Einheiten usw. Ein System, bestehend aus s idempotenten Haupteinheiten, die alle miteinander verbunden sind durch $s^2 - s$ nilpotente Haupteinheiten, heißt ein *ursprüngliches System* s^{ter} *Ordnung.**) Ein ursprüngliches System besitzt keine invarianten Untersysteme, denn würde ein solches Untersystem die Zahl

*) T. Molien a. S. 3 a. O. S. 93.

$$\sum_{i,j}^{1,\cdots,s} \xi_{ij}\, e_{ij}$$

enthalten, wo wenigstens eine der Koeffizienten z. B. ξ_{ij} nicht Null, so enthielte das System auch jede Zahl $e_{ai} e_{ij} e_{jb}$, also jede Einheit e_{ab}, $a, b = 1, \cdots, n$.*)

Ein Hauptquadrat eines jeden Systems bildet ein Untersystem, und läßt sich auffassen, entweder als ein reduzibles System, das in lauter ursprüngliche Systeme zerfällt, oder als ein ursprüngliches System s^{ter} Ordnung, aus welchem einige nilpotente Haupteinheiten paarweise verschwunden sind.

Die Einheiten eines Systems, das überhaupt eine idempotente Zahl enthält, lassen sich also in zwei Gruppen teilen, die Haupteinheiten bilden zusammen ein ursprüngliches System, oder mehrere unter sich unabhängige ursprüngliche Systeme, und um das durch diese Systeme gebildete Hauptquadrat gruppieren sich die Nebenheiten, die zusammen ein nilpotentes Untersystem bilden, in freierer Weise. Die Systeme ohne idempotente Zahl, die nach Theorem V jedenfalls nilpotent sind, enthalten nur Nebeneinheiten und kein Hauptquadrat. Zerfällt das Hauptquadrat in lauter unverbundene idempotente Haupteinheiten, und sind also keine nilpotente Haupteinheiten vorhanden, so ist das System der Quaternionen nicht Untersystem des gegebenen. Nach Scheffers nennen wir ein solches System Nichtquaternionsystem. Alle Anderen, die Quaternionsysteme, enthalten die Quaternionen als Untersystem. Ein System mit Modulus läßt sich also so transformieren, daß seine Multiplikationstabelle folgende Gestalt erhält:

*) E. Cartan, a. S. 3, a. O. S. 58.

Geschichtliches. Die Quaternion- und Nichtquaternionsysteme korrespondieren mit den nichtintegrabelen bzw. integrabelen, einfach transitiven projektiven Gruppen der Lieschen Gruppentheorie; ihre Unterscheidung geht auf G. W. Scheffers zurück.*) Daß jedes Quaternionsystem die Hamiltonschen Quaternionen enthält, wies er 1891 für Systeme mit weniger als neun Einheiten nach.**) Molien fand 1892***), ebenfalls von gruppentheoretischen Erwägungen geleitet, daß jedes System mit Modulus ein Untersystem enthält, das sich nur aus ursprünglichen Systemen zusammensetzt. Nach der Definition Moliens ist ein ursprüngliches System ein solches, das außer sich selbst kein begleitendes System besitzt.†) Auf gruppentheoretischem Wege leitete Molien weiter die Multiplikationsgesetze dieser ursprünglichen Systeme ab. Cartan ging 1898 von den Hauptgleichungen in u aus††) und wies, unter Anwendung eines Satzes der Matrizenrechnung, und indem er die Determinanten dieser Gleichungen in geeignete Form brachte, nach, daß es, falls diese Gleichungen nicht in lineare Faktoren $u - u_i$ zerlegbar sind, wo u_i eine lineare Funktion von $\xi_1, \cdots, \xi_n$ (siehe S. 49 und die weiteren Ausführungen im Abschnitte V), jedenfalls ein paar idempotenter Einheiten e_{ii} und e_{jj} gibt, das durch Einheiten e_{ij} und e_{ji} verbunden ist. Shaw gelangte zu den Eigenschaften der nilpotenten Haupteinheiten auf einem von ihm ausgebildeten Weg, der sich ganz innerhalb der Matrizenrechnung bewegt, während Maclagan Wedderburn dasselbe Resultat erreichte mit seinem Kalkül der Systeme (vgl. Einleitung). Ein Versuch, die weitere Regelung der Systeme auf direktem Wege, also ohne Zuhilfenahme von Sätzen der Gruppentheorie oder der Matrizenrechnung, durchzuführen, fehlte bis jetzt. Die hier gegebene Ableitung füllt diese Lücke aus und stellt so einerseits den einfachsten Weg dar, um zu den Eigenschaften der Hauptquadrate zu gelangen, während sie andererseits, indem sie die Existenz mehrerer Sätze von nilpotenten Nebeneinheiten berücksichtigt, von selbst zu der hier unmittelbar anschließenden Erörterung der durchgehenden Selbstisomorphie der Systeme überleitet.

IV. Die durchgehende Selbstisomorphie der Systeme.

Ersetzung eines Hauptquadrats durch ein anderes zur selben Hauptreihe. Ist ein System geregelt in bezug auf ein Hauptquadrat, und führt man statt der Zahlenpaare e_{ij}, e_{ji} ein anderes Zahlenpaar e'_{ij}, e'_{ji} ein, so ist dies, wie oben (S. 22) gezeigt, nur möglich, wenn es

*) A. S. 3 drittang. O. S. 304. **) Ebenda S. 364.
***) A. S. 3 a. O. S. 96. †) Ebenda S. 93.
††) A. S. 3 a. O.

nilpotente Zahlen des Charakters ii gibt, und das neue Zahlenpaar geht in die Form ein:

$$(24)\qquad \begin{cases} e'_{ij} = (e_{ii} - q_{iid})\, e_{ij} = e_{ij}(e_{jj} - q_{jjd}), \\ e'_{ji} = e_{ji}(e_{ii} - p_{iic}) = (e_{jj} - p_{jjc})\, e_{ji}, \end{cases}$$

wo p_{iic} und q_{iid} beliebige nilpotente Zahlen des Charakters ii sind, die der Bedingung genügen:

$$(19)\qquad q_{iid} = -p_{iic} - p^2_{iic} - \cdots$$

und wo:

$$(25)\qquad p_{jjc} = e_{ji} p_{iic} e_{ij}, \quad q_{jjd} = e_{ji} q_{iid} e_{ij}.$$

Führt man jetzt statt der Nebeneinheiten des Systems, des Charakters jk, kj oder jj, z. B.:

$$e_{jke}, \quad e_{kjf}, \quad e_{jjg}$$

als neue Einheiten ein:

$$(e_{jj} - p_{jjc})\, e_{jke}, \quad e_{kjf}(e_{jj} - q_{jjd}), \quad (e_{jj} - p_{jjc})\, e_{jjg}(e_{jj} - q_{jjd})$$

und läßt man die Nebeneinheiten des Charakters ik, ki oder ii, z. B.

$$e_{ike}, \quad e_{kif}, \quad e_{iig}$$

und alle anderen, in denen weder ein Charakter i noch j vorkommt, wie sie sind, so sind diese neuen Nebeneinheiten, da

$$(e_{jj} - q_{jjd})\,(e_{jj} - p_{jjc}) = e_{jj}$$

geregelt in bezug auf das neue Hauptquadrat und haben überdies unter sich und mit den Haupteinheiten dieselbe Multiplikationstabelle als die Nebeneinheiten in der ersten Gestalt des Systems. Die neuen Nebeneinheiten lassen sich offenbar durch eine lineare Substitution aus den vorhandenen Nebeneinheiten ableiten. Ersetzt man nun statt eines Einheitspaares mehrere, und zwar so, daß wiederum ein Hauptquadrat entsteht, und führt man auf die Nebeneinheiten nacheinander, in beliebiger Reihenfolge, sämtliche Transformationen aus, die zu den Ersetzungen gehören, so ist das System in seiner neuen Gestalt geregelt in bezug auf das neue Hauptquadrat und hat überdies für alle Einheiten dieselbe Multiplikationstabelle wie in seiner ersten Gestalt. Wir sprechen also den Satz aus:

Theorem IXa. *Ist ein System geregelt in bezug auf ein Hauptquadrat und ersetzt man letzteres durch ein anderes, das zur selben Hauptreihe gehört, so lassen sich gleichzeitig aus den Nebeneinheiten andere linear ableiten, in der Weise, daß das System in seiner ersten und zweiten Gestalt selbstisomorph ist.*

Für die Bestimmung der Form eines Systems ist es also gleichgültig, welches Hauptquadrat man zu einer gegebenen Hauptreihe wählt.

Allgemeine Form der idempotenten Zahl und die verschiedenen möglichen Hauptreihen. Ist ein System in bezug auf ein bestimmtes Hauptquadrat geregelt, so muß jede idempotente Zahl notwendig wenigstens eine der idempotenten Haupteinheiten enthalten. Denn gäbe es eine idempotente Zahl, die sich nur aus nilpotenten Haupt- und Nebeneinheiten zusammensetzte, so wäre der nur aus den Haupteinheiten ableitbare Teil schon für sich idempotent, da die Nebeneinheiten ein invariantes Untersystem bilden. Dieser Teil wäre aber von der Form:

$$x_{ix} + x_{yi} + x_{yx},$$

wo x_{ix} sich nur aus Einheiten e_{ij}, $j = 1, \cdots, s$, $j \neq i$, x_{yi} nur aus Einheiten e_{ji}, $j = 1, \cdots, s$, $j \neq i$ und x_{yx} nur aus Einheiten e_{jk}, $j, k = 1, \cdots, s$, $j \neq k, j \neq i, k \neq i$ zusammensetzt. Da derselbe idempotent sein soll, muß:

$$x_{ix}x_{yi} = 0,$$
$$x_{ix}x_{yx} = x_{ix},$$
$$x_{yx}x_{yi} = x_{yi},$$
$$x_{yi}x_{ix} + x_{yx}x_{yx} = x_{yx},$$

also:

$$x_{yx}^2 - x_{yx} = x_{yx}^3 - x_{yx}^2 = \cdots,$$

dann ist aber:

$$2x_{yx} - x_{yx}^2$$

idempotent, denn:

$$\begin{aligned}(2x_{yx} - x_{yx}^2)^2 &= 4x_{yx}^2 - 4x_{yx}^3 + x_{yx}^4 \\ &= 3x_{yx}^2 - 2x_{yx}^3 \\ &= x_{yx}^2 + 2x_{yx} - 2x_{yx}^2 \\ &= 2x_{yx} - x_{yx}^2.\end{aligned}$$

Nun ist $2x_{yx} - x_{yx}^2$ entweder Null oder nicht Null. In beiden Fällen soll es aber eine Zahl geben, die sich nur aus nilpotenten Haupteinheiten außer e_{ij}, e_{ji}, $j = 1, \cdots, s$ ableitet und die idempotent ist. Wir wenden dasselbe Verfahren auf diese Zahl an und setzen die Rechnung stufenweise so weit fort, bis der Beweis verlangt, es soll eine idempotente Zahl geben, die sich nur aus zwei nilpotenten Haupteinheiten entgegengesetzten Charakters e_{ml}, e_{lm} ableitet. Eine solche Zahl ist offenbar unmöglich, und jede idempotente Zahl enthält demnach sicher eine idempotente Haupteinheit.

Die allgemeine Form einer idempotenten Zahl ist also:

$$x + y + z,$$

wo x sich nur aus idempotenten Haupteinheiten, y nur aus nilpotenten Haupteinheiten und z nur aus Nebeneinheiten ableitet. Der Teil

$$x + y$$

ist dann schon für sich idempotent.

Wir erhalten also alle möglichen Haupteinheiten, wenn wir, von dem in bezug auf irgend ein Hauptquadrat geregelten System ausgehend, zuerst alle diejenigen Hauptreihen bilden, deren Einheiten in die Form

$$x + y$$

eingehen und aus diesen später alle anderen ableiten. Wir betrachten, von einer vorhandenen Hauptreihe ausgehend, zunächst die Hauptreihen erster Art. Ein Beispiel dieser Art entsteht, wenn man im System der Quaternionen (s. S. 25) als neue Hauptreihe die beiden idempotenten Zahlen

$$\text{(26)} \quad \begin{cases} e'_{ii} = \frac{1}{2} e_{ii} + \frac{1}{2} e_{jj} + \frac{1}{2} e_{ij} + \frac{1}{2} e_{ji}, \\ e'_{jj} = \frac{1}{2} e_{ii} + \frac{1}{2} e_{jj} - \frac{1}{2} e_{ij} - \frac{1}{2} e_{ji} \end{cases}$$

einführt.*)

Einführung der Hauptreihen erster Art. Nehmen wir zunächst an, das Hauptquadrat des Systems bilde ein vollständiges ursprüngliches System. Jede Hauptreihe, deren Einheiten die Form $x + y$ haben, enthält dann gerade s Einheiten. Denn enthielte sie mehr als s, so würde das zuerst vorhandene Hauptquadrat in bezug auf die neue Hauptreihe geregelt, entweder Nebeneinheiten enthalten oder in verschiedene ursprüngliche Systeme zerfallen, und enthielte sie weniger als s, z. B. $s - a$ Einheiten, so würde das Hauptquadrat in seiner neuen geregelten Form sicher Nebeneinheiten aufweisen, da es in der neuen Gestalt höchstens $(s - a)^2$ Haupteinheiten geben könnte. Auf jeden Fall wäre also das zuerst vorhandene ursprüngliche System in eine Form gebracht, die unmittelbar invariante Untersysteme aufweist, was unmöglich ist (s. S. 26). Stellt

*) In einem Beweise für die Unmöglichkeit der Existenz mehrerer Hauptreihen kommt E. Hawkes 1905, a. S. 3 viertang. O., zunächst zu dem Schlusse, daß eine Einheit der einen Hauptreihe jedenfalls nicht mehr als eine Einheit einer anderen und diese nur mit dem Koeffizienten Eins enthalten kann (vgl. die Fußnote auf S. 35). Es geht aus dem angegebenen Beispiel hervor, daß der Schluß unrichtig ist; wir werden später sehen, daß die erwähnte Eigenschaft nur für Nichtquaternionsysteme gilt (s. S. 33). Wohl gibt es eine andere Eigenschaft, die sich folgendermaßen angeben läßt: Ist ein System in bezug auf zwei verschiedene Hauptreihen geregelt, so sind die Summen der Koeffizienten der idempotenten Haupteinheiten in beiden Gestalten des Systems gleich. Diese Eigenschaft steht in naher Beziehung zu den Taberschen Skalarfunktionen der komplexen Zahlen (s. S. 61).

sich nun das Hauptquadrat aus mehreren ursprünglichen Systemen zusammen, so kann keine Einheit irgend eine Hauptreihe erster Art, in den Einheiten des in bezug auf die vorhandene Hauptreihe geregelten Systems ausgedrückt, Einheiten zusammen enthalten, die zu verschiedenen ursprünglichen Systemen gehören. Denn zwei Zahlen, die zu zwei verschiedenen solchen Systemen gehören, geben multipliziert stets Null, die Einheit würde demnach in zwei oder mehrere idempotente Zahlen zerlegt werden können, deren Produkte unter sich Null sind. Bei einer Einheit einer Hauptreihe ist das aber nicht möglich (s. S. 16). Die Einheiten einer neuen Hauptreihe stellen sich also jede nur aus Einheiten irgend eines der ursprünglichen Systeme des vorhandenen Hauptquadrats zusammen. In jedem solchem System gibt es aber immer gerade die Anzahl derselben, die die Ordnung des Systems angibt; es gibt also auch in diesem Falle nur Hauptreihen mit s Einheiten.

Es sei nun $e_{11}, \cdots, e_{ss}$ die Hauptreihe, in bezug auf welche das System geregelt ist, und $e'_{11}, \cdots, e'_{ss}$ eine beliebige andere der ersten Art. Da jede Einheit der neuen Hauptreihe wenigstens eine Einheit der Erstvorhandenen mit irgend einem Koeffizienten enthalten muß und die Summen beider Reihen gleich sind, lassen sich die Einheiten der neuen Hauptreihe denen der Erstvorhandenen immer so zuordnen, daß sich in e'_{ii} die Einheit e_{ii} vorfindet, sagen wir: mit dem Koeffizienten $\frac{1}{a_{ii}}$. Dann ist:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{ii} e_{ii} e'_{ii} e_{ii} = e_{ii} \\ a_{ii} e'_{ii} e_{ii} e'_{ii} = e'_{ii} \end{array}\right\} \quad i = 1, \cdots, s. \tag{27}$$

Führen wir nun statt jeder nilpotenten Einheit des Systems

$$e_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, s, \quad i \neq j$$

oder

$$e_{ija}, \quad \begin{array}{l} i, j = 1, \cdots, s, \\ a = 1, \cdots, n_{ij} \end{array}$$

die Einheiten ein:

$$\left\{\begin{array}{rl} & e'_{ij} = a_{ii} e'_{ii} e_{ij} e'_{jj} \\ \text{bzw.:} & e'_{ija} = a_{ii} e'_{ii} e_{ija} e'_{jj} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} i, j = 1, \cdots, s, \\ a = 1, \cdots, n_{ij}, \end{array} \tag{28}$$

so ist das System in dieser neuen Gestalt geregelt in bezug auf die neue Hauptreihe und sind überdies die Multiplikationstabellen für beide Gestalten dieselben.

Denn, wenn z. B.:

$$e_{ija} e_{jkb} = \sum_{c}^{1 \cdots n_{ik}} a_{ikc} e_{ikc},$$

so ist:

$$
\begin{aligned}
e'_{ija} e'_{jkb} &= (a_{ii} e'_{ii} e_{ija} e'_{jj})(a_{jj} e'_{jj} e_{jkb} e'_{kk}) \\
&= a_{ii} e'_{ii} e_{ija} (a_{jj} e_{jj} e'_{jj} e_{jj}) e_{jkb} e'_{kk} \\
&= a_{ii} e'_{ii} e_{ija} e_{jkb} e'_{kk} \\
&= \sum_{c}^{1 \cdots n_{ik}} a_{ikc} a_{ii} e'_{ii} e_{ikc} e'_{kk} \\
&= \sum_{c}^{1 \cdots n_{ik}} a_{ikc} e'_{ikc} .
\end{aligned}
$$

Für die Nebeneinheiten ist die angegebene Transformation offenbar einer Ersetzung durch linear nur aus Nebeneinheiten abgeleiteten Zahlen gleich. Wir haben also in Verbindung mit dem in Theorem IX ausgesprochenen Resultate den Satz erhalten:

Theorem IXb. *Ist ein System geregelt in bezug auf ein Hauptquadrat und ersetzt man letzteres durch ein anderes, dessen idempotente Einheiten sich nur aus Einheiten des ersten Hauptquadrats ableiten, so lassen sich gleichzeitig aus den Nebeneinheiten neue Nebeneinheiten linear ableiten, so, daß das System in seiner ersten und zweiten Gestalt selbstisomorph ist.*

Einführung der Hauptreihen zweiter Art. Ist eine neue Hauptreihe gegeben, deren Einheiten in die Form

$$x + y + z$$

eingehen, so bilden die Teile

$$x + y$$

der Einheiten ebenfalls eine Hauptreihe, und zwar eine erster Art. Eine Hauptreihe zweiter Art läßt sich also stets aus einer Hauptreihe erster Art ableiten, indem man zu jeder Einheit der letztgenannten eine Zahl hinzufügt, die sich nur aus Nebeneinheiten der zweiten Gestalt des Systemes zusammensetzt. Denn das Gebiet der Nebeneinheiten ist in der ersten und zweiten Gestalt gleich. Jede Einheit einer Hauptreihe zweiter Art geht also in das in bezug auf die zugehörige Hauptreihe erster Art geregelte System in die Form

$$x + z$$

ein und enthält also jedenfalls eine der Einheiten der zugehörigen Hauptreihe erster Art. Da sie aber keine nilpotenten Haupteinheiten enthalten kann und die Summe beider Reihen gleich ist, enthält sie nie mehr als eine solche idempotente Einheit, sonst wäre das Produkt von zwei der neuen Einheiten nicht stets Null. Die neue Hauptreihe muß also auch gerade s Einheiten enthalten und die nicht verschwindenden Koeffizienten der Einheiten der zugehörigen Hauptreihe erster Art in den Ausdrücken

für die Einheiten dieser neuen Reihe sind notwendig gleich Eins. Es besteht demnach eine bestimmte eineindeutige Zuordnung zwischen den beiden Reihen, die ihren Ausdruck findet in der Formel:

$$e'_{ii} = e_{ii} + z^{(i)}. \tag{29}$$

Die z sind so zu wählen, daß

$$\left.\begin{array}{l} e'_{ii} e'_{ii} = e'_{ii} \\ e'_{ii} e'_{jj} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} i,\ j = 1, \cdots, s, \\ i \neq j. \end{array}$$

Man erhält ein Beispiel einer solchen Transformation, wenn man in irgend einem beliebig geregelten System, in welchem eine Zahl $x_{ij\alpha}$ vorkommt, die sich aus Nebeneinheiten des Charakters ij ableiten läßt, die Einheiten e_{ii} und e_{jj} folgendermaßen transformiert:

$$\left\{\begin{array}{l} e'_{ii} = e_{ii} + x_{ij\alpha}, \\ e'_{jj} = e_{jj} - x_{ij\alpha} \end{array}\right. \tag{30}$$

und die anderen Einheiten der Hauptreihe, in bezug auf welche das System geregelt ist, unverändert läßt.

Durchgehende Selbstisomorphie der Systeme. Es erhebt sich die Frage, ob das System, nach Einführung der neuen Hauptreihe, wiederum so transformiert werden kann, daß es in seinen zwei Gestalten selbstisomorph ist. Wir suchen dazu einen Satz von $2s$ Zahlen

$$v^{(i)}, \quad w^{(i)}, \quad i = 1 \cdots s,$$

die den Bedingungen genügen:

$$\left\{\begin{array}{ll} e'_{ii}(e_{ii} + w^{(i)}) = e_{ii} + w^{(i)}, & (e_{ii} + w^{(i)})\, e_{ii} = e_{ii} + w^{(i)}, \\ (e_{ii} + v^{(i)})\, e'_{ii} = e_{ii} + v^{(i)}, & e_{ii}(e_{ii} + v^{(i)}) = e_{ii} + v^{(i)}, \\ (e_{ii} + v^{(i)})(e_{ii} + w^{(i)}) = e_{ii}, & (e_{ii} + w^{(i)})(e_{ii} + v^{(i)}) = e'_{ii}, \\ & i = 1, \cdots, s. \end{array}\right. \tag{31}$$

Gibt es einen solchen Satz, und ersetzen wir jede nilpotente Einheit des Systems

$$e_{ij} \quad \text{oder} \quad e_{ij\alpha}, \qquad \begin{array}{c} i,\ j = 1, \cdots, s, \\ \alpha = 1, \cdots, n_{ij} \end{array}$$

durch:

$$\left.\begin{array}{ll} (32\text{a}) & e'_{ij} = (e_{ii} + w^{(i)})\, e_{ij}\, (e_{jj} + v^{(j)}) \\ \text{bzw.:} & \\ (32\text{b}) & e'_{ij\alpha} = (e_{ii} + w^{(i)})\, e_{ij\alpha} (e_{jj} + v^{(j)}) \end{array}\right\} \quad i,\ j = 1, \cdots, s,$$

so ist das System in dieser neuen Gestalt offenbar geregelt in bezug auf

die neue Hauptreihe, und in seinen beiden Gestalten selbstisomorph. Ein solcher Satz läßt sich z. B. erhalten, wenn man

$$\begin{aligned} v^{(i)} &= e_{ii} z^{(i)} + e_{ii} (z^{(i)})^2 + \cdots + e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1}, \\ w^{(i)} &= z^{(i)} e_{ii} \end{aligned} \tag{33}$$

wählt, wo $m_i - 1$ die höchste Potenz von $z^{(i)} = e'_{ii} - e_{ii}$, die nicht Null wird Denn da

$$(e_{ii} + z^{(i)})^2 = e_{ii} + z^{(i)},$$

also:

$$e_{ii} z^{(i)} + z^{(i)} e_{ii} + (z^{(i)})^2 = z^{(i)},$$

so ist:

$$\begin{aligned} - e_{ii} z^{(i)} e_{ii} &= e_{ii} (z^{(i)})^2 e_{ii} &&= e_{ii} (z^{(i)})^2 &&= (z^{(i)})^2 e_i \\ - e_{ii} (z^{(i)})^3 e_{ii} &= e_{ii} (z^{(i)})^4 e_{ii} &&= e_{ii} (z^{(i)})^4 &&= (z^{(i)})^4 e_{ii}, \\ &\vdots \\ - e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 2} e_{ii} &= e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1} e_{ii} &&= e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1} &&= (z^{(i)})^{m_i - 1} e_i \end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned} (e_{ii} + z^{(i)}) (e_{ii} + z^{(i)} e_{ii}) &= e_{ii} + z^{(i)} e_{ii} + e_{ii} z^{(i)} e_{ii} + (z^{(i)})^2 e_{ii} \\ &= e_{ii} + z^{(i)} e_{ii} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (e_{ii} + e_{ii} z^{(i)} + e_{ii} (z^{(i)})^2 + \cdots + e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1}) (e_{ii} + z^{(i)}) \\ = e_{ii} + (e_{ii} z^{(i)} e_{ii} + e_{ii} (z^{(i)})^2 e_{ii}) + (\cdots + e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1} e_{ii}) \\ + e_{ii} z^{(i)} + e_{ii} (z^{(i)})^2 + e_{ii} (z^{(i)})^3 + \cdots + e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1} \\ = e_{ii} + e_{ii} z^{(i)} + \cdots + e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1}. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} (e_{ii} + e_{ii} z^{(i)} + \cdots + e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1}) (e_{ii} + z^{(i)} e_{ii}) \\ = e_{ii} + e_{ii} z^{(i)} e_{ii} + \cdots + e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1} e_{ii} \\ + e_{ii} z^{(i)} e_{ii} + \cdots + e_{ii} (z^{(i)})^{m_i - 1} e_{ii} = e_{ii} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} \{(e_{ii} + w^{(i)}) (e_{ii} + v^{(i)})\} \{(e_{ii} + w^{(i)}) (e_{ii} + v^{(i)})\} \\ = (e_{ii} + w^{(i)}) e_{ii} (e_{ii} + v^{(i)}) = (e_{ii} + w^{(i)}) (e_{ii} + v^{(i)}), \end{aligned}$$

also:

$$(e_{ii} + w^{(i)}) (e_{ii} + v^{(i)}) = e'_{ii}.$$

In Verbindung mit den in den Theoremen IXa und IXb ausgesprochenen Resultaten ergibt sich also der Satz.

Theorem IX (Prinzip der durchgehenden Selbstisomorphie der Systeme, umfaßt Theorem IXa und IXb): *Ist ein System geregelt in bezug auf ein Hauptquadrat und ersetzt man letzteres durch ein beliebiges anderes, so lassen sich gleichzeitig aus den Nebeneinheiten andere ableiten, in der Weise, daß das System in seiner ersten und zweiten Gestalt selbstisomorph ist.*

Es ist also auch die S. 25 angegebene Verteilung der Zahl n unabhängig von der Wahl des Hauptquadrats und sind demnach die Zahlen s, N_{ij}, n_{ij}, $i, j = 1, \cdots, s$ Invarianten des Systems.*) Aus dem Prinzip der durchgehenden Selbstisomorphie geht ferner hervor, daß es unter allen möglichen Hauptquadraten eines Systems kein ausgezeichnetes gibt und es demnach zulässig ist, ein in bezug auf irgend ein Hauptquadrat geregeltes System als geregelt überhaupt zu bezeichnen (vgl. S. 26).

Vergleichung und Klassifizierung von Systemen. Gilt es nun, zwei Systeme auf Äquivalenz zu prüfen, so regelt man zunächst jedes in bezug auf irgend eines seiner Hauptquadrate. Sind dann die Zahlen s ungleich oder N_{ij} und n_{ij} nicht alle durch passende Verteilung der Buchstaben in beiden Systemen gleich zu machen, so sind die Systeme sicher nicht in isomorphe Gestalt zu bringen. Im anderen Falle sucht man eines der Systeme, ohne die geregelte Gestalt zu zerstören, mit dem anderen isomorph zu machen. Nach Theorem IX ist es gleichgültig, welche Hauptquadrate man gewählt hat, und beruht diese Vergleichungsmethode eben auf diesem Theorem. Hieran schließt sich eine leichte und sehr übersichtliche Klassifizierungsmethode.**) Soll man alle Systeme in n Einheiten

---

*) Bezüglich der Möglichkeit des Vorhandenseins mehrerer Hauptreihen stellte sich G. W. Scheffers 1891 (a. S. 3 drittang. O. S. 329, vgl. auch den dort viertang. O.) auf den Standpunkt, daß es in einem Nichtquaternionsysteme nur eine Hauptreihe gibt und die idempotenten Haupteinheiten demnach ganz bestimmte Zahlen des Systems sind. Er gab hierfür auch einen Beweis, der aber nur dartut, daß, wenn $s-1$ der Einheiten einer Hauptreihe gegeben sind, die s^{te} eindeutig bestimmt ist, aber nicht, daß es unmöglich ist, zwei oder mehrere oder gar alle Einheiten einer Hauptreihe durch andere zu ersetzen. Der Fall wäre unwichtig, wenn nicht später Hawkes gerade an diese falsche Voraussetzung angeknüpft hätte. H. E. Hawkes (a. S. 3 drittang. O. S. 365) übernahm 1904 den Satz, ohne den Beweis zu prüfen, und gab 1905 (a. S. 3 viertang. O. S. 443) einen Beweis für die Erweiterung des Satzes, der auch Quaternionsysteme berücksichtigt, welcher Beweis aber ebenfalls unrichtig ist. Die Möglichkeit der Existenz mehrerer Hauptreihen geht aus den Beispielen auf S. 9 und 30, Gleichung (26) zur Genüge hervor. Cartan war sich 1898 der Existenz mehrerer Hauptreihen bewußt, er gab auch (a. S. 3 a. O. S. 36) für Nichtquaternionsysteme die Transformationsgleichung (29) auf S. 33 an, und erklärte die Zahlen s, N_{ij}, n_{ij}, $i, j = 1, \cdots, s$ für Invarianten des Systems. Eine eingehende Behandlung der verschiedenen Hauptreihen findet sich bei ihm aber nicht. Auch Shaw gab (a. S. 2 a. O. S. 27) für ein System dritter Ordnung ein Beispiel der Ersetzung einer Hauptreihe durch eine andere, wobei, anscheinend zufällig, Selbstisomorphie auftritt. Eine Erwähnung der durchgehenden Selbstisomorphie der Systeme findet sich aber auch bei den Autoren, die die Möglichkeit verschiedener Hauptreihen beachtet haben, nicht. Die gleich zu erwähnende Klassifizierungsmethode Hawkes beruht aber ganz auf dieser Eigenschaft (vgl. S. 37 Fußn.), und durch ihre Feststellung ist demnach eine bestehende Lücke ausgefüllt.

**) H. H. Hawkes a. S. 3 zweit-, dritt- und viertang. O.

bestimmen, wenn die von niedrigerer Ordnung bekannt sind, so macht man zunächst alle möglichen Annahmen bezüglich der Anzahl der idempotenten Haupteinheiten und der Anzahl und Verteilung der nilpotenten Haupt- und Nebeneinheiten. Hieraus ergeben sich mehrere Multiplikationstabellen, die teilweise unvollständig sein können, aus denen aber so viele auszulassen sind, daß nur nicht reduzibele und unter sich nicht isomorphe und nicht reziproke Systeme übrigbleiben. Die unvollständigen Tabellen verkürzt man jede um irgend eine geeignete Nebeneinheit oder auch nach einer von Hawkes angegebenen Methode um mehrere Einheiten (s. S. 20) und erhält so Tabellen, die mit einigen der schon bekannten niederer Ordnung zur Isomorphie gebracht werden können, wodurch die Möglichkeit entstehen kann, einige Lücken auszufüllen. Wenn nötig, kann Verkürzung um andere Nebeneinheiten weitere Ausfüllung ermöglichen. Die noch verbleibenden Lücken werden ausgefüllt, indem man zum assoziativen Gesetz greift, was allerdings, namentlich wenn es sich um mehrere Lücken handelt, weniger leicht wird. Es liegt gerade darin die Schwäche der Methode, dieselbe führt, wenn die Zahl der Nebeneinheiten klein ist im Vergleich zur Zahl der Haupteinheiten, überraschend schnell und leicht zum Ziel, wächst aber die erstere Zahl verhältnismäßig, dann wachsen auch die Schwierigkeiten, und bei Systemen mit einer idempotenten Einheit versagt die Methode ganz. Als Beispiel seien die Quaternionsysteme in sieben Einheiten abgeleitet. Ein solches System enthält notwendig die Haupteinheiten:

$$e_{11},\quad e_{12},\quad e_{21},\quad e_{22},$$

es können sich dazu keine Nebeneinheiten dieser Charaktere gesellen, denn gäbe es eine solche, so wären gleich vier vorhanden, die man durch fortgehende Multiplikation mit e_{12} und e_{21} aus dieser ersten erhalten würde (vgl. S. 23). Das Hauptquadrat enthält also jedenfalls noch eine idempotente Einheit e_{33}. Weitere nilpotente Haupteinheiten kann es nicht geben, denn nähme man eine solche an, so wären wiederum gleich vier da. Die zwei noch nicht bestimmten Einheiten können also nur Nebeneinheiten sein, eine derselben muß den Charakter 31, 13, 32 oder 23 haben, da sonst das System reduzibel wäre; die Wahl ist gleichgültig, da verschiedene Voraussetzungen zu isomorphen oder reziproken (sich an der Diagonale spiegelnden) Systemen führen. Nimmt man für die sechste Einheit:

$$e_{311},$$

so geht aus dieser durch Multiplikation mit e_{12} als Nachfaktor die siebente:

$$e_{321}$$

hervor.

Das System ist hiermit eindeutig bestimmt. Es gibt also nur ein Quaternionsystem in sieben Einheiten mit der Tabelle:

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
\nearrow & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \hline
e_1 & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_2 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\
e_3 & e_3 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_4 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & 0 & 0 & 0 \\
e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_5 & e_6 & e_7 \\
e_6 & e_6 & e_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e_7 & 0 & 0 & e_6 & e_7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\end{array}\;.^{*)}$$

Zurückführung aller Systeme auf Nichtquaternionsysteme. Betrachten wir ein geregeltes System, so besteht im allgemeinen das Hauptquadrat aus mehreren unabhängigen ursprünglichen Systemen $p_1, \cdots, p_{s'}$ ter Ordnung, wo

$$(34) \qquad \sum_i^{1,\cdots,s'} p_i = s$$

Dazu gesellen sich im allgemeinsten Falle erstens Nebeneinheiten, die ihrem Charakter nach einem dieser Systeme zuzuordnen sind, die also idempotente Haupteinheiten verbinden, die demselben ursprünglichen Systeme angehören, und zweitens solche, die sich zwischen Haupteinheiten verschiedener ursprünglicher Systeme einordnen. Letztere Art ist sogar immer vorhanden, wenn das Hauptquadrat in mehr als ein ursprüngliches System zerfällt, da das System sonst reduzibel wäre. Die Charaktere, die

---

*) Die Klassifizierungsmethode ist gefunden von H. E. Hawkes (am S. 3 zweit-, dritt- und viertang. O.). Dieselbe beruht in seiner Darstellung darauf, daß es nur eine Hauptreihe gibt. Da aber diese Voraussetzung fällt, würde die Methode unrichtig sein, wenn es nicht nach dem Prinzip der durchgehenden Selbstisomorphie (Theorem IX) ganz gleichgültig wäre, welche Hauptreihe man zur Regelung des Systems heranzieht. Bei den Quaternionsystemen machte Hawkes, wahrscheinlich unbekannt mit der Arbeit Cartans, keinen Gebrauch von der Eigenschaft, daß es bei Existenz eines Paares nilpotenter Haupteinheiten e_{ij}, e_{ji} jedenfalls gleichviel Nebeneinheiten der vier Charaktere ii, ij, jj und ji gibt, sondern behandelte diese Systeme gerade so wie die anderen. Dadurch werden bei diesen zunächst mehrere unzulässige Annahmen bezüglich der Verteilung der Einheiten gemacht, die ihre Unzulässigkeit dann später dadurch kundgeben, daß sie zu nichtassoziativen Systemen führen. So werden für die Ableitung des sich hier als Beispiel auf einmal ergebenden Quaternionsystems in sieben Einheiten sechs verschiedene Tabellen aufgestellt, von denen fünf ausfallen (s. a. S. 3 viertang. O. S. 455). Die Methode wäre demnach in diesen Fällen kürzer zu gestalten.

zu demselben ursprünglichen System gehören, enthalten gleichviel Nebeneinheiten, da dieselben Satzweisen durch einfache Multiplikation mit geeigneten nilpotenten Haupteinheiten auseinander erzeugt werden können; diese Nebeneinheiten treten also in Sätzen von p_i^2 auf. Ähnliches gilt für die Nebeneinheiten, die eine beliebige idempotente Haupteinheit des ursprünglichen Systems p_i^{ter} mit einer ebenfalls beliebigen des Systems p_j^{ter} Ordnung verbinden, diese treten in Sätzen zu $p_i p_j$ auf und können ebenfalls satzweise durch einfache Multiplikation mit geeigneten nilpotenten Haupteinheiten ineinander übergehen. Um dies näher zu beleuchten, führen wir eine etwas veränderte Schreibweise ein und nennen die Einheiten der Hauptreihe:

$$e_{11}^{(11)},\ e_{11}^{(22)},\ \cdots,\ e_{11}^{(p_1 p_1)},\ e_{22}^{(11)},\ \cdots,\ e_{22}^{(p_2 p_2)},\ \cdots,\ e_{s's'}^{(p_{s'} p_{s'})}$$

oder:

$$e_{ii}^{(k_i k_i)},\qquad k_i = 1, \cdots, p_i,\quad i = 1, \cdots, s',$$

wozu sich die nilpotenten Haupteinheiten:

$$e_{ii}^{(k_i l_i)},\qquad k_i, l_i = 1, \cdots, p_i,\quad k_i \neq l_i \qquad i = 1, \cdots, s'$$

gesellen und Nebeneinheiten der Form:

$$e_{ii a_{ii}}^{(k_i l_i)},\ e_{ij b_{ij}}^{(k_i l_j)},\qquad \begin{array}{l} k_i, l_i = 1, \cdots, p_i, \\ l_j = 1, \cdots, p_j, \\ i, j = 1, \cdots, s',\quad i \neq j. \end{array}$$

Alle diese Einheiten lassen sich aus den Einheiten

$$\left.\begin{array}{l} e_{ii}^{(11)} \\ e_{ii a_{ii}}^{(11)}, \cdots \\ e_{ij b_{ij}}^{(11)}, \cdots \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} i, j = 1, \cdots, s' \\ i \neq j \end{array}$$

durch Multiplikation (vorn und hinten) mit irgend zwei der nilpotenten Haupteinheiten

$$e_{ii}^{(k_i l_i)},\qquad k_i, l_i = 1, \cdots, p_i,\quad k_i \neq l_i \qquad i = 1, \cdots, s'$$

ableiten, wobei zu beachten ist, daß sowohl die unteren als die zwei ersten oberen Indizes bestimmend für das Produkt sind. Die Einheiten

$$e_{ii}^{(11)},\ e_{ii a_{ii}}^{(11)},\ \cdots,\ e_{ij b_{ij}}^{(11)},\ \cdots$$

bestimmen aber ein Nichtquaternionsystem, und es tritt also die Tatsache hervor, daß zu jedem Quaternionsystem ein der Form nach eindeutig bestimmtes Nichtquaternionsystem gehört, aus dessen Multiplikationsregeln die des ganzen Systems hervorgehen, sobald die Zahlen $p_1, \cdots, p_{s'}$ be-

kannt sind. Die Zahlen $p_1, \cdots, p_{s'}$ geben dann die Ordnung der ursprünglichen Systeme, durch die die s' Einheiten der Hauptreihe in dem Nichtquaternionsystem ersetzt werden sollen. Jedes Nichtquaternionsystem bestimmt also eine ganze Schar von Quaternionsystemen, und erstere erscheinen vom Standpunkte der Klassifizierung aus als die wichtigeren, weil die Kenntnis aller Nichtquaternionsysteme zugleich die aller möglichen Quaternionsysteme ohne weitere Rechnung mit sich bringt.

Sind die invarianten Zahlen des zugehörigen Nichtquaternionsystems:

$$n', \quad s', \quad n'_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, s',$$

dann können die invarianten Zahlen des Systems selbst aus den Formeln erhalten werden:

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{s = \sum\limits_{i}^{1,\cdots,s'} p_i,} \\ n_{ij}^{(kl)} = n'_{ij}, & n_{ij} = p_i p_j n'_{ij}, \\ N_{ij}^{(kl)} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } i \neq j, \\ 1, \text{ wenn } i = j, \end{cases} & N_{ii} = p_i^2, \\ \multicolumn{2}{c}{n = \sum\limits_{i}^{1,\cdots,s'} p_i^2 + \sum\limits_{ij}^{1,\cdots,s'} p_i p_j n'_{ij},} \end{array}\right\} \begin{array}{l} i, j = 1, \cdots, s', \\ k = 1, \cdots, p_i, \\ l = 1, \cdots, p_j. \end{array}$$

Multiplikation von Systemen. Sind insbesondere die jeder idempotenten Haupteinheit zugeordneten ursprünglichen Systeme von derselben Ordnung p, $ps' = s$, so kann man noch eine andere Bezeichnungsart einführen, indem man die unteren Indizes, die das Nichtquaternionsystem bestimmen, einer Art Einheit η, und die oberen Indizes, die jetzt alle dieselbe obere Grenze p haben, einer zweiten Art Einheit ε anhängt, und die beiden Einheitsarten durch eine kommutative Multiplikation mit η verknüpft. Die Einheiten des Systems erscheinen dann in der Form:

$$(36)\qquad \begin{cases} \varepsilon_{kl} \cdot \eta_{ii} = \eta_{ii} \cdot \varepsilon_{kl}, \\ \varepsilon_{kl} \cdot \eta_{iia_{ii}} = \eta_{iia_{ii}} \cdot \varepsilon_{kl}, \\ \varepsilon_{kl} \cdot \eta_{ijb_{ij}} = \eta_{ijb_{ij}} \cdot \varepsilon_{kl}, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} k, l = 1, \cdots, p, \\ i, j = 1, \cdots, s', \\ ps' = s, \\ a_{ii} = 1, \cdots, n'_{ii}, \\ b_{ij} = 1, \cdots, n'_{ij}, \end{array}$$

wo die η sowohl wie die ε für sich den gewöhnlichen Multiplikationsregeln folgen, und das zugehörige Nichtquaternionsystem sich zusammenstellt aus den Einheiten

$$\left.\begin{array}{l} \eta_{ii}, \\ \eta_{iia_{ii}}, \\ \eta_{ijb_{ij}}, \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_{ii} = 1, \cdots, n'_{ii}, \\ b_{ij} = 1, \cdots, n_{ij}, \end{array}$$

Die Formeln (36) lassen sich auch dahin deuten, daß die Koordinaten der allgemeinen Zahl des Systemes η statt dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen einem ursprünglichen Zahlensystem p^{ter} Ordnung e entnommen werden, oder umgekehrt die Koordinaten des Systemes e einem Nichtquaternionsystem η. Diese Verbindungsweise zweier Systeme heißt Multiplikation, dieselbe läßt sich auch auf zwei beliebige Systeme anwenden. Sind die beiden Systeme ursprünglich, so folgt, indem man die erstverwendete Bezeichnung wieder einführt, leicht, daß das Produkt ebenfalls ein ursprüngliches System darstellt; jedes ursprüngliche System, dessen Ordnungszahl keine Primzahl ist, läßt sich also als Produkt von Systemen niederer Ordnung deuten.*)

Systeme ohne Modul. Hat ein System keinen Modul, so kann man eine neue Zahl M mit den Eigenschaften eines Modul zu dem System hinzufügen und das so erhaltene System regeln. Enthielt das erste System idempotente Zahlen, so ist in dem zweiten eine Hauptreihe mit mehr als einer Einheit vorhanden. Eine solche Einheit ist von der Form

$$x + aM,$$

wo x eine Zahl des ersten Systems und a eine gewöhnliche Zahl. Da sie idempotent und das erste System ein invariantes Untersystem des zweiten ist, ist entweder:

$$a = 0, \quad x^2 = x$$

oder:

$$a = 1, \quad x^2 = -x$$

Die Einheit ist also entweder von der Form:

$$y$$

oder von der Form:

$$M - y,$$

*) Die Zurückführung aller Systeme auf Nichtquaternionsysteme wurde zuerst von T. Molien 1892 (a. S. 3 a. O. S. 148 f.) und später unabhängig von E. Cartan 1898 (a. S. 3 a. O., namentl. S. 48 f.) durchgeführt. Cartan konstatierte zuerst die Existenz der Konstanten. Die Multiplikation der Systeme wurde 1878 von W. K. Clifford, Application of Grassmann's extensive Algebra, Amer. Journ. Math. 1 (1878), S. 350—358, und 1890 von Taber, On the theory of matrices, Amer. Journ. 12 (1890), S. 337—396, bei ursprünglichen Systemen behandelt. Von G. W. Scheffers wurde dieselbe dann 1891 (a. S. 3 drittang. O. S. 323) allgemein formuliert und in Beziehung gesetzt zu der Zusammenstellung der Teilsysteme eines reduzibelen Systems, die Addition genannt wurde. In der Tat besteht dann das distributive Gesetz. Von H. B. Leonard, On the factoring of composite hypercomplex number systems, Amer. Journ. Math. 30 (1908), S. 43, wurden Methoden angegeben, um zu bestimmen, ob ein gegebenes System ein Produkt sei oder nicht. Die Addition und Multiplikation der Systeme hat namentlich dadurch Bedeutung erlangt, daß J. H. Maclagan Wedderburn (a. S. 4 a. O) auf diesen Grundlagen seinen Kalkül der Systeme aufgebaut hat (vgl. die Einleitung).

wo y eine idempotente Zahl des ersten Systems. Die Hauptreihe enthält mehrere solche Einheiten; da ihre Produkte Null sind, kann nur eine, und da ihre Summe M ist, muß notwendig eine in die zweite Form eingehen. Man erhält also das erste System aus dem zweiten, indem man eine der Einheiten der Hauptreihe des zweiten ausläßt. Diese Einheit tritt in keinem der Produkte der anderen Einheiten auf. Enthält das erste System keine idempotenten Zahlen, so ist M die einzige Einheit der Hauptreihe des zweiten Systems und wir haben den schon S. 19f. besprochenen Fall, daß ein nilpotentes System aus einem System mit einer idempotenten Zahl hervorgeht. Wir sprechen also den Satz aus:

Theorem X. *Jedes System ohne Modul läßt sich aus einem System mit Modul erhalten, indem man eine Einheit der Hauptreihe des zweiten Systemes, die in keinem der Produkte der anderen Einheiten auftritt, aus diesem Systeme ausläßt.*

Die Systeme ohne Modul sind Systeme mit unvollständiger Hauptreihe, im übrigen werden sie in derselben Weise wie die Systeme mit Modul geregelt. Zum Zwecke der Klassifizierung brauchen sie nicht untersucht zu werden. Denn, sind alle Systeme mit Modul bekannt, so erhält man alle der anderen Art, indem man erstere Systeme auf alle möglichen Weisen um eine geeignete Einheit der Hauptreihe verkürzt.

V. Die Gleichungen und ihre Beziehungen zu den geregelten Systemen.

Einteilung eines Systems nach den Wurzeln der Gleichungen. Betrachten wir die charakteristische Gleichung in x:

$$(x-u_1M)^{\mu_1}\cdots(x-u_{r'}M)^{\mu_{r'}}=0,$$

wo x eine Zahl des Systems, die keiner Gleichung niederen Grades genügt. Es sind dann die Zahlen:

$$\begin{aligned}
x^{(i1)} &= (x-u_1M)^{\mu_1}\cdots(x-u_{i-1}M)^{\mu_{i-1}}(x-u_{i+1}M)^{\mu_{i+1}}\cdots(x-u_{r'}M)^{\mu_{r'}},\\
x^{(i2)} &= (x-u_1M)^{\mu_1}\cdots(x-u_{i-1}M)^{\mu_{i-1}}(x-u_iM)(x-u_{i+1}M)^{\mu_{i+1}}\cdots(x-u_{r'}M)^{\mu_{r'}},\\
&\;\vdots\\
x^{(i\mu_i)} &= (x-u_1M)^{\mu_1}\cdots(x-u_{i-1}M)^{\mu_{i-1}}(x-u_iM)^{\mu_i-1}(x-u_{i+1}M)^{\mu_{i+1}}(x-u_{r'}M)^{\mu_{r'}}\;{}^{*)}
\end{aligned}$$

jedenfalls von Null verschieden und linear unabhängig. Sie bestimmen ein Gebiet μ_i^{ter} Stufe, das die Eigentümlichkeit besitzt, durch Multiplikation als Vor- oder Nachfaktor mit $(x-u_iM)^j$ in ein Gebiet $(\mu_i-j)^{\text{ter}}$ Stufe $j=1,\cdots,\mu_i$ überzugehen und bei Multiplikation mit irgend einer Potenz

*) $x^{(i1)}$ ist ein Vielfaches einer idempotenten Zahl, vgl. J. B. Shaw a. S. 2 a. O. S. 23.

eines anderen Faktors der charakteristischen Gleichung sich selbst gleich zu bleiben. Die $\sum\limits_i^{1,\cdots,s''} \mu_i = k$ so erhaltenen Zahlen sind sämtlich linear unabhängig. Da $k \leqq n$, brauchen sie nicht das ganze System zu bestimmen. Zur Bestimmung des ganzen Systems verwendet man eine Eigenschaft, die sich in der hier gebrauchten Sprache folgendermaßen angeben läßt.*)

Ist λ_i die Zahl, die angibt, wieviel Mal die Wurzel u_i in der ersten Hauptgleichung in u vorkommt, so gibt es im System jedenfalls $\sum\limits_i^{1,\cdots,s''} \lambda_i = n$ unabhängige Zahlen

$$y^{(i j_i)}, \qquad i = 1, \cdots, s'', \quad j_i = 1, \cdots, \lambda_i,$$

die folgendem Gesetze gehorchen:

$$(37) \qquad \begin{cases} (x - u_i M)\, y^{(i \lambda_i)} = 0, \\ (x - u_i M)\, y^{(i, \lambda_i - 1)} = a^{(11i)} y^{(i \lambda_i)}, \\ (x - u_i M)\, y^{(i, \lambda_i - 2)} = a^{(21i)} y^{(i \lambda_i)} + a^{(22i)} y^{(i, \lambda_i - 1)}, \\ \vdots \\ \text{usw. bis } \; y^{(i 1)}, \end{cases}$$

wo x eine beliebige, aber bestimmte Zahl des Systems ist, deren charakteristische Gleichung in u, s'' verschiedene Wurzeln hat: $u_1, \cdots, u_{s''}$.**) Die Koeffizienten a genügen dabei der Bedingung, daß für jede Zahl $y^{(i \cdots)}$

$$(38) \qquad (x - u_i M)^{\mu_i} y^{(i \cdots)} = 0.$$

Die λ_i Zahlen $y^{(i \cdots)}$ zerfallen also in μ_i Klassen, die sich dadurch unter-

---

*) E. Cartan a. S. 3 a. O. S. 17.

**) Diese aus der Theorie der Matrizen bekannte Eigenschaft (vgl. z. B. H. Taber (a. S. 40 a. O. S. 369) wurde in dieser Form zuerst ausgesprochen von E. Cartan (a. S. 3 a. O. S. 17). Dieselbe ist identisch mit derjenigen der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, die aussagt, daß bei jeder infinitesimalen projektiven Transformation

$$\sum_{ik}^{1,\cdots,n} a_{ki} x_i p_k$$

eines Raumes R_{n-1} wenigstens so viele verschiedene Punkte invariant bleiben als die Gleichung

$$|a_{ij} - \delta_{ij}\sigma| = 0, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

verschiedene Wurzeln besitzt, und daß durch jeden invarianten Punkt wenigstens eine invariante Gerade, durch eine solche wenigstens eine invariante Fläche usw. geht; vgl. S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen (1888), Abschn. I S. 583 Satz I, S. 585 Satz II oder derselbe a. S. 3 a. O. S. 528.

scheiden, daß sie eine andere Potenz von $(x-u_i M)$ als Vorfaktor brauchen, um zu Null zu werden. Jede dieser μ_i Klassen bestimmt ein Gebiet irgend einer Stufe und jede enthält offenbar eine der μ_i Zahlen $x^{(i\cdots)}$. Derselbe Satz gilt mit Verwechslung von Vor- und Nachfaktor für die Wurzeln der zweiten Hauptgleichung in u. Es entstehen die Zahlgebiete $z^{(i\cdots)}$ mit ν_i unabhängigen Zahlen, $i=1,\cdots,s''$.

Ist für irgend eine höhere Zahl v das Produkt

$$(x-u_i M)v$$

eine Zahl des Gebietes $y^{(i\cdots)}$, so gehört v selbst diesem Gebiete an, denn enthielte v eine Zahl eines der anderen Gebiete, so würde eine solche ebenfalls im Produkt erscheinen.*) Ist w eine beliebige höhere Zahl, so ist:

$$(x-u_i M)y^{(i,\lambda_i)}w \;\;= 0, \qquad \text{also gehört } y^{(i,\lambda_i)}w \text{ zum Gebiete } y^{(i)},$$
$$(x-u_i M)y^{(i,\lambda_i-1)}w = a^{(11i)}y^{(i\lambda_i)}w, \quad \text{also gehört } y^{(i,\lambda_i-1)}w \text{ zum Gebiete } y^{(i)},$$

usw.

alle Zahlen des Gebietes $y^{(i)}$ ergeben also, als Vorfaktor mit irgend einer beliebigen Zahl multipliziert, wiederum eine Zahl dieses Gebietes. Dasselbe gilt für Zahlen des Gebietes $z^{(i)}$ als Nachfaktor.

Führt man die n Zahlen

$$y^{(i,j_i)} \qquad (i=1,\cdots,s'',\ j_i=1,\cdots,\lambda_i),$$

als neue Einheiten ein, so zerfällt der Modul in s'' Teile

$$M^{(1)},\cdots,M^{(s'')}$$

jede zu einem der s'' Gebiete $y^{(i)}$ gehörig, und es geht aus obigen Multiplikationsregeln hervor, daß keiner dieser Teile Null sein kann, und jeder idempotent sein muß.**)

Es gelten ferner die Gleichungen

$$M^{(i)}M^{(j)}=0 \qquad (i \neq j),$$

und es läßt sich zeigen, daß $M^{(1)},\cdots,M^{(s'')}$ eine Hauptreihe bilden. Man nehme dazu an, es sei die Bestimmung einer Hauptreihe bis zu $M^{(1)},\cdots,M^{(s'')}$ fortgeschritten, und noch nicht fertig, also eine Hauptreihe von wenigstens $s''+1$ Einheiten $e_{11},\cdots,e_{s''+1,s''+1}$, vorhanden. Die charakteristische Gleichung für die Zahl z:

$$z=\zeta_{11}e_{11}+\cdots+\zeta_{s''+1,s''+1}e_{s''+1,s''+1}$$

wäre dann vom $s''+1^{\text{ten}}$ Grade mit $s''+1$ verschiedenen Wurzeln, was nicht möglich ist. Umgekehrt kann man auf dem angegebenen Wege zu jeder Hauptreihe gelangen, da das System, in bezug auf verschiedene Hauptreihen geregelt, selbstisomorph gemacht werden kann, und es also zu jeder Hauptreihe eine mit der Zahl x korrespondierende Zahl geben

*) Cartan a. S. 3 a. O. S. 18.

**) Cartan a. S. 3 a. O. S. 18.

muß, bei der man auf dem angegebenen Wege gerade zu dieser Hauptreihe gelangt. Die beiden Hauptreihen, die man erhält, indem man von einer Zahl ausgeht und die Einteilung nach der ersten bez. zweiten Hauptgleichung ausführt, sind im allgemeinen nicht identisch. (Sie sind identisch für ein ursprüngliches System, da hier $\lambda_i = \nu_i$, vgl. S. 47.)

Nimmt man die Zahlen $M^{(i)}$, die unter Anwendung der ersten Hauptgleichung entstanden sind, als Hauptreihe an, setzt man also

$$M^{(i)} = e_{ii},$$

so fallen offenbar die Zahlen $y^{(i\cdots)}$ mit allen Zahlen des Charakters ij $(j=1,\cdots,s)$ zusammen. Dasselbe gilt für die zweite Hauptgleichung. Es gilt also der Satz:

Theorem XI. *Die Zahl s'' der ungleichen Wurzeln der Gleichungen eines Systems, ist identisch mit der Zahl s der Einheiten einer Hauptreihe. Wird das System in bezug auf eine Hauptreihe geregelt, und kommt die Wurzel u_i, korrespondierend mit der Haupteinheit e_{ii}, in der chrakteristischen Gleichung und den Hauptgleichungen λ_i und ν_i Mal vor, so gibt es gerade λ_i unabhängige Zahlen des Charakters ix, und ν_i unabhängige Zahlen des Charakters xi, $x=1,\cdots,s$.*

Die charakteristische Gleichung und die Untersysteme geraden Charakters. Es ist interessant, zu untersuchen, welchen Platz die Zahl x, die als Ausgangspunkt zur Bestimmung der Hauptreihe gedient hat, in dem in bezug auf diese Hauptreihe geregelten System einnimmt. Da (siehe S. 42):

$$(x - u_i M)\, e_{ii}$$

eine Zahl des Charakters ij ist, aber auch eine Zahl des Charakters ji $(j=1,\cdots,s)$, hat sie den Charakter ii. Also hat auch xe_{ii} diesen Charakter und kann x demnach keine Einheiten des Charakters ji $j=1,\cdots,s$ enthalten. Da dies für jedes i gilt, kann x überhaupt keine Einheiten schiefen Charakters enthalten. Da die Zahl x nur der Bedingung genügt, daß ihre charakteristische Gleichung in u, s verschiedene Wurzeln hat, sonst aber ganz beliebig ist, ergibt sich der Satz:

Theorem XII. *Ist eine Zahl x des Systems gegeben, deren charakteristische Gleichung in u s verschiedene Wurzeln hat, so läßt sich stets eine solche Hauptreihe finden, daß sich die Zahl x in dem, in bezug auf diese Hauptreihe geregelten System, nur aus Einheiten geraden Charakters ableitet.**)

*) Für eine beliebige Zahl x des Systems gilt, daß stets eine Hauptreihe gefunden werden kann, so daß man der Zahl x mit einer nur aus Einheiten geraden Charakters abgeleiteten Zahl beliebig nahe kommen kann. Vgl. E. Study, a. S. 3 viertang. O., J. B. Shaw, Some generalisations in multiple algebra and matrices, Amer. M. Soc. Bull. 5 (1899), S. 380 und a. S. 2 a. O. S. 26, und für den speziellen Fall des ursprünglichen Systems dritter Ordnung Wilson, Vector-Analysis, 2. Aufl., S. 356f.

Jede solche Zahl kann also in der Form geschrieben werden:

$$x = \sum_{i}^{1,\cdots,s} (\xi_{ii} e_{ii} + x_{ii\alpha_i}),\text{*)} \tag{39}$$

wo $x_{ii\alpha_i}$ eine allgemeine nilpotente Zahl des Charakters ii. Die Zahl genügt aber dann offenbar der Gleichung:

$$\prod_{i}^{1,\cdots,s} (x - \xi_{ii} M)^{k_{ii}} = 0, \tag{40}$$

wenn wir den Grad der nilpotenten Systeme ii einen Augenblick durch k_{ii} angeben. Denn

$$x - \xi_{ii} M = (\xi_{11} - \xi_{ii}) e_{11} + \cdots + (\xi_{i-1,i-1} - \xi_{ii}) e_{i-1,i-1} + (\xi_{i+1,i+1} - \xi_{ii}) e_{i+1,i+1}$$
$$+ \cdots + (\xi_{ss} - \xi_{ii}) e_{ss} + \sum_{i}^{1,\cdots,s} x_{ii\alpha_i};$$

in $(x - \xi_{ii} M)^{k_{ii}}$ verschwinden also jedenfalls alle Zahlen des Charakters ii, und das Produkt von s Zahlen, in denen je ein verschiedener Charakter ganz fehlt, muß notwendig Null sein. Es kann auch keine Gleichung niederen Grades für x bestehen, denn fehlte ein Faktor $(x - \xi_{ii} M)$, so würde im Faktor $(x - \xi_{ii} M)^{k_{ii}-1}$, und folglich im Produkt, eine Zahl des Charakters ii übrig bleiben können. Es ist also

$$k_{ii} = \mu_i \qquad (i = 1, \cdots, s).$$

Theorem XIII. *Die Potenzen der s verschiedenen Faktoren der charakteristischen Gleichung sind den Graden der s korrespondierenden Untersysteme geraden Charakters des geregelten Systems gleich.*

Da die Koeffizienten

$$\xi_{ii} \qquad (i = 1, \cdots, s)$$

einer bestimmten Zahl x in einem Nichtquaternionsystem unabhängig sind von der Wahl der Hauptreihe (siehe S. 32), gibt die Formel

$$\prod_{i}^{1,\cdots,s} (x - \xi_{ii} M)^{\mu_i} = 0 \tag{41}$$

die charakteristische Gleichung eines Nichtquaternionsystems an bei beliebiger Hauptreihe.**)

---

*) Vgl. Study a. S. 3 viertang. O.; Shaw, a. S. 2 a. O. S. 26.

**) Diese Form der Gleichung wurde zuerst angegeben von G. W. Scheffers a. S. 3 drittang. O. S. 314.

Die Form der Gleichungen für verschiedene Systeme. Die charakteristische Gleichung und die Hauptgleichungen haben für ein Nichtquaternionsystem nach vorigem die Form:

$$(42)\qquad \begin{cases} \prod_i^{1,\cdots,s} (x-\xi_{ii}M)^{\mu_i}=0, \\ \prod_i^{1,\cdots,s} (x-\xi_{ii}M)^{\lambda_i}=0, \\ \prod_i^{1,\cdots,s} (x-\xi_{ii}M)^{\nu_i}=0, \end{cases}$$

wo μ_i = Grad des Untersystems des Charakters ii,
λ_i = Anzahl der Einheiten des Charakters ix,
ν_i = " " " " " xi, $\quad (x=1,\cdots,s)$.

Zwischen den Zahlen λ_i, ν_i, n_{ij}, n bestehen die Beziehungen:

$$(43)\qquad \begin{cases} \lambda_i = 1+\sum_j^{1,\cdots,s} n_{ij}, \\ \nu_i = 1+\sum_j^{1,\cdots,s} n_{ji}, \\ n=\sum_i^{1,\cdots,s}\lambda_i=\sum_i^{1,\cdots,s}\nu_i. \end{cases}$$

Nimmt man in einem ursprünglichen System die Einheiten in der Reihenfolge

$$e_{11},\ e_{21},\ \cdots,\ e_{s1},\ e_{12},\ e_{22},\ \cdots,\ e_{s2},\ \cdots,\ e_{ss},$$

so zerfällt die Determinante der ersten Hauptgleichungen u in s Determinanten s^{ten} Grades längs der Diagonale, von der Form

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} \xi_{11}-u & \xi_{12} & & \xi_{1s} \\ \xi_{21} & \xi_{22}-u & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \xi_{s1} & & & \xi_{ss}-u \end{vmatrix}.\text{*)}$$

Die Determinante der zweiten Hauptgleichung ist mit der der ersten identisch.

---

*) Cartan a S. 3 a. O. S. 53.

Die charakteristische Gleichung und die Hauptgleichungen in x eines ursprünglichen Systems s^{ter} Ordnung sind also:

Charakteristische Gleichung:

$$(44) \qquad \Delta \equiv \begin{vmatrix} \xi_{11} M - x & \xi_{12} M & & \xi_{1s} M \\ \xi_{21} M & \xi_{22} M - x & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \xi_{s1} M & & & \xi_{ss} M - x \end{vmatrix} = 0 .$$

Hauptgleichungen:

$$(45) \qquad \Delta^s = 0.$$

Bei einem ursprünglichen System bestehen die Beziehungen:

$$(46) \qquad \lambda_i = \nu_i = \sum_j^{1,\cdots,s} N_{ij} = \sum_j^{1,\cdots,s} N_{ij} = s = \sqrt{n} \qquad (i = 1, \cdots, s).$$

Die Form der Gleichungen eines beliebigen Systems e kann jetzt leicht angegeben werden. Es sei dasselbe in der S. 39 u. f. angegebenen Weise entstanden aus einem Nichtquaternionsystem η mit den Konstanten

$$n', \; n'_{ij}, \; \mu'_i, \; \lambda'_i, \; \nu'_i, \; s' \qquad (i, j = 1, \cdots, s'),$$

wobei jeder idempotenten Einheit η_{ii} ein ursprüngliches System p_i^{ter} Ordnung zugeordnet ist mit der charakteristischen Gleichung:

$$\Delta_i = 0 \qquad (i = 1, \cdots, s').$$

Die Konstanten des Systems seien

$$\left.\begin{array}{l} n, \; s, \; \mu_i^{(k)}, \; \lambda_i^{(k)}, \; \nu_i^{(k)}, \\ n_{ij}^{(kl)}, \; n_{ij}, \; N_{ii}^{(km)}, \; N_{ii} \end{array}\right| \qquad \begin{array}{r} (i, j = 1, \cdots, s'), \\ (k, m = 1, \cdots, p_i), \\ (l = 1, \cdots, p_j). \end{array}$$

Da das System e auf zwei beliebige Hauptreihen geregelt stets selbstisomorph ist, kann diese Zusammenstellung bei jeder Hauptreihe erfolgen. Man nehme nun eine Zahl x, deren charakteristische Gleichung gerade s verschiedene Wurzeln hat und bestimme nach S. 41 u. f. die Hauptreihe, wobei die zu x gehörende Zahl des Nichtquaternionsystems in lauter Teile geraden Charakters zerfällt. x selbst zerfällt dann in Teile, die jedes nur zu den Charakteren eines bestimmten ursprünglichen Systems des Hauptquadrats gehören. Ein solcher Teil der Charaktere ${}^{jk}_{ii}$ $j, k = 1, \cdots, p_i$ besteht aus einer Zusammensetzung der Haupteinheiten

$$e_{ii}^{(jk)} \qquad (j, k = 1, \cdots, p_i),$$

und einer Zusammensetzung der Nebeneinheiten der Charaktere

$${}^{jk}_{ii} \qquad (j, k = 1, \cdots, p_i).$$

Bestimmt man nun für die Zahl x die Funktion

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \xi_{ii}^{(11)} M - x & \xi_{ii}^{(12)} & \cdots \xi_{ii}^{(1p_i)} \\ \xi_{ii}^{(21)} & \xi_{ii}^{(22)} M - x & \\ \vdots & & \\ \xi_{ii}^{(p_i-1)} & & \xi_{ii}^{(p_i p_i)} M - x \end{vmatrix},$$

so enthält dieselbe jedenfalls keine Haupteinheiten der Charaktere ${}^{jk}_{ii}$ $(j,k=1,\cdots,p_i)$ mehr, da der Teil der Zahl x der Charaktere ${}^{jk}_{ii}$ $(j,k=1,\cdots,p_i)$ mit allen anderen Teilen multipliziert Null erzeugt, und also bei den Produktbildungen nur auf sich selbst wirkt.

Folglich enthält

$$\Delta_i^{\mu_i'}$$

überhaupt keine Einheiten der Charaktere ${}^{jk}_{ii}$ $(j,k=1,\cdots,p_i)$ mehr, woraus (wie auf S. 45) hervorgeht, daß

$$\prod_i^{1,\cdots,s} \Delta_i^{\mu_i'} = 0 \tag{47}$$

die charakteristische Gleichung der Zahl x ist.*) Die charakteristische Gleichung geht also aus derjenigen des Nichtquaternionsystems η:

$$\prod_i^{1,\cdots,s'} (\xi_{ii} M - x)^{\mu_i'}$$

dadurch hervor, daß man $\xi_{ii} M - x$ ersetzt durch die Determinante Δ_i. $\xi_{ii} M - x$ selbst erscheint bei dieser Betrachtung als die Determinante erster Ordnung, zu welcher Δ_i sich reduziert wenn $p_i = 1$.

Die erste Hauptgleichung enthält jedenfalls alle Faktoren Δ_i $(i=1,\cdots,s')$, und p_i-mal die Potenz des Faktors Δ_i gibt die Anzahl der Einheiten an, deren vorderer Charakter ${}^{j}_{i}$ $(j=1,\cdots,p_i)$ ist. Da für die Konstanten der Systeme e und η die Beziehungen Formel (35) gelten und:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_i^{(k)} &= \sum_l^{1,\cdots,p_j} \sum_j^{1,\cdots,s'} n_{ij}^{(kl)} + \sum_l^{1,\cdots,p_i} N_{ii}^{kl} = \sum_j^{1,\cdots,s'} p_j n_{ij}' + p_i, \\ \lambda_i &= p_i \lambda_i^{(k)} = \sum_j^{1,\cdots,s'} p_i p_j n_{ij} + p_i^2, \\ n &= \sum_i^{1,\cdots,s'} \sum_k^{1,\cdots,p_i} \lambda_i^{(k)} = \sum_{ij}^{1,\cdots,s'} \sum_k^{1,\cdots,p_i} \sum_l^{1,\cdots,p_j} n_{ij}^{(kl)} + \sum_i^{1,\cdots,s'} \sum_{kl}^{1,\cdots,p_i} N_{ii}^{(kl)} \\ &= \sum_{ij}^{1,\cdots,s'} p_i p_j n_{ij}' + \sum_i^{1,\cdots,s'} p_i^2 \end{aligned}\right. \tag{48}$$

*) Shaw, a. S. 2 a. O. S. 42.

ist diese Potenz also:

$$\frac{1}{p_i}\lambda_i = \sum_j^{1,\dots,s'} p_j n'_{ij} + p_i.$$

Die erste Hauptgleichung lautet demnach:

$$\text{(49a)} \qquad \prod_i^{1,\dots,s'} \Delta_i^{\sum_j^{1,\dots,s'} p_j n'_{ij} + p_i}$$

und analog die zweite:

$$\text{(49b)} \qquad \prod_i^{1,\dots,s'} \Delta_i^{\sum_j^{1,\dots,s'} p_j n'_{ji} + p_i} .$$

Die Faktoren Δ_i höheren als ersten Grades lassen sich*) zwar in Faktoren ersten Grades der Form:

$$(aM - x)$$

zerlegen, die Zahlen a können dann aber nicht mehr als lineare Funktionen der Koeffizienten von x dargestellt werden. Sie bilden die Lösung einer Gleichung p_i^{ten} Grades mit lauter verschiedenen Wurzeln. Ein Quaternionsystem unterscheidet sich also dadurch, daß seine charakteristische Gleichung einen oder mehrere Faktoren höheren als ersten Grades besitzt, die nicht weiter zerlegt werden können. Die Gleichungen der Systeme geben also nicht nur die für die Systeme charakteristischen Konstanten s, μ_i, λ_i, ν_i an, sondern bestimmen auch die Einteilung des Hauptquadrats in ursprüngliche Systeme.

VI. Die verborgenen Einheiten, und die Zurückführung aller Systeme auf das ursprüngliche.

Allgemeines. Die Betrachtungen in Abschnitt I bis IV haben ergeben, daß sich aus den Zahlen eines jeden Systems Haupteinheiten wählen lassen, die zusammen ein mehr oder weniger ursprüngliches System in Normalform, das Hauptquadrat, bilden. Dieses Quadrat erscheint als das feste Gerüst des Systems, um welches sich die Nebeneinheiten, ein invariantes nilpotentes Untersystem bildend, in freierer Weise gruppieren. Es liegt die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, auch die Nebeneinheiten, und somit das ganze System, in Beziehung zu setzen zu einem ursprünglichen System, um so zu erhöhter Einsicht in den Bau der Zahlensysteme zu gelangen.

*) Shaw, a. S. 2 a. O. S. 42; Cartan, a. S. 3 a. O. S. 54; Frobenius, a. S. 3 zweitang. O. S. 529.

Es ist hier gleich zu bemerken, daß es schon C. S. Peirce 1881*) gelang, die n Einheiten eines beliebigen Systems als lineare Funktionen der n^2 Einheiten eines ursprünglichen Systems n^{ter} Ordnung darzustellen. Es ist dies sogar auf zwei Weisen möglich. Sind die Einheiten des gegebenen Systems (mit Modul) $e_1, \cdots, e_n$, die Konstanten der Multiplikation γ_{ijk} $(i, j, k = 1, \cdots, n)$ (siehe S. 7), und die Einheiten des ursprünglichen Systems ε_{ij} $(i, j = 1, \cdots, n)$, so kann man entweder setzen:

(50)
$$e_i = \sum_{kj}^{1,\cdots,n} \gamma_{ijk}\varepsilon_{kj}$$

oder:

(51)
$$e_i = \sum_{jk}^{1,\cdots,n} \gamma_{jik}\varepsilon_{jk},$$

denn im ersten Falle ergibt sich unter Anwendung der Formel (4)

$$\begin{aligned} e_p e_q &= \left(\sum_{rt}^{1,\cdots,n} \gamma_{ptr}\varepsilon_{rt}\right)\left(\sum_{tu}^{1,\cdots,n} \gamma_{qut}\varepsilon_{tu}\right) \\ &= \sum_{rtu}^{1,\cdots,n} \gamma_{ptr}\gamma_{qut}\varepsilon_{ru} \\ &= \sum_{t}^{1,\cdots,n} \gamma_{pqt} \sum_{ru}^{1,\cdots,n} \gamma_{tur}\varepsilon_{ru} = \sum_{t}^{1,\cdots,n} \gamma_{pqt} e_t, \end{aligned}$$

und im zweiten Falle läßt sich ähnliches dartun. Jedes Zahlensystem mit Modul, und demnach jedes System (vgl. S. 41) ist also Untersystem eines ursprünglichen höchstens n^{ter} bez. $n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Einheiten dieses ursprünglichen Systems sind selbst keine Zahlen des untersuchten Systems und wir wollen sie daher „verborgene Einheiten" desselben nennen.

Es ist möglich daß ein ursprüngliches System niederer Ordnung zur Darstellung genügt, z. B., wenn so viele der Konstanten γ_{ijk} Null werden, daß sämtliche Einheiten ε_{ix} und ε_{xi} $(x = 1, \cdots, n)$ nicht verwendet werden, und demnach der ganze Charakter i ausfällt, oder, wenn nur so viele Einheiten ε zur Verwendung gelangen, daß das System ε in zwei oder mehrere verschiedene ursprüngliche Systeme zerfällt, die keine Einheiten gemeinsam haben. Letzterer Fall tritt immer auf, wenn ein ursprüngliches System selbst in der angegebenen Weise zur Darstellung gebracht werden soll. An dem System der Quaternionen (siehe S. 25) sei dies hier beispielsweise gezeigt. Es ist da

$$\gamma_{111} = \gamma_{122} = \gamma_{231} = \gamma_{242} = \gamma_{313} = \gamma_{324} = \gamma_{433} = \gamma_{444} = 1$$

*) a. S. 3 a. O.

und alle anderen Konstanten sind Null. Also ist nach der ersten Peirceschen Darstellungsweise (50):

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22},\\
e_2 &= \varepsilon_{12} + \varepsilon_{24},\\
e_3 &= \varepsilon_{31} + \varepsilon_{42},\\
e_4 &= \varepsilon_{33} + \varepsilon_{44}.
\end{aligned}
$$

Das System ε zerfällt also in zwei Systeme zweiter Ordnung, und es genügt eins dieser Systeme:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \varepsilon_{11},\\
e_2 &= \varepsilon_{12},\\
e_3 &= \varepsilon_{31},\\
e_4 &= \varepsilon_{33}.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun zunächst ein geregeltes System mit nur einer idempotenten Zahl zugleich Modul:

$$M = e_1.$$

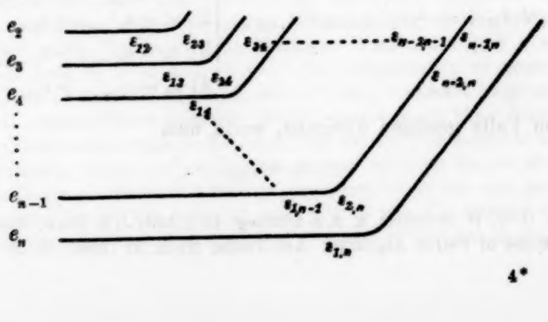
Für die Konstanten γ gilt dann:

$$
(52)\quad \begin{cases}
\text{Wenn } i = 1: & \gamma_{ijk} = 1 \quad \text{wenn} \quad j = k, \quad \text{sonst} = 0,\\
\quad\text{„} \quad j = 1: & \gamma_{ijk} = 1 \quad \text{„} \quad i = k, \quad \text{„} \quad = 0,\\
\quad\text{„} \quad i \neq 1,\, j \neq 1: & \gamma_{ijk} = 0 \quad \text{„} \quad k \leqq j \quad \text{oder} \quad k \leqq i.\\
\text{(Vgl. Formel (18) S. 20).}
\end{cases}
$$

Verwenden wir die zweite Darstellungsweise, so ist also

$$
(53)\quad \begin{cases}
e_n = \varepsilon_{1,n},\\
e_{n-1} = \varepsilon_{1,n-1} + \gamma_{2,n-1,n}\,\varepsilon_{2,n} + \cdots + \gamma_{n-1,n-1,n}\,\varepsilon_{n-1,n},\\
e_{n-2} = \varepsilon_{1,n-2} + \gamma_{2,n-2,n}\,\varepsilon_{2,n} + \cdots + \gamma_{n-1,n-2,n}\,\varepsilon_{n-1,n}\\
\qquad\qquad + \gamma_{2,n-2,n-1}\,\varepsilon_{2,n-1} + \cdots + \gamma_{n-2,n-2,n-1}\,\varepsilon_{n-2,n-1},\\
\quad\vdots\\
e_2 = \varepsilon_{12} + \text{usw.}\\
e_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \cdots + \varepsilon_{nn}.
\end{cases}
$$

Schreibt man die Einheiten:



so setzt sich jede Einheit nur zusammen aus denjenigen Einheiten ε, die sich rechts unten von der zu der betreffenden Einheit gehörigen Linie befinden. Für die nilpotenten Zahlen kommen überhaupt nur diejenigen Einheiten ε zur Verwendung, deren vorderer Charakter eine niedere Ordnungszahl hat als der hintere Charakter.

Ist das System von k^{tem} Grade und $k = n$, so gibt es jedenfalls eine Zahl, deren $(k-1)^{\text{te}}$ Potenz nicht verschwindet; diese Zahl und ihre nichtverschwindende Potenzen lassen sich offenbar als $e_2, \cdots, e_n$ wählen, und es gelten dann folgende Bedingungen für die Konstanten γ_{ijk}:

$$(54)\quad \begin{cases} \text{Wenn } i = 1: & \gamma_{ijk} = 1, \text{ wenn } j = k, \quad \text{sonst} = 0, \\ \text{„} \quad j = 1: & \gamma_{ijk} = 1, \text{ „ } \quad i = k, \quad \text{„} \quad = 0, \\ \text{„} \quad i \neq 1, j \neq 1: & \gamma_{ijk} = 1, \text{ „ } \quad i + j = k + 1, \quad \text{„} \quad = 0. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich folgende Darstellung der Einheiten e:

$$(55)\quad \begin{cases} e_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \cdots + \varepsilon_{n-1,n-1} + \varepsilon_{nn}, \\ e_2 = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \cdots + \varepsilon_{n-2,n-1} + \varepsilon_{n-1,n}, \\ e_3 = \varepsilon_{13} + \varepsilon_{24} + \cdots + \varepsilon_{n-2,n}, \\ \vdots \qquad \ddots \\ e_n = \qquad \varepsilon_{1n}. \end{cases}$$

Die Einheiten e erscheinen in diesem Falle als einfache Summen der Einheiten ε.

Ist $k = n - 1$, so gibt es für $n > 4$ vier Fälle:*)

$$\begin{matrix} M = e_1, \\ e_{i+2} = e_3^i, \\ e_2 e_3 = 0, \end{matrix} \qquad (i = 1, \cdots, n-2) \begin{cases} 1) & e_2^2 = 0, & e_3 e_2 = 0, \\ 2) & \quad = 0, & \quad = e_n, \\ 3) & \quad = e_n, & \quad = 0, \\ 4) & \quad = e_n, & \quad = e_n, \end{cases}$$

die sich z. B. folgendermaßen darstellen lassen:

$$\begin{matrix} e_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \cdots + \varepsilon_{nn}, \\ e_3 = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \cdots + \varepsilon_{n-3,n-2} + \varepsilon_{n-2,n}, \\ \vdots \\ e_n = \qquad \varepsilon_{1,n} \end{matrix} \qquad \begin{cases} 1) & e_2 = \varepsilon_{1,n-1}, \\ 2) & e_2 = \varepsilon_{1,n-1} + \varepsilon_{2,n}, \\ 3) & e_2 = \varepsilon_{1,n-1} + \varepsilon_{n-1,n}, \\ 4) & e_2 = \varepsilon_{1,n-1} + \varepsilon_{2,n} + \varepsilon_{n-1,n}. \end{cases}$$

Im zweiten Falle genügen übrigens, wenn man

$$e_2 = \varepsilon_{2,n}$$

*) S. z. B. G. W. Scheffers, a. S. 3 drittang. O. S. 330; J. B. Shaw, Standard forms of certain types of Peirce Algebras. Am. Journ. Math. 31 (1909), S. 45.

setzt, schon die Einheiten eines ursprünglichen Systems $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zur Darstellung. Für $n=4$ gibt es nur drei Fälle, 1), 3), und statt 2) und 4):

$$e_2 e_3 = 0, \quad e_2^2 = a e_n, \quad e_3 e_2 = e_n,$$

welche Formel, da a eine beliebige gewöhnliche Zahl $\neq 1$ ist, eine unendliche Anzahl verschiedener Systeme angibt. Diese Systeme lassen sich folgendermaßen in Einheiten ε angeben:

$$\begin{aligned} e_1 &= \varepsilon_{11} + \cdots + \varepsilon_{44}, \\ e_3 &= \varepsilon_{12} + \varepsilon_{24}, \\ e_4 &= \varepsilon_{14}, \\ e_2 &= \varepsilon_{24} + \varepsilon_{13} + a\varepsilon_{34}.\text{*)} \end{aligned}$$

Die Einheiten e erscheinen hier also nicht mehr als Einfachsummen von Einheiten ε, aber wohl als lineare Funktionen derselben.

Die Ordnungszahl ω des kleinsten ursprünglichen Systems, als dessen Untersystem ein nilpotentes System gedeutet werden kann, ist jedenfalls nicht kleiner als der Index k' des Systems (siehe S. 20), denn jede Einheit des Seite 51 angegebenen Dreiecks geht durch Multiplikation mit einer beliebigen Zahl in eine Zahl über, die entweder Null ist, oder sich nur aus Einheiten niederer Horizontalreihen zusammenstellt. Das Produkt von ω Zahlen ist also stets Null, und demnach

(56) $$\omega \geqq k' \geqq k.$$

Wenden wir uns jetzt der Betrachtung eines geregelten Nichtquaternionsystems zu. Die Untersysteme geraden Charakters lassen sich ein jedes darstellen als Untersysteme ursprünglicher Systeme $\omega_{ii}''^{\text{ter}}$ Ordnung $(i=1,\cdots,s)$ wo:

(57) $$k_{ii} \leqq k_{ii}' \leqq \omega_{ii}'' \leqq n_{ii} + 1.$$

---

*) Diese Fälle sind hier nur als Beispiel angegeben. Der Fall $k=n-2$ ist untersucht worden von G. W. Scheffers a. S. 8 drittang. O. S. 330 u. f., G. P. Starkweather, Non-quaternion number systems containing no skew units, Am. J. Math. 21 (1899), S. 369—386 und J. B. Shaw, a. S. 8 zweitang. O., a. S. 2 a. O. S. 52 und 101 und a. S. 52 a. O. Shaw hat ferner einige besondere Typen der Systeme mit $k < n-2$ behandelt, eine vollständige Klassifizierung dieser Systeme besteht aber zur Zeit nicht. Vgl. auch J. H. Maclagan Wedderburn a. S. 4 a. O. S. 109. Shaw schrieb 1909, a. S. 52 a. O. S. 45: „The determination of general laws for the relationship of numbers in an algebra of order r has not progressed very far, especially as regards Peirce algebras" (Peirce algebra nennt Shaw Systeme mit nur einer idempotenten Zahl, zugleich Modulus), und weiter: „the complete exhaustion of all the information which can possibly be obtained by using the law of associativity leaves nevertheless a number of arbitrary parameters which can only be removed by linear transformation of the units, if removable at all. The further determination of individual types becomes then somewhat a matter of personal choice."

Dabei zerfällt die Einheit e_{ii} in ω_{ii}'' Einheiten $\varepsilon_{i_j i_j}$ $(j=1,\cdots,\omega_{ii}'')$. Macht man das ursprüngliche System, das durch die $\sum\limits_i^{1,\cdots,s} \omega_{ii}'$ idempotenten Haupteinheiten bestimmt wird, vollständig, nimmt man also die nilpotenten Einheiten der Form

$$\varepsilon_{i_k j_l} \qquad (i \neq j)$$

hinzu, so werden im allgemeinen einige, aber nicht alle Einheiten e schiefen Charakters als Zahlen des so erhaltenen Systems aufgefaßt werden können. Um das ganze System e zu umfassen, muß das System ε vergrößert werden bis die Hauptreihe z. B.

$$\omega' = \sum_i^{1,\cdots,s} \omega_{ii}'$$

Einheiten enthält, wo

$$(58) \qquad \begin{cases} \omega_{ii}' \geqq \omega_{ii}'', \\ \sum\limits_i^{1,\cdots,s} \omega_{ii}' \leqq n \end{cases}$$

ist. ω_{ii}' ist die Anzahl der Einheiten der Hauptreihe des Systems ε, in welche die Einheit e_{ii} zerfällt. Eine solche Hauptreihe läßt sich im Systeme ε stets auffinden. Die Haupteinheiten des Systems erscheinen als Einfachsummen, die Nebeneinheiten als lineare Funktionen der Einheiten s. (Vgl. die Tabelle S. 56.)

Handelt es sich um ein Quaternionsystem e, so kann zunächst das zugehörige Nichtquaternionsystem η gedeutet werden als Untersystem eines ursprünglichen ω'^{ter} Ordnung. Sind dann die den Einheiten der Hauptreihe des Systems η zugeordneten ursprünglichen Systeme p_i^{ter} Ordnung $i=1,\cdots,s'$, so ist das System e offenbar sicher Untersystem eines Systems der Ordnung

$$\sum_i^{1,\cdots,s'} \omega_{ii}' p_i.$$

Diese Zahl ist aber kleiner als n, ein Quaternionsystem läßt sich also immer auf ein ursprüngliches System niederer als n^{ter} Ordnung zurückführen. Auch hier erscheinen die Haupteinheiten e, sowohl idempotente als nilpotente, als Einfachsummen der Einheiten s (vgl. die Tabelle S. 57).

Zurückführung nach den Peirceschen Formeln. Man kann, ungeachtet der Möglichkeit ein niederes umfassendes ursprüngliches System zu finden, die Peirceschen Formeln anwenden. Bei einem geregelten Nichtquaternionsystem $e_1,\cdots,e_n$ ist, wenn

$$e_a = e_{ii}$$

eine Einheit einer Hauptreihe ist,

$$\gamma_{abc} = 1$$

wenn $b = c$ und e_b vom Charakter ix $(k = 1, \cdots, s)$ ist. In allen anderen Fällen ist $\gamma_{ab\sigma}$ gleich Null. Ähnliches gilt für γ_{bac}. In der ersten Darstellungsweise (siehe S. 50) stellt sich also e_{ii} dar als die einfache Summe von soviel idempotenten Haupteinheiten des Systems ε, als es Einheiten des Charakters ix $(x = 1, \cdots, s)$ im System e gibt. (Nach Abschnitt V ist diese Anzahl λ_i gleich der Potenz des i^{ten} Faktors der ersten Hauptgleichung.) Wir setzen also:

$$e_{ii} = \sum_{j}^{1, \cdots, \lambda_i} \varepsilon_{i_j i_j}. \tag{59}$$

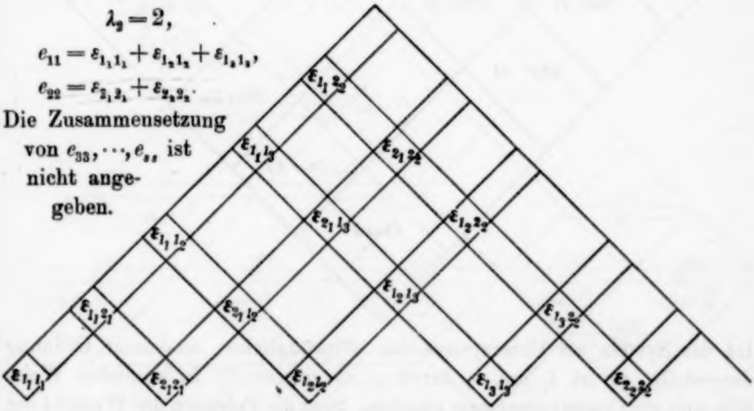
Die Nebeneinheiten des Systems e formen zusammen ein geregeltes nilpotentes System, sie leiten sich demnach ab aus der Hälfte der Einheiten:

$$\varepsilon_{i_k j_l} \qquad \begin{matrix} (i, j = 1, \cdots, s), \\ \left.\begin{matrix} (k = 1, \cdots, \lambda_i) \\ (l = 1, \cdots, \lambda_j) \end{matrix}\right\} (k \neq l \text{ wenn } i = j). \end{matrix}$$

Dieselben können so geordnet werden, daß die Ordnungszahl des hinteren Charakters immer höher ist als die des vorderen, und lassen sich dann in Form eines Dreiecks anschreiben.

Z. B.: $\lambda_1 = 3$,
$\lambda_2 = 2$,
$e_{11} = \varepsilon_{1_1 1_1} + \varepsilon_{1_2 1_2} + \varepsilon_{1_3 1_3}$,
$e_{22} = \varepsilon_{2_1 2_1} + \varepsilon_{2_2 2_2}$.

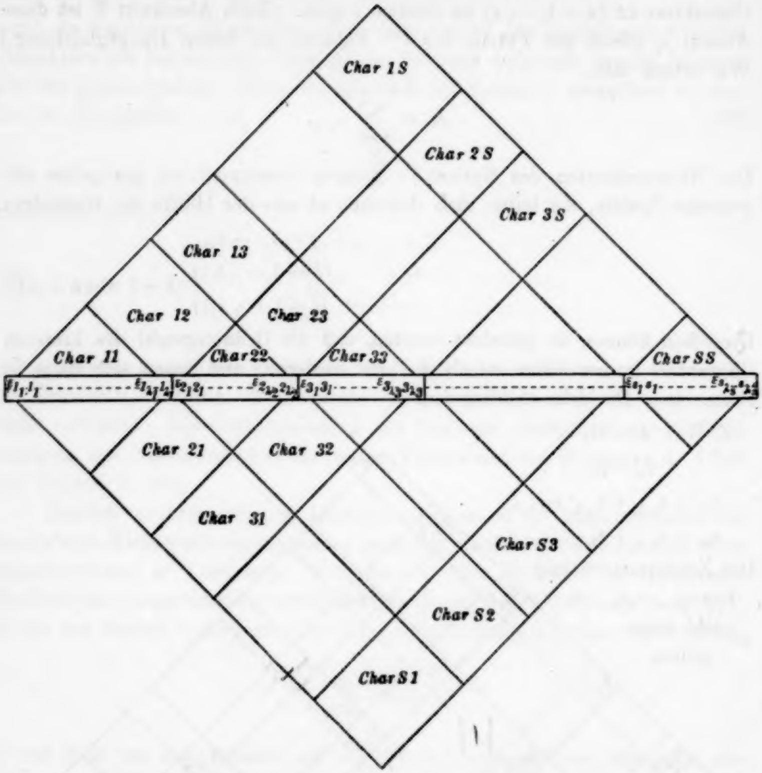
Die Zusammensetzung von $e_{33}, \cdots, e_{ss}$ ist nicht angegeben.



In der Hauptreihe, die die Basis des Dreiecks ausmacht, erscheinen die λ_i zu e_{ii} gehörigen Einheiten $\varepsilon^i{}_{j i_j}$ $(j = 1, \cdots, \lambda_i)$ zerstreut.

Eine andere Weise der Darstellung ist einfacher. Nimmt man für jedes i die Einheiten $\varepsilon_{i_j i_j}$ $(j = 1, \cdots, \lambda_i)$ zusammen, so befinden sich die verwendbaren Einheiten des Systems ε jetzt über das ganze Quadrat ver-

breitet, das Quadrat läßt sich aber den Charakteren des Systems e gemäß in Unterquadrate zerteilen. Jedes Unterquadrat enthält die Einheiten ε, die zur Zusammenstellung der Zahlen eines bestimmten Charakters in e benötigt sind. Bei Anwendung der zweiten Peirceschen Formel (siehe S. 50) besteht die Hauptreihe des Systems aus Gruppen zu ν_i $(i=1,\cdots,s)$ Zahlen, wo ν_i die Zahl der Einheiten des Charakters ki $(k=1,\cdots,s)$.



Ist das System als Untersystem des ursprünglichen niederster Ordnung dargestellt, so ist λ_i bez. ν_i durch ω_i zu ersetzen.*) In ähnlicher Weise läßt sich ein Quaternionsystem angeben. Sind die Potenzen der Wurzeln der ersten Hauptgleichung des zugehörigen Nichtquaternionsystems λ_i' $(i=1,\cdots,s')$ und die Ordnungszahlen der zugeordneten ursprünglichen Systeme p_i $(i=1,\cdots,s')$,

*) Eine natürliche Klassifizierung der Systeme wäre die nach den Ordnungszahlen der kleinsten umfassenden ursprünglichen Systeme. Diesbezügliche Untersuchungen, die besonders für die nilpotenten Systeme interessant wären, fehlen bis jetzt.

so nimmt man ein ursprüngliches System $\sum\limits_i^{1,\cdots,s'} \lambda_i' p_i^{\text{ter}}$ Ordnung, und teilt die Hauptreihe wie folgt ein:

$$\varepsilon^{(jj)}_{i_k i_k} \qquad \begin{array}{r}(i=1,\cdots,s'),\\ (j=1,\cdots,p_i),\\ (k=1,\cdots,\lambda_i').\end{array}$$

Die Haupteinheiten erscheinen dann als Einfachsummen der Einheiten ε.

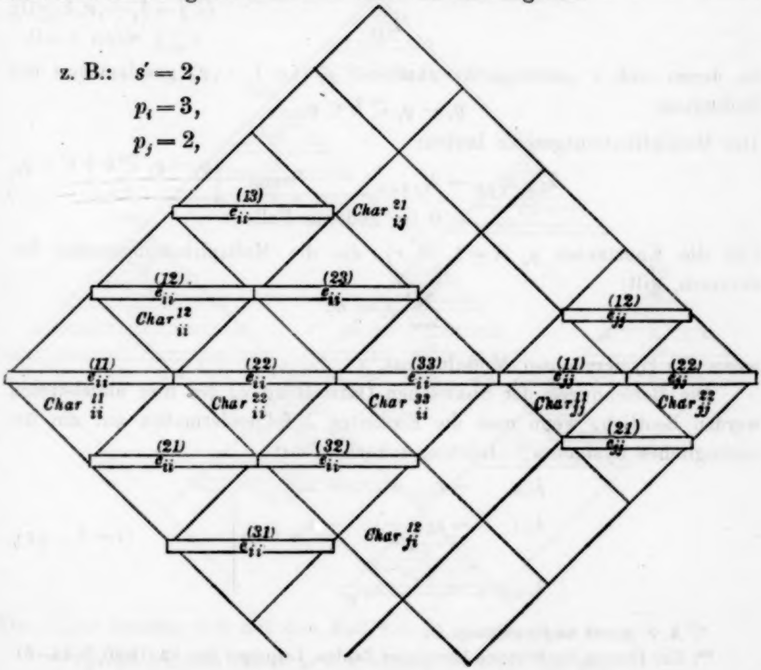
$$(60)\qquad \begin{cases} e^{(jj)}_{ii} = \sum\limits_k^{1,\cdots,\lambda_i'} \varepsilon^{(jj)}_{i_k i_k}, \\ e^{(jl)}_{ii} = \sum\limits_k^{1,\cdots,\lambda_i'} \varepsilon^{(jl)}_{i_k i_k}, \end{cases}$$

und die Nebeneinheiten des Charakters $\frac{kl}{ij}$ sind lineare Funktionen der Einheiten:

$$\varepsilon^{(kl)}_{i_r j_s} \qquad \begin{array}{r}(k,l=1,\cdots,s'),\\ (r=1,\cdots,\lambda_i'),\\ (s=1,\cdots,\lambda_j').\end{array}$$

Dies läßt sich folgendermaßen in einer Tabelle angeben:

z. B.: $s'=2$,
$p_i=3$,
$p_j=2$,



Zu der Tabelle ist zu bemerken, daß die durch ein Rechteck mit senkrechten und wagerechten Seiten eingerahmten Einheiten zusammen als Einfachsumme eine Haupteinheit des Systems e bilden, und die Nebeneinheiten e irgend eines Charakters sich als lineare Funktionen der Einheiten ε innerhalb des zugehörigen schiefstehenden Rechtecks darstellen lassen (vgl. S. 54).

Beziehungen zu den verborgenen Einheiten Shaws. Verborgene Einheiten sind zuerst 1903, aber in anderer Form, eingeführt von J. B. Shaw.*) Zwar hatte schon F. Hausdorff 1900**) bemerkt, daß es zu einem jeglichen System ein bestimmtes „Indexsystem" gibt, dessen Einheiten zwischen n und n^2 an der Zahl sind, die Einheiten dieses Indexsystems sind aber keine verborgene, da sie im System selbst vorkommen, und ihre Unabhängigkeit ist eine uneigentliche.

Shaw ging aus von der ersten Peirceschen Darstellung eines Systems als Untersystem eines ursprünglichen n^{ter} Ordnung. Ziemlich weitgehende Erörterungen, die alle in das Gebiet der Matrizenrechnung fallen, führten ihn dann zu dem Satze, daß die Zahlen eines jeglichen Systems sich darstellen lassen als lineare Funktionen der Einheiten

$$\lambda_{ijk} \qquad \begin{array}{l}(i, j = 1, \cdots, r,\ k \geqq 0),\\ i \geqq j, \text{ wenn } k = 0,\end{array}$$

zu denen sich r „multiplicity numbers" ϱ_i $(i = 1, \cdots, r)$ gesellen mit der Bedingung:

$$\varrho_i - \varrho_j \gtreqqless k < \varrho_i.$$

Die Multiplikationsgesetze lauten:

$$\begin{aligned}\lambda_{ijk}\,\lambda_{i'j'k'} &= \lambda_{ij'k+k'} \qquad \text{wenn} \quad \begin{cases}\varrho_i - \varrho_i' \gtreqqless k + k' < \varrho_i,\\ j = i'\end{cases}\\ &= 0 \text{ im anderen Falle.}\end{aligned}$$

Für die Konstanten ϱ_i $(i = 1, \cdots, r)$, die die Multiplikationsgesetze bestimmen, gilt:

$$\sum_i^{1,\cdots,r} \varrho_i = n,$$

wenn das System einen Modulus hat.

Die Beziehungen der Shawschen Darstellung zu der hier abgeleiteten werden deutlich, wenn man die Einheiten λ folgendermaßen auf ein ursprüngliches System n^{ter} Ordnung ε zurückführt:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{ii0} &= \varepsilon_{i_1 i_1} + \cdots + \varepsilon_{i_{\varrho_i} i_{\varrho_i}}\\ \lambda_{ii1} &= \varepsilon_{i_1 i_2} + \cdots + \varepsilon_{i_{\varrho_i - 1} i_{\varrho_i}}\\ &\ \vdots \qquad \ddots \qquad \cdot^{\cdot^{\cdot}}\\ \lambda_{ii,\varrho_i - 1} &= \qquad \varepsilon_{i_1 i_{\varrho_i}}\end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, \cdots, r),$$

*) A. S. 3 erst und zweitang. O.

**) Zur Theorie der Systeme komplexer Zahlen, Leipziger Ber. 52 (1900), S. 43—61.

$$\varrho_i > \varrho_j: \quad \begin{aligned} \lambda_{ij,\varrho_i-\varrho_j} &= \varepsilon_{i_1 j_1} + \cdots + \varepsilon_{i_{\varrho_j} j_{\varrho_j}}, \\ &\vdots \\ \lambda_{ijk} &= \varepsilon_{i_1 j_{1+k-\varrho_i+\varrho_j}} + \cdots + \varepsilon_{i_{\varrho_j-k} j_{\varrho_j}}, \\ &\vdots \\ \lambda_{ij,\varrho_i-1} &= \varepsilon_{i_1 j_{\varrho_j}} \end{aligned}$$

$$\varrho_i < \varrho_j: \quad \begin{aligned} \lambda_{ij0} &= \varepsilon_{i_1 j_{\varrho_j-\varrho_i+1}} + \cdots + \varepsilon_{i_{\varrho_i} j_{\varrho_j}}, \\ &\vdots \\ \lambda_{ijk} &= \varepsilon_{i_1 j_{1+k-\varrho_i+\varrho_j}} + \cdots + \varepsilon_{i_{\varrho_i-k} j_{\varrho_j}}, \\ &\vdots \\ \lambda_{ij,\varrho_i-1} &= \varepsilon_{i_1 j_{\varrho_j}} \end{aligned}$$

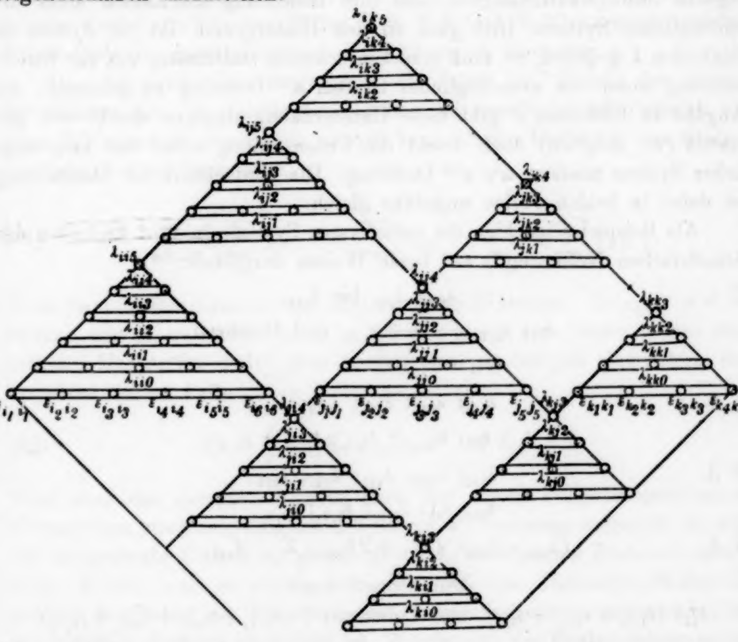
oder allgemein:

$$\lambda_{ijk} = \varepsilon_{i_1 j_{1+k-\varrho_i+\varrho_j}} + \cdots + \varepsilon_{i_{\varrho_j-k} j_{\varrho_j}}, \qquad i,j = 1,\cdots,r$$

$$k = 0,\cdots,\varrho_i-1 \quad \text{für } \varrho_i > \varrho_j$$

$$= \varrho_i-\varrho_j,\cdots,\varrho_i-1 \quad \text{„} \quad \varrho_i < \varrho_j$$

Die Zusammenstellung der Einheiten λ aus den Einheiten ε ist demnach folgendermaßen darzustellen:



Die Figur bezieht sich auf den Fall $r = 3$, $\varrho_i = 6$, $\varrho_j = 5$, $\varrho_k = 4$.*)

*) Vgl. die Tabellen Shaws, a. S. 3, erstang. O. S. 262 und 264.

Die Einteilung der Hauptreihe nach Shaw ist eine andere als die gewöhnliche in s Haupteinheiten. Jede idempotente Haupteinheit der betreffenden Hauptreihe erscheint in der Shawschen Darstellung als eine Einheit λ_{ii0} oder als eine Einfachsumme solcher Einheiten. Da jedes λ_{ii0} nur in einer Einheit der betreffenden Hauptreihe auftreten kann, ist:

$$r \geq s.$$

Die Shawsche Darstellung geht also weiter als bis zur bloßen Verteilung des Systems nach seinen Charakteren, letztere werden wieder unterteilt bis das System sich in der angegebenen Weise aus Gruppen von Einheiten ε ableiten läßt, die in einfacher Beziehung zu den Potenzreihen geraden Charakters stehen. Dabei ergibt sich dann eine sehr elegante Darstellung verschiedener Eigenschaften der Matrizenrechnung. Greift so die Shawsche Methode einerseits über das Gebiet der Zahlensysteme hinaus und in die Matrizenrechnung hinein, so entfernt sie sich andererseits von der Deutung der Systeme als Untersysteme ursprünglicher. Die Einheiten λ sind zwar auf die Einheiten ε zurückzuführen, sie erhalten aber ihre eigenen Multiplikationsregeln, und ihre Bedeutung als Zahlen eines ursprünglichen Systems tritt ganz in den Hintergrund. Ist ein System in Einheiten λ gegeben, so muß eine Umrechnung stattfinden, um zur Unterordnung unter ein ursprüngliches System n^{ter} Ordnung zu gelangen, die Angabe in Einheiten ε gibt diese Unterordnung dagegen direkt und gestattet (wo möglich) auch direkt die Unterordnung unter ein ursprüngliches System niederer als n^{ter} Ordnung. Die Einfachheit der Darstellung ist dabei in beiden Fällen ungefähr gleich.

Als Beispiel seien hier die zehn ersten Systeme in fünf Einheiten der Schefferschen Notierung*) auf beide Weisen dargestellt:**)

V 1.
$$\lambda_{110};\ \lambda_{111} \text{ bis } \lambda_{114},$$
$$\varepsilon_{11};\ \varepsilon_{1_1 1_2} + \cdots + \varepsilon_{1_4 1_5} \text{ und Potenzen,}$$
$$(\varepsilon_{11} = \varepsilon_{1_1 1_1} + \cdots + \varepsilon_{1_5 1_5}).$$

V 2.
$$\lambda_{110};\ \lambda_{220};\ \lambda_{111};\ \lambda_{112};\ \lambda_{122},$$
$$\varepsilon_{11};\ \varepsilon_{22};\ \varepsilon_{1_1 1_2} + \varepsilon_{1_2 1_3};\ \varepsilon_{1_1 1_3} + \varepsilon_{1_1 2}.$$

V 3.
$$\lambda_{110};\ \lambda_{220};\ \lambda_{111};\ \lambda_{221};\ \lambda_{210},$$
$$\varepsilon_{11};\ \varepsilon_{22};\ \varepsilon_{1_1 1_2};\ \varepsilon_{2_1 2_2};\ \varepsilon_{2_1 1_2}.$$

V 4.
$$(\lambda_{110} + \lambda_{220});\ (\lambda_{111} + 2\lambda_{123});\ \lambda_{112};\ \lambda_{113},$$
$$(\lambda_{210} + \lambda_{123} - \lambda_{112}),$$
$$\varepsilon_{11};\ (\varepsilon_{1_1 1_2} + \varepsilon_{1_2 1_3} + \varepsilon_{1_3 1_4}) \text{ und Potenzen; } (-\varepsilon_{1_1 1_3} + \varepsilon_{1_2 1_4} + \varepsilon_{1_1 1_4} + \varepsilon_{1_4 1_5}).$$

*) G. W. Scheffers, a. S. 3 drittang. O. S. 355.

**) J. B. Shaw, a. S. 3 erstang. O. S. 285.

V 5. $(\lambda_{110}+\lambda_{220})$; λ_{111} bis λ_{113}; $(\lambda_{210}+\lambda_{123})$,
ε_{11}; $(\varepsilon_{1_1 1_2}+\varepsilon_{1_2 1_3}+\varepsilon_{1_3 1_4})$ und Potenzen; $(\varepsilon_{1_1 1_4}+\varepsilon_{1_4 1_4})$.

V 6. $(\lambda_{110}+\lambda_{220})$; $(\lambda_{111}+2\lambda_{123})$; λ_{112}; λ_{113}; λ_{211},
ε_{11}; $(\varepsilon_{1_1 1_2}+\varepsilon_{1_2 1_3}+\varepsilon_{1_3 1_4})$ und Potenzen; $2\varepsilon_{1_1 1_4}$.

V 7. $(\lambda_{110}+\lambda_{220})$; λ_{111} bis λ_{113}; λ_{210},
ε_{11}; $(\varepsilon_{1_1 1_2}+\varepsilon_{1_2 1_3}+\varepsilon_{1_3 1_4})$ und Potenzen; $\varepsilon_{1_1 1_4}$.

V 8. λ_{110}; λ_{220}; λ_{330}; λ_{310}; λ_{320},
ε_{11}; ε_{22}; ε_{33}; ε_{31}; ε_{32}.

V 9. λ_{110}; λ_{220}; λ_{330}; λ_{210}; λ_{320},
ε_{11}; ε_{22}; ε_{33}; ε_{21}; ε_{32}.

V 10. λ_{110}; λ_{220}; λ_{221}; λ_{211}; λ_{210},
ε_{11}; ε_{22}: $\varepsilon_{2_1 2_2}$; $\varepsilon_{2_1 1}$; $\varepsilon_{2_2 1}$.

Wie ersichtlich, genügt in den Fällen V 2, V 3, V 6 ein ursprüngliches System vierter, und in den Fällen V 8, V 9 und V 10 sogar ein solches dritter Ordnung zur Darstellung des Systems in Einheiten ε.

Die Skalarfunktion Tabers. H. Taber hat 1904*) den Begriff des Skalars aus der Quaternionentheorie so erweitert, daß derselbe auf jedes Zahlensystem angewandt werden kann. Seine Definition des Skalars der Zahl x eines Systems $e_1, \cdots, e_n$ ist:

$$(61)\qquad Sx = \frac{1}{n}\left(\xi_1 \sum_j^{1,\cdots,n} \gamma_{1jj} + \xi_2 \sum_j^{1,\cdots,n} \gamma_{2jj} + \cdots + \xi_n \sum_j^{1,\cdots,n} \gamma_{njj}\right).$$

Diese Zahl bleibt invariant bei Änderung der Einheiten. Bringen wir das System erst in geregelte Form, so ist γ_{ijj} gleich eins, wenn e_i eine Einheit der Hauptreihe und e_j eine Einheit des zugehörigen Charakters, und in jedem andern Falle gleich Null. Es ist also:

$$(62)\qquad Sx = \frac{1}{n}(\xi_{11}\lambda_1 + \xi_{22}\lambda_2 + \cdots + \xi_{nn}\lambda_n).$$

Wird aber das geregelte System nach der ersten Darstellungsweise als Untersystem eines ursprünglichen Systems n^{ter} Ordnung aufgefaßt, so wird die idempotente Einheit e_{ii} gerade durch λ_i idempotente Einheiten ersetzt (siehe S. 55), und es ergibt sich also, daß der Tabersche Skalar der *mittlere Koeffizient* der Einheiten der Hauptreihe dieses umfassenden ursprünglichen Systems einer Zahl ist. Würde man den Skalar definieren als:

*) a. S. 3 a. O.

(63) $$Sx = \frac{1}{n}\sum_{ij}^{1,\cdots,n} \xi_i \gamma_{jij}$$

so ergäbe sich dieselbe Beziehung zur zweiten Peirceschen Darstellungsweise.

Die Einheiten eines jeden ursprünglichen Systems n^{ter} Ordnung lassen sich aber auch so wählen, daß eine derselben der Modul ist, und die $n^2 - 1$ anderen n^{te} Wurzeln des Moduls. Für n ungerade werden diese Einheiten

$$e^{(ab)} \qquad (a, b = 1, \cdots, n)$$

gefunden vermittelst der Transformationsformeln:

(64) $$\begin{cases} e^{(ab)} = x^a y^b, \\ x = \sum\limits_i^{1,\cdots,n} \omega^i e_{ii}, \qquad y = e_{12} + e_{23} + \cdots + e_{n-1,n} + e_{n,1}, \\ yx = \omega xy, \qquad x^n = y^n = (x^a y^b)^n = M, \qquad (a, b = 1, \cdots, n), \\ \omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}.\ ^{*)} \end{cases}$$

Der Modul ist:

(65) $$M = e^{(nn)} = \sum_i^{1,\cdots,n} e_{ii}$$

und der Tabersche Skalar erscheint hier als *Koeffizient* des Moduls. Aus dieser Deutung geht dann unmittelbar die Haupteigenschaft dieses Skalars hervor:

(66) $$S(xy) = S(yx),$$

das Gesetz der *skalaren Multiplikation* für ein beliebiges Zahlensystem.

Beziehungen des ursprünglichen Systems zu den Systemen der Praxis. Die von Peirce zuerst entdeckte Eigenschaft der Unterordnung eines jeglichen Systems unter ein ursprüngliches System höchstens n^{ter} Ordnung, hat sich näher dahin präzisiert, daß die Haupteinheiten des Systems sich als Einfachsummen, die Nebeneinheiten aber nur als lineare Funktionen der Einheiten des übergeordneten ursprünglichen Systems darstellen lassen. In bezug auf die Haupteinheiten erscheint also jedes System als ein „ineinander geschobenes" ursprüngliches, in bezug auf die Nebeneinheiten als ein transformiertes ursprüngliches, bei welchem nach der Transformation verschiedene Einheiten, die nicht in Produkten der anderen auftreten, und unter welchen sich Einheiten der Hauptreihe befinden,

---

*) Vgl. z. B. J. B. Shaw, a. S. 2 a. O. S. 98; die dort angegebenen Formeln gelten nicht für ein gerades n.

fortgelassen sind, wodurch eine Rücktransformation unmöglich gemacht ist. Da überdies jedes ursprüngliche System alle ursprünglichen Systeme niederer Ordnung in sich enthält, gibt es, so betrachtet, überhaupt *nur ein assoziatives System*, das eine ursprüngliche System beliebig hoher Ordnung.

Diese Weise, die Zahlensysteme zu betrachten, ermöglicht uns die Beantwortung der Frage, warum von den sehr vielen verschiedenen Systemen, die bisher abgeleitet worden sind, nur wenige praktisch gebraucht werden. Es hat sich doch gezeigt, daß, wie hohe Erwartungen manche auch hatten über die rechnerische Anwendbarkeit der höheren Zahlensysteme, es, abgesehen von einigen Anwendungen in verwandten Teilen der Mathematik, die z. B. in der Gruppentheorie, nur einige wenige Systeme sind, die in der Praxis, d. h. in erster Linie in Geometrie, theoretischer Mechanik und Physik, zur wirklichen Anwendung gekommen sind.

Wenn man nun aber in Betracht zieht, daß in diesen theoretischen Wissenschaften zunächst Fragen allgemeiner Natur vorliegen, die sich meist auf symmetrische und nicht künstlich oder durch Zufall eingegeschränkte mehrdimensionale Gebiete beziehen, so ist es von vornherein deutlich, daß es namentlich die ursprünglichen Systeme und deren allereinfachste symmetrische Untersysteme (das sind also die reduzibeln Systeme die nur aus einer Hauptreihe bestehen) sind, die für das praktische Rechnen in Betracht kommen werden. Denn jedes andere System ist nur ein Teil eines ursprünglichen Systems, bringt nur einen Teil der Eigenschaften desselben zum Ausdruck, und würde dadurch, ausgenommen im Falle der erwähnten einfachen Untersysteme, nur zu Asymmetrien in den Formeln und Undurchsichtigkeit derselben führen, was den Vorteil weniger Einheiten ganz illusorisch machen würde.

Tatsächlich sind nun auch die praktisch gebrauchten Systeme fast alle der angegebenen Art. So sind z. B. die Quaternionen, von denen sich die Vektoranalysis vom Standpunkte dieser Untersuchung nur unwesentlich unterscheidet, die Gibbsschen Dyaden oder Nonionen von Sylvester*) und die Quadriquaternionen von Combebiac**) oder Sedenionen von Sylvester***) ursprüngliche Systeme zweiter bez. dritter und vierter Ord-

---

*) J. J. Sylvester, Sur les quantités formants une groupe de nonions analogue aux quaternions de Hamilton. Compt. Rend. 97 (1883), S. 1336—1340 (1898), S. 273—276, 471—475.

**) G. Combebiac, Calcul des triquaternions (nouvelle analyse geometrique). (Thèse) Paris 1902.

***) On quaternions, nonions, sedenions, etc. John Hopkins University Circular 3 1883), S. 4—28.

nung. Die gewöhnlichen komplexen Zahlen stellen eine transformierte Hauptreihe mit zwei Einheiten dar, und die Biquaternionen Hamiltons sowie die Biquaternionen von Clifford*) für den elliptischen Raum sind Transformationen des Produktes eines ursprünglichen Systems zweiter Ordnung mit einer Hauptreihe mit zwei Einheiten. Am. S. 4 a. O. hat der Verfasser gezeigt, daß der bei Drehung invarianten Analysis der geometrischen Größen bis zur ersten, zweiten, ..., n^{ten} Ordnung in einem Punkt in drei Dimensionen ein ursprüngliches assoziatives System zweiter, dritter, ..., $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung zugrunde liegt. Enthält das Anwendungsgebiet irgend eine notwendige Asymmetrie oder unterliegt dasselbe einer im Wesen der Sache begründeten Beschränkung, so treten auch andere Systeme auf. So gehen die Biquaternionen Cliffords bei Anwendung auf den Euklidischen dreidimensionalen Raum, wo die (metrische) Symmetrie zwischen Punkt und Ebene, die im elliptischen Raum besteht, nicht mehr vorhanden ist, in ein System über, das dem Produkt eines ursprünglichen Systems zweiter Ordnung mit

$$\begin{array}{c|cc|} & e_1 & e_2 \\ \cline{2-3} e_1 & e_1 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

gleich ist.**) Letzteres System, das aus einer idempotenten Zahl, zugleich Modulus, und einer nilpotenten Zahl besteht, wurde auch von Scheffers***) verwendet in seinen interessanten Untersuchungen über die Äquitangentialkurven in der Ebene, welche Anwendung mit der Cayleyschen eine innere Gemeinschaft aufweist. Untersucht man nämlich die den Äquitangentialkurven entsprechenden Kurven auf einer Kugelfläche, so zeigt sich, daß dieselben in einer ähnlichen Beziehung stehen zu der als System aufgefaßten Hauptreihe mit zwei Einheiten. Die Triquaternionen Combebiacs†), die dem Produkt zweier Quaternionsysteme, in deren einem die eine der nilpotenten Haupteinheiten fortgelassen ist, gleich sind, finden ebenfalls auf dem Euklidischen dreidimensionalen Raum Anwendung, wodurch sich ihre Asymmetrie erklärt.

Aus diesen Beispielen ist ersichtlich, wie die Analysen der Praxis sich unmittelbar aus den ursprünglichen Systemen und deren Hauptreihen ableiten. Es scheint demnach, als ob die Theorie der assoziativen

*) W. K. Clifford, Preliminary sketch on biquaternions. Proc. Lond. Math. Soc. 4 (1873), S. 381—395; Further note on biquaternions. Coll. Math. Papers S. 385, 395 (1876).

**) W. K. Clifford, a. a. O.

***) G. W. Scheffers, Isogonalkurven, Äquitangentialkurven, und komplexe Zahlen. Math. Ann. 60 (1905), S. 491—531.

†) G. Combebiac a. S. 63 a. O.

Systeme der Praxis schon alles übergeben hätte, was überhaupt zu übergeben ist. Als Hauptaufgaben erscheinen dann, zunächst, das Erhaltene so in seinen Formulierungen zu gestalten, daß dasselbe sich vollständig dem Stoffe anpaßt, und ferner, die verschiedenen Rechnungsarten der Praxis in solcher Weise mit Hilfe eines einzigen Prinzips abzuleiten, daß dieselben als Teile eines einheitlichen Ganzen, und nicht, wie bisher oft, als Ausdrucksweisen sich feindlich gegenüber stehender Anschauungen dastehen. Insbesondere wird die Zerlegung der totalen Multiplikation in Teilmultiplikationen, die den Übergang der Quaternionenrechnung zur Vektoranalysis herbeiführte und sich als ein mächtiges Hifsmittel der praktischen Rechnung bewährt hat, auch bei den ursprünglichen Systemen höherer Ordnung durchzuführen sein. Es mag hierdurch vielleicht gelingen wiederum neue Gebiete der Mechanik und Physik der *direkten* Rechnung zugänglich zu machen.

Dazu gesellen sich dann noch eine naheliegende und eine weitere Forderung. Die Systeme der Graßmanschen Ausdehnungslehre, dieser großartigsten aller Anwendungen von höheren Zahlen auf geometrische Aufgaben, sind bekanntlich, so lange man die progressive und regressive Multiplikation als verschieden betrachtet, nicht geschlossen (siehe S. 7) Betrachtet man diese Multiplikationen als identisch, so werden sie geschlossen, verlieren aber die Eigenschaft der Assoziativität. Sie lassen sich also nicht ohne weiteres dem Hierbehandelten einfügen. Von E. B. Wilson wurde 1904*) die Forderung aufgestellt, die bisher nicht geklärten Beziehungen zwischen assoziativer Algebra und Ausdehnungslehre aufzudecken, und die Anschauungsweisen beider Gebiete zusammenzufassen. Er schreibt: „evidently the multiple algebra of to-day, if it would be complete, must treat both sides of the matter“. Diese Forderung wäre nach obigem in dem Sinne aufzufassen, daß es gilt die Beziehungen zwischen der Ausdehnungslehre und dem assoziativen ursprünglichen System aufzufinden.**) Eine Untersuchung der nicht-assoziativen Systeme fehlt bis jetzt, nur Maclagan Wedderburn gibt einen Ansatz zu einer solchen***). Sie treten

---

*) On products in additive fields. Verh. des dritten int. Math. Kongr. Heidelberg 1904, S. 202.

**) Die Beantwortung der erwähnten Fragen, unter Zugrundelegung des Prinzips der Klassifizierung geometrischer Größen von F. Klein, findet sich in der S. 4 zitierten Arbeit des Verfassers. Es wird dort gezeigt, wie bei Anwendung dieses Prinzips zu jeder genau definierten Klasse von geometrischen Größen sofort das zugehörige Zahlensystem gefunden werden kann, und auch, daß sämtliche zurzeit verwendeten Analysen erster Ordnung, die Ausdehnungslehre einbegriffen, Teile sind des sich in dieser Weise als die allgemeinste bei Drehung invariante Analysis der geometrischen Größen bis zur ersten Ordnung ergebenden assoziativen Systems.

***) a. S. 4 a. O. S. 110.

aber außer in der Ausdehnungslehre in den ursprünglichen Systemen auf, sobald sich die Unterscheidung zwischen Skalar- und Vektorteil eines Produktes zur Unterscheidung von verschiedenen Multiplikationsweisen entwickelt. Wilson bemerkt in der schon oben zitierten Arbeit, daß: „the restriction of association cannot always be imposed upon the algebras with which it is convenient to work: witness, the various vector algebras in current use among physicists.“ Es tritt also die weitere Forderung einer Untersuchung der nicht-assoziativen Systeme auf, wobei möglicherweise neue Zahlensysteme der praktischen Rechnung zugeführt werden können.

Über eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen.

Von

Otto Haupt in Karlsruhe i/B.

Einleitung.

Ist eine gewöhnliche Differentialgleichung gegeben, welche einen Parameter enthält, und schreibt man für die Lösungen in den Endpunkten eines Intervalls a, b Bedingungen vor, die nur für gewisse, die sogenannten *ausgezeichneten Werte des Parameters* erfüllt werden können, so wird hierdurch eine *Randwertaufgabe* definiert. Wir nehmen an, es existieren ausgezeichnete Parameterwerte, denen *ausgezeichnete Lösungen* der Differentialgleichung zugehören, und es lassen sich überdies nach einem bestimmten Gesetze die ausgezeichneten Parameterwerte charakterisieren durch die Nullstellenzahl der zugehörigen ausgezeichneten Lösungen im Intervall a, b, d. h. durch die sogenannten Oszillationszahlen: dann bezeichnet man dieses Gesetz, nach *Klein*, als ein *Oszillationstheorem*. Ein solches schließt also stets auch ein Existenztheorem in sich und liefert eine Regel, nach der die sämtlichen ausgezeichneten Parameterwerte sich ordnen lassen.

Zweck der folgenden Zeilen ist es, eine Methode — sie läßt sich als eine Kontinuitätsmethode bezeichnen — zur Gewinnung von Oszillationstheoremen darzulegen*). Bei ihrer Anwendung hat man in erster Linie festzustellen, in welcher Weise sich ausgezeichnete Parameterwerte und Oszillationszahlen ändern, sobald man die Koeffizienten der Differentialgleichung oder die Randbedingungen oder beide in gewisser Weise variiert. Lassen sich dann Änderungen angeben, bei welchen ausgezeichnete Parameterwerte und ausgezeichnete Lösungen weder verloren noch gewonnen werden und die Oszillationszahlen sich nicht oder doch nur in genau angebbarer Weise ändern, so bleibt ein Oszillationstheorem diesen Änderungen gegenüber erhalten. In diesem Falle braucht man das Oszillationstheorem nur für

*) Die Grundlage dieser Methode, welche in der vorliegenden Arbeit vertieft und weitergeführt wird, findet sich in meiner Dissertation: Unters. über Oszillationstheoreme (Würzburg 1911). Im folgenden zitiert mit D.

eine spezielle, leicht zugängliche Differentialgleichung abzuleiten, um es sofort auf alle diejenigen Differentialgleichungen ausdehnen zu können, die durch Änderungen der geforderten Art aus der ursprünglichen hervorgehen.

Nach dieser Methode soll im folgenden die, einen reellen Parameter λ enthaltende, lineare, homogene Differentialgleichung

$$(\mathfrak{D}) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x,\lambda)\frac{dy}{dx}\right) + q(x,\lambda)y = 0$$

behandelt werden. Die Koeffizienten von $(\mathfrak{D})$ erfüllen die *Bedingungen* $(\mathfrak{D})$: $p(x,\lambda)$, $\frac{\partial p(x,\lambda)}{\partial x}$ und $q(x,\lambda)$ sind für alle Werte $x (a \leqq x \leqq b)$ und jeden endlichen Wert von λ eindeutige, stetige, reellwertige Funktionen der reellen Veränderlichen x und λ. $p(x,\lambda)$ ist im nämlichen Bereiche von Null verschieden und werde positiv angenommen.

Wir bezeichnen ferner eine Differentialgleichung $(\mathfrak{D})$ als *Differentialgleichung* $(\mathfrak{A})$ oder vom Typus $\mathfrak{A}$ (*nicht-polarer Fall*), wenn außerdem für alle reellen Wertepaare $\underset{(\Lambda>\lambda)}{\Lambda, \lambda}$ des Parameters λ

$$p(x,\Lambda) - p(x,\lambda) \leqq 0, \quad q(x,\Lambda) - q(x,\lambda) \geqq 0, \quad \Lambda > \lambda, \quad a \leqq x \leqq b,$$

und beispielsweise

$$\lim_{\lambda=+\infty} q(x,\lambda) = +\infty, \quad \lim_{\lambda=-\infty} q(x,\lambda) = -\infty, \quad a \leqq x \leqq b$$

ist.

Neben dem nichtpolaren betrachten wir den *polaren Fall* der Differentialgleichung $(\mathfrak{D})$ (*Differentialgleichung vom Typus* $\mathfrak{B}$). Ein solcher liegt beispielsweise vor, wenn $p(x,\lambda)$ von λ unabhängig ist und $q(x,\lambda)$ die Gestalt $\lambda k(x)$ hat, wobei $k(x)$ in endlich oder unbegrenzt vielen Stellen des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ das Zeichen wechselt.

Die Randbedingungen, welche wir zulassen, sind linear und homogen in den Randwerten von y und $\frac{dy}{dx}$ und umfassen als besondere Fälle die Sturmschen Bedingungen.*)

§ 1 und 2 beschäftigen sich mit den Randbedingungen, § 3 und 4 behandeln die nichtpolaren Fälle. § 5 ist einer speziellen Differentialgleichung vom Typus $\mathfrak{B}$, § 6 den sogenannten definiten polaren Problemen im Falle einer allgemeineren Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ gewidmet. Weitere Beispiele, in denen die Methode, welche mannigfacher Anwendung fähig ist, zum Ziele führt, sind am Schlusse der Arbeit angegeben.

Die in Rede stehenden Randbedingungen finden sich für den Fall der Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$

$$(\mathfrak{A}_1) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + q(x))y = 0$$

*) Sturm, J. de Math. (1) 1 (1836), S. 106—186. Vgl. Böcher, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Diffgl. (Enzykl. math. Wiss. II A 7 a, S. 437 ff.).

in meiner Dissertation behandelt. Durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Bôcher bin ich nach Erscheinen meiner Arbeit auf die Abhandlung von Herrn Birkhoff: Existence and oscillation theorem for a certain boundary value problem (Trans. Am. Math. Soc. 1909, vol. X, S. 259 ff.) aufmerksam gemacht worden. Herr Birkhoff beweist dort bereits die Oszillationstheoreme für die zur Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) $\frac{d^2 y}{dx^2} + q(x, \lambda) y = 0$ gehörigen Randbedingungen nach anderer Methode (unter Benutzung des Sturmschen Satzes). Die folgenden in § 1—4 inkl. gewonnenen Ergebnisse hatte Verfasser bereits abgeleitet, ehe er von den Resultaten des Herrn Birkhoff Kenntnis erhielt. Neuerdings hat Herr Ettlinger (Bulletin of the Amer. math. soc. 26. April 1913) noch allgemeinere Randbedingungen für den Fall der Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) nach der Methode von Bôcher-Birkhoff behandelt*); für den Sturmschen Fall findet sich eine derartige Erweiterung bei Bôcher (l. c. S. 443) angegeben.

Die Existenzsätze für den polaren definiten Fall sind zuerst von Herrn Hilbert**) bewiesen. Im Anschluß daran ist eine Arbeit von Herrn Hilb***) zu nennen, in der die Behandlung nicht-definiter Fälle angedeutet wird.†) Wie Herr Birkhoff mir mitteilt, ist der polare Fall seiner Methode ebenfalls zugänglich.

§ 1.

Greensche Randbedingungen bei linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Auf die in der Einleitung genannten Randbedingungen wird man durch folgende Überlegung geführt: Bezeichnen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei bzw. zu den Werten λ_1 und λ_2 des Parameters λ gehörige Lösungen von ($\mathfrak{D}$) und gebraucht man die Abkürzungen

$$p(x; \lambda_i) = p_i(x), \quad q(x; \lambda_i) = q_i(x), \qquad i = 1, 2,$$

so folgt aus ($\mathfrak{D}$)

$$y_2 \frac{d}{dx}\left(p_1 \frac{dy_1}{dx}\right) - y_1 \frac{d}{dx}\left(p_2 \frac{dy_2}{dx}\right) + (q_1 - q_2) y_1 y_2 = 0.$$

---

*) Vgl. eine demnächst erscheinende Arbeit von Herrn Ettlinger.

**) Hilbert, Allgem. Theorie der linearen Integralgl., 5. Mitt. (Gött. Nachr. 1906).

***) Hilb, Erweiterung des Kleinschen Oszillationstheorems (Jahresber. d. D. Math.-Ver. 1907).

†) Vgl. hierzu Richardson, Notwendige und hinreichende Bedingungen für das Bestehen eines Kleinschen Oszillationstheorems (Math. Ann., Bd. 73, S. 289 ff.). Berichtigung hierzu (Math. Ann., Bd. 74, S. 312).

Durch Integration von a bis b ergibt sich die von Sturm*) benutzte Formel

$$(1)\quad \left[p_1 y_2 \frac{dy_1}{dx} - p_2 y_1 \frac{dy_2}{dx}\right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \left[(p_2 - p_1)\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} + (q_1 - q_2) y_1 y_2\right] dx = 0.$$

Der in (1) linker Hand an erster Stelle stehende Ausdruck innerhalb der eckigen Klammer werde mit $P(y_1, y_2)$, das Integral mit $J(y_1, y_2)$ bezeichnet.

Während die Bedingung (1) identisch für jedes Paar von Werten λ_1, λ_2 und jedes Paar zugehöriger Lösungen y_1, y_2 von ($\mathfrak{D}$) befriedigt ist, wird $J(y_1, y_2)$ für sich genommen nur unter besonderen Umständen Null werden. Es ergibt sich demgemäß die *Frage nach einem Systeme von Werten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ des Parameters λ, für welche die Differentialgleichung* ($\mathfrak{D}$) *bzw. Lösungen $y_1, y_2, \ldots$ besitzt von der Eigenschaft, daß für jedes Paar einem solchen Systeme angehöriger Lösungen y_i, y_k; $i, k = 1, 2, \ldots$, und das zugehörige Wertepaar λ_i, λ_k der Ausdruck $P(y_1, y_2)$, genommen zwischen den Grenzen a und b, oder, was das Gleiche, das Integral $J(y_1, y_2)$ verschwindet.*

Das hiermit formulierte Problem werde als *Greensche Randwertaufgabe***) bezeichnet. Die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind die *ausgezeichneten Parameterwerte*, $y_1, y_2, \ldots$ die zugehörigen *ausgezeichneten Lösungen* von ($\mathfrak{D}$).

Die Lösung $y \equiv 0$ scheidet grundsätzlich aus der Betrachtung aus; außerdem kommen für die oszillationstheoretischen Betrachtungen *ausschließlich reelle ausgezeichnete Parameterwerte in Betracht.* Da durch die Problemstellung die ausgezeichneten Lösungen nur bis auf einen von x unabhängigen Faktor festgelegt sind, so schreibt man, außer den Randbedingungen, noch eine *Normierungsbedingung* für die ausgezeichneten Lösungen vor, durch die jener Faktor eindeutig bestimmt wird; ausgezeichnete Lösungen, die sich nur um einen, von x unabhängigen, Faktor unterscheiden, sind als nicht verschieden anzusehen.

Ein System von ausgezeichneten Parameterwerten und ausgezeichneten Lösungen ist durch zwei ausgezeichnete Lösungen oder durch zwei lineare homogene, unabhängige Randbedingungen charakterisiert.

Wir nehmen an, es seien u und v zwei ausgezeichnete Lösungen, λ_u und λ_v die zugehörigen Parameterwerte. Bei Einführung der Bezeichnungen

$$u(a) = u_a, \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a} = u'_a, \quad p(a; \lambda_u) = p_u(a), \text{ usw.}$$

*) Vgl. Sturm, l. c. Bôcher, l. c. S. 442.

**) Für den Fall der Differentialgleichung $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + r(x))\, y = 0$ ist das Problem zuerst von Hilbert behandelt (Hilbert, Grundzüge einer allgem. Theorie d. linearen Integralgleichungen, 2. Mitt., Gött. Nachr. 1904; 5. Mitt., Gött. Nachr. 1906).

besteht dann die Beziehung

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} p_u(b)u_b' & u_b \\ p_v(b)v_b' & v_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_u(a)u_a' & u_a \\ p_v(a)v_a' & v_a \end{vmatrix}.$$

Jede weitere ausgezeichnete Lösung $Y(x)$ genügt zufolge der Definition den linearen homogenen Bedingungen

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} p_u(b)u_b' & u_b \\ p_\lambda(b)Y_b' & Y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_u(a)u_a' & u_a \\ p_\lambda(a)Y_a' & Y_a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p_v(b)v_b' & v_b \\ p_\lambda(b)Y_b' & Y_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_v(a)v_a' & v_a \\ p_\lambda(a)Y_a' & Y_a \end{vmatrix};$$

dabei ist λ der zu $Y(x)$ gehörige ausgezeichnete Parameterwert.

Sind umgekehrt irgend zwei unabhängige Randbedingungen vorgelegt — $p_u(b)u_b'$ bedeuten jetzt irgend welche reellen Konstanten —, so bildet das Bestehen von (2) die Bedingung dafür, daß alle den Randbedingungen genügenden Lösungen von ($\mathfrak{D}$) ein System von ausgezeichneten Lösungen darstellen. Um dies einzusehen, betrachte man die Matrix

$$(M)\qquad \begin{Vmatrix} -p_u(a)u_a' & u_a & p_u(b)u_b' & -u_b \\ -p_v(a)v_a' & v_a & p_v(b)v_b' & -v_b \end{Vmatrix}.$$

Ihre Unterdeterminanten seien wie folgt bezeichnet

$$A = \begin{vmatrix} -p_u(a)u_a' & u_a \\ -p_v(a)v_a' & v_a \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} p_u(b)u_b' & -u_b \\ p_v(b)v_b' & -v_b \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} u_a & p_u(b)u_b' \\ v_a & p_v(b)v_b' \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} -p_u(a)u_a' & -u_b \\ -p_v(a)v_a' & -v_b \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} -u_b & u_a \\ -v_b & v_a \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} -p_u(a)u_a' & p_u(b)u_b' \\ -p_v(a)v_a' & p_v(b)v_b' \end{vmatrix}.$$

Dann besteht

$$(4)\qquad AB + CD + EF = 0$$

und (2) erhält die Gestalt

$$(5)\qquad A - B = 0.$$

Sind $Y_1(x)$ und $Y_2(x)$ zwei Lösungen von ($\mathfrak{D}$), die den gegebenen Randbedingungen genügen, λ_1 und λ_2 die entsprechenden Werte des Parameters, so ergibt (3) in jedem Falle

$$(G)\qquad \begin{aligned} p(b;\lambda_i)BY_i'(b) &= p(a;\lambda_i)CY_i'(a) + FY_i(a), \\ BY_i(b) &= p(a;\lambda_i)EY_i'(a) - DY_i(a), \end{aligned} \qquad i = 1, 2.$$

Äquivalent mit (G) sind die Bedingungen:

$$(G')\qquad \begin{aligned} p(a;\lambda_i)AY_i'(a) &= -p(b;\lambda_i)DY_i'(b) - FY_i(b), \\ AY_i(a) &= -p(b;\lambda_i)EY_i'(b) + CY_i(b), \end{aligned} \qquad i = 1, 2,$$

ausgenommen den Fall $A = B = 0$. Für diesen hat man *eine* Bedingung (G) und *eine* Bedingung (G').

Im Falle $B \neq 0$ ist wegen (5) auch $A \neq 0$ und mithin

$$\text{(6)} \qquad \begin{vmatrix} p(b;\lambda_1)Y_1'(b) & Y_1(b) \\ p(b;\lambda_2)Y_2'(b) & Y_2(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p(a;\lambda_1)Y_1'(a) & Y_1(a) \\ p(a;\lambda_2)Y_2'(a) & Y_2(a) \end{vmatrix}$$

Folge von (5) und (3); entsprechendes gilt für den Fall $A = B = 0$. Zufolge der Identität (1) ist aber (6) gleichbedeutend mit dem Verschwinden von $J(Y_1, Y_2)$.

Die Bedingungen (3) stellen also, falls (5) befriedigt ist, die allgemeinsten Randbedingungen dar, durch die ein System von ausgezeichneten Lösungen bestimmt wird; man nennt sie Greensche Randbedingungen. (G) heißt die Normalform.

Die von *Sturm**) behandelten Randbedingungen bilden die durch $A = B = 0$ gekennzeichnete Klasse von Greenschen Bedingungen. Im Sturmschen Falle gehört zu jedem ausgezeichneten Parameterwerte nur eine ausgezeichnete normierte Lösung.

Satz I. *Die Systeme von ausgezeichneten Lösungen einer Differentialgleichung* ($\mathfrak{D}$) *sind dadurch charakterisiert, daß die Randwerte der ausgezeichneten Lösungen einem Paare Greenscher Bedingungen*

$$(G) \qquad \begin{aligned} G_1(y) &= p(b;\lambda)By'(b) - p(a;\lambda)\,Cy'(a) - Fy(a) = 0, \\ G_2(y) &= \qquad\qquad By(b) - p(a;\lambda)Ey'(a) + Dy(a) = 0 \end{aligned}$$

genügen. Die Koeffizienten d. h. die reellen Konstanten $A, B, \ldots, F$ *verschwinden nicht sämtlich und sind an die Bedingungen*

$$(g) \qquad AB + CD + EF = 0, \quad A - B = 0$$

*gebunden.***)

Man bemerke, daß der Parameter λ in die Randbedingungen eingeht, so lange nicht $p(x, \lambda)$ von λ unabhängig ist.

Anmerkung: Zu einem und dem nämlichen ausgezeichneten Parameterwert gehören dann, aber auch nur dann mehrere ausgezeichnete Lösungen, wenn die sämtlichen Lösungen von ($\mathfrak{D}$) für diesen Wert λ den betreffenden Greenschen Randbedingungen genügen; der ausgezeichnete Parameterwert heißt dann ein *zweifacher*, im andern Falle ein *einfacher*. Wir bemerken hierzu, daß die Randwerte der sämtlichen Lösungen von ($\mathfrak{D}$) für einen festen Wert von λ stets einem gewissen, übrigens leicht anzugebenden, Greenschen Bedingungenpaare genügen, eine Tatsache, die für lineare sich selbst adjungierte homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung ebenfalls gilt. Allgemein gestatten die vorstehenden Überlegungen

*) Vgl. Böcher, l. c.

**) Vgl. D. I. Teil, § 1.

alle Greenschen Bedingungen zu klassifizieren, die zu den sich selbst adjungierten linearen homogenen Differentialgleichungen $2n^{\text{ter}}$ Ordnung gehören.*)

§ 2.

Begriff der zulässigen Änderung. Verhalten reellwertiger ausgezeichneter Lösungen und ihrer Oszillationszahlen bei zulässigen Änderungen.**)

Aus einem vorgelegten Greenschen Problem erhält man neue Aufgaben, wenn man die Konstanten $A, B, \ldots, F$, sowie die Differentialgleichung ($\mathfrak{D}$) ändert. Dabei sollen die Koeffizienten der Differentialgleichung stetige Funktionen eines reellen *Hilfsparameters* sein, durch dessen Änderung die Änderung der Differentialgleichung bewirkt wird. Man gelangt nun infolge solcher Änderungen wieder zu einem Greenschen Problem, wenn die Gleichungen (g) und die Bedingungen ($\mathfrak{D}$) stets erfüllt bleiben. Jede derartige Änderung heißt eine *zulässige Änderung*.

Wir gehen zunächst darauf aus, festzustellen, inwieweit die ausgezeichneten Lösungen bzw. ihre Oszillationszahlen — und in zweiter Linie dann die ausgezeichneten Parameterwerte — durch zulässige Änderung beeinflußt werden. Für unsere Zwecke kommen nur solche zulässige Änderungen in Betracht, bei welchen alle ausgezeichneten Parameterwerte sich stetig ändern, reell und endlich bleiben, ferner die zugehörigen ausgezeichneten Lösungen niemals identisch verschwinden; andernfalls würden ja etwaige Oszillationseigenschaften nicht erhalten bleiben. Wir werden demgemäß im folgenden nur zulässige Änderungen der eben bezeichneten Art verwenden; daß derartige Änderungen, wenigstens für besondere Klassen von Differentialgleichungen ($\mathfrak{D}$), wirklich existieren, wird sich im Laufe der Untersuchung ergeben. (Vgl. § 3, § 5.)

Bei den soeben bezeichneten zulässigen Änderungen ändern sich die Werte der ausgezeichneten Lösungen an einer Stelle $\xi (a \leqq \xi \leqq b)$ sowie die einfach zählenden Nullstellen dieser Lösungen stetig mit dem Parameter ϱ und den Konstanten der Randbedingungen. Das gleiche gilt für die erste Ableitung nach x. Es können demgemäß reelle Nullstellen einer ausgezeichneten Lösung im Innern des Intervalls und an dessen Grenzen nur dadurch verloren (oder gewonnen) werden, daß entweder mehrere solche Nullstellen zuerst zusammenrücken und dann im weiteren Verlaufe der Änderung verloren gehen (bzw. umgekehrt), oder daß ein Verlust oder Gewinn von Nullstellen in den Intervallgrenzen stattfindet.

*) Vgl. Westfall, Zur Theorie der Integralgleichungen (Diss. Göttingen 1905), S. 18. Ferner D. II. Teil.

**) Vgl. D. I. Teil, § 2 und § 3.

Nun hat bekanntlich eine nicht identisch verschwindende Lösung von ($\mathfrak{D}$), als Funktion von x betrachtet niemals zwei- oder mehrfache Nullstellen; mithin bleibt nur noch die zweite Möglichkeit übrig.

Satz II. *Ein Gewinn oder Verlust von reellen Nullstellen einer reellwertigen ausgezeichneten Lösung kann nur an den Intervallgrenzen stattfinden.*

Ist $y \cdot \frac{dy}{dx} > 0$ *(bzw.* < 0*) an der Stelle* $x = a$*, wobei* $y(x)$ *eine ausgezeichnete Lösung bezeichne, und wechselt vermöge einer zulässigen Änderung* $y(a)$ *das Zeichen, während* $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}$ *von Null verschieden bleibt, so gewinnt (bzw. verliert) die betrachtete ausgezeichnete Lösung* y *in* $x = a$ *gerade eine Nullstelle.*

Gilt hingegen die Ungleichung $\left(y \frac{dy}{dx}\right)_b > 0$ *(bzw.* < 0*), so verliert (bzw. gewinnt) die Lösung* y *in* $x = b$ *gerade eine Nullstelle, wenn* $y(b)$ *vermöge einer zulässigen Änderung das Zeichen wechselt, während gleichzeitig* $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=b}$ *von Null verschieden bleibt.*

Wir bezeichnen, wie üblich, die *Anzahl der im Innern des Intervalls* a, b *gelegenen reellen Nullstellen einer ausgezeichneten Lösung* als *deren Oszillationszahl*; in den Nicht-Sturmschen Fällen werden wir indes von zwei an den Intervallendpunkten gleichzeitig auftretenden Nullstellen einer ausgezeichneten Lösung die eine zur Oszillationszahl hinzurechnen.

Zufolge Satz II ist jetzt das Verhalten der Randwerte bei zulässigen Änderungen zu betrachten. Im *Sturmschen Falle* läßt sich dies sofort übersehen. Die Randbedingungen sind

$$(S) \qquad hp(a;\lambda)y'_a - Hy_a = 0, \quad kp(b;\lambda)y'_b - Ky_b = 0$$

und die Oszillationszahlen sind daher konstant, solange nur kein von Null verschiedener Koeffizient h, H, k, K in (S) zum Verschwinden gebracht wird und umgekehrt kein verschwindender Koeffizient von Null verschiedene Werte annimmt.

Beinahe ebenso einfach gestaltet sich die Diskussion der *Nicht-Sturmschen Fälle*, wenn man durch eine geeignete Transformation der ausgezeichneten Lösungen die Randbedingungen vereinfacht. Setzt man

$$y = \eta(x, \lambda) y_1(x),$$

wobei $\eta(x, \lambda)$ nebst seiner ersten Ableitung nach x für alle $x (a \leq x \leq b)$ und jedes reelle λ eine eindeutige, stetige reellwertige Funktion von x und λ ist und $\eta(x, \lambda)$ nirgends verschwindet, so entspricht jeder einfachen Nullstelle von y eine einfache Nullstelle von y_1 und umgekehrt. y hat also die gleiche Oszillationszahl wie y_1. Man substituiert für y und $\frac{dy}{dx}$ ihre Ausdrücke in y_1 und $\frac{dy_1}{dx}$ in die Greenschen Bedingungen.

Im Falle $E = 0$ erhält man ein Paar Hilbertscher*) Bedingungen

$$\text{(IV)} \qquad ky_1(a) = y_1(b),\ p(a;\lambda)y_1'(a) = kp(b;\lambda)y_1'(b),$$

wenn $\eta(x,\lambda)$ für jeden Wert λ, oder auch nur für jeden ausgezeichneten Parameterwert seinerseits den Randbedingungen

$$\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=a} = 0, \quad F\eta_b + p(b;\lambda)D\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=b} = 0, \quad D \neq 0$$

genügt. Eine Funktion, die alle aufgezählten Eigenschaften hat, existiert stets.

Im Falle $E \neq 0$ erhält man ein Paar Hilbertscher Bedingungen IV*

$$\text{(IV*)} \qquad y_1(a) = lp(b;\lambda)y_1'(b),\ lp(a;\lambda)y_1'(a) = -y_1(b),$$

wenn

$$C\eta_b - p(b;\lambda)E\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=b} = 0, \quad D\eta_a - p(a;\lambda)E\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_{x=a} = 0, \quad E \neq 0.$$

Die in (IV) bzw. (IV*) auftretenden Konstanten k und l sind von Null verschieden und lassen sich leicht durch die Koeffizienten $A, \ldots, F$ des ursprünglichen Greenschen Systems und die Randwerte von η ausdrücken.

Man nehme für den Augenblick an, daß zu der Randbedingung (IV) oder (IV*) und einer zugehörigen Differentialgleichung ($\mathfrak{D}$) eine ausgezeichnete Lösung y existiert. Bei zulässigen Änderungen der betrachteten Art, welche überdies die Ungleichungen bzw. Gleichungen $A \neq 0$, $B \neq 0$, $E = 0$ (bzw. $E \neq 0$) ungeändert lassen, kann dann zufolge Satz II die Oszillationszahl sich höchstens um eins ändern; und zwar kann sie entweder nur um eins zu- oder nur um eins abnehmen. Dies folgt sofort aus den Gleichungen

$$p(a;\lambda)y_a y_a' = p(b;\lambda)y_b y_b', \quad p(a;\lambda)y_a y_a' = -p(b;\lambda)y_b y_b',$$

die sich ihrerseits aus (IV) bzw. (IV*) ergeben.

Unter Berücksichtigung der oben (S. 74) gegebenen Definition der Oszillationszahl ergibt sich

Satz III. *Die Oszillationszahl jeder zu einem Greenschen Bedingungenpaare, charakterisiert durch $A = B \neq 0$, $E = 0$, oder einem Paare Sturmscher Bedingungen ($A = 0$) gehörigen ausgezeichneten Lösung bleibt bei den betrachteten zulässigen Änderungen invariant, wenn man die Koeffizienten $A, \ldots, F$ der Randbedingungen festhält.*

*Jeder zu einem Greenschen Bedingungenpaare $A \neq 0$, $E \neq 0$ gehörigen ausgezeichneten Lösung sind zwei ganze positive Zahlen, deren eine auch die Null sein kann, zugeordnet, die sich gerade um eins unterscheiden.***) *Bei allen in Betracht kommenden zulässigen Änderungen, welche die Koeffizienten der*

*) Hilbert, l. c., 2. Mitt. (S. 216).

**) Dabei ist der Fall auszunehmen, in welchem die ausgezeichnete Lösung die Oszillationszahl Null besitzt und höchstens eine Nullstelle verlieren könnte. Vgl. die Formulierung des Oszillationstheorems (§ 3, S. 81).

Randbedingungen festlassen, kann die Oszillationszahl für die nämliche ausgezeichnete Lösung sich immer nur zwischen diesen beiden Werten hin- und herbewegen.

Insbesondere entsprechen den sämtlichen zu einem festen Werte von λ gehörigen Lösungen von ($\mathfrak{D}$) zwei Oszillationszahlen, die sich höchstens um eins unterscheiden.

Der Satz III gilt etwas allgemeiner für solche zulässige Änderungen, welche die Gleichungen bzw. Ungleichungen $A = B \neq 0$, $E = 0$ $(E \neq 0)$ ungeändert lassen. Die gefundene Eigenschaft der Oszillationszahlen ist wesentlich durch die Beziehung $A \cdot B > 0$ bedingt.

Zusatz: Die allgemeinste Transformation*), welche eine Differentialgleichung ($\mathfrak{D}$) wieder in eine lineare homogene Differentialgleichung überführt, hat die Gestalt

$$y = \eta(x_1, \lambda) y_1, \quad x = \xi(x_1, \lambda);$$

dabei sind η und ξ als Funktionen von x zweimal stetig differenzierbar, als Funktionen von x und λ nebst ihren Ableitungen nach x stetig, im übrigen eindeutig und reellwertig. $\eta(x_1)$ und $\frac{dx}{dx_1}$ verschwinden für keinen Wert $x (a \leqq x \leqq b)$ und keinen Wert λ. Die Transformation läßt die Oszillationszahl ungeändert, führt hingegen ein Paar Greenscher Bedingungen in ein anderes Paar linearer homogener Bedingungen über, welche sich im allgemeinen der Normalform (G) nicht unterordnen lassen; man kommt auf diese Weise zu Nicht-Greenschen Problemen, die ebenfalls ein Oszillationstheorem besitzen.

§ 3.

Beweis des Oszillationstheorems für die Differentialgleichungen $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + r(x))\, y = 0, \quad k(x) > 0.$

(Nicht-polarer Fall.)**)

Der Satz III liefert ein Mittel, um ein Oszillationstheorem, welches für eine spezielle Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) gilt, auf die allgemeine Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$), oder zunächst doch auf eine ganze Klasse solcher Differentialgleichungen auszudehnen. Zu dem Ende kommt es nur mehr darauf an, Differentialgleichungen ($\mathfrak{A}$) anzugeben, welche zulässige Änderungen von den im vorhergehenden Paragraphen näher präzisierten, für die Anwendbarkeit des Satzes III notwendigen Eigenschaften gestatten.

---

*) Stäckel, Über Transformationen von Differentialgleichungen (Crelles Journal, Bd. 111, S. 290ff.).

**) Vgl. D. §§ 3, 4, 5.

Wir betrachten zunächst die spezielle Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$)

$$(\mathfrak{A}_1)\qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + r(x))y = 0.$$

$p(x)$, $k(x)$ und $r(x)$ hängen von λ nicht ab und es ist

$$p(x) > 0,\quad k(x) > 0,\quad a \leqq x \leqq b.$$

Die Koeffizienten von ($\mathfrak{A}_1$) genügen der Bedingung ($\mathfrak{A}$), wenn p, $\frac{dp}{dx}$, k und r stetige Funktionen von x sind.

Da die Integralbedingung $J(y_1 y_2) = 0$ für ($\mathfrak{A}_1$) in die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_a^b k(x) y_1(x) y_2(x)\,dx = 0 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

übergeht, so sind alle ausgezeichneten Parameterwerte reell; sie besitzen nirgends im Endlichen eine Häufungsstelle, weil die ausgezeichneten Parameterwerte Nullstellen einer ganzen transzendenten Funktion $\delta(\lambda)$ in λ sind.

Ferner besitzt $\delta(\lambda)$ höchstens zweifache Nullstellen und diese sind mit den zweifachen ausgezeichneten Parameterwerten identisch*); jedem zweifachen ausgezeichneten Parameterwerte gehören zwei linear unabhängige ausgezeichnete Lösungen zu.

Bei einer zulässigen Änderung von ($\mathfrak{A}_1$), in deren Verlauf nur Differentialgleichungen ($\mathfrak{A}_1$) auftreten und die ausgezeichneten Parameterwerte sich stetig ändern, kann dem Gesagten zufolge ein Verlust bzw. ein Gewinn von ausgezeichneten Parameterwerten und Lösungen nur dadurch zustande kommen, daß ein solcher Parameterwert über alle Grenzen wächst, d. h. „ins Unendliche rückt" bzw. daß er „aus dem Unendlichen hereinrückt".

Über das Verhalten der ausgezeichneten Parameterwerte bei zulässigen Änderungen läßt sich folgende schärfere Aussage machen:

Hilfssatz Ia. *Bleiben bei einer zulässigen Änderung, in deren Verlauf nur Differentialgleichungen* ($\mathfrak{A}_1$) *auftreten, die Koeffizienten* $A, \ldots$ *der Randbedingungen ungeändert und nimmt* $r(x)$ *für alle* $x (a \leqq x \leqq b)$ *zu (oder doch nicht ab),* $p(x)$ *hingegen ab, oder doch nicht zu, so nimmt hierbei jeder reelle ausgezeichnete Parameterwert ab; vorausgesetzt ist, daß die Koeffizienten von* ($\mathfrak{A}_1$) *ganze transzendente Funktionen des Hilfsparameters* ϱ *sind, ferner, daß für mindestens ein Teilintervall* $\xi_1, \xi_2 (a \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq b)$ *wirklich eine Zunahme von* $r(x)$ *oder Abnahme von* $p(x)$ *mit sich änderndem* ϱ *erfolgt.*

Umgekehrt nimmt — unter im übrigen gleichen Voraussetzungen — jeder ausgezeichnete Parameterwert zu, wenn $r(x)$ *ab-,* $p(x)$ *hingegen zunimmt. Endlich wächst jeder ausgezeichnete Parameterwert seinem absoluten Betrage*

*) Vgl. z. B. Hilbert, l. c., 1. Mitt.; Birkhoff, l. c., § 2; ferner D. § 4, § 5.

nach, wenn $k(x)$ für jedes $x(a \leqq x \leqq b)$ abnimmt, oder doch nicht wächst, und gleichzeitig die Randbedingungen und die übrigen Koeffizienten von ($\mathfrak{A}_1$) *festbleiben.*

Die letzte Behauptung ergibt sich für den Fall der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda k(x) y = 0 \tag{1}$$

folgendermaßen: für den Wert $\varrho = \varrho_0$ des Hilfsparameters ϱ sei $y_0(x)$ die zum einfachen ausgezeichneten Parameterwert λ_0 gehörige Lösung. Durch die zulässige Änderung $\Delta\varrho$ des Parameters ϱ erhält man die neue Differentialgleichung

$$\frac{d^2(y_0 + \Delta y_0)}{dx^2} + (\lambda_0 + \Delta\lambda_0)(k(x) + \Delta k(x))(y_0 + \Delta y_0) = 0, \tag{2}$$

wobei $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ bzw. $y_0 + \Delta y_0$ derjenige ausgezeichnete Parameterwert bzw. diejenige ausgezeichnete Lösung von (2) ist, in die λ_0 bzw. $y_0(x)$ übergeht. Multipliziert man (1) mit $(y_0 + \Delta y_0)$, (2) mit y_0, subtrahiert und integriert von a bis b, so ergibt sich, weil $y_0 + \Delta y_0$ und y_0 den gleichen Randbedingungen genügen,

$$\int_a^b [\lambda_0 \cdot \Delta k(x) + \Delta\lambda_0 \cdot k(x) + \Delta\lambda_0 \cdot \Delta k(x)] y_0(x)(y_0(x) + \Delta y_0(x))\, dx = 0. \tag{3}$$

Zufolge der gemachten Annahmen, kann man die Identität (3) in $\Delta\varrho$ nach Potenzen von $\Delta\varrho$ ordnen; die Glieder niedrigster Ordnung sind

$$\Delta\varrho \cdot \left\{ \lambda_0 \int_a^b \left(\frac{\partial k(x)}{\partial\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0} \cdot y_0^2(x)\, dx + \left(\frac{d\lambda_0}{d\varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0} \int k(x) y_0^2(x)\, dx \right\}, \tag{4}$$

woraus die Behauptung folgt.*) Ganz entsprechend gestaltet sich der Beweis des ersten Teiles unseres Hilfssatzes, sowie die Behandlung zweifacher ausgezeichneter Parameterwerte λ_0.

Das Beispiel einer zulässigen Änderung der im Hilfssatze bezeichneten Art liefert die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}_1$)

$$\frac{d}{dx}\left([\varrho p(x) + (1-\varrho)\pi(x)]\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + [\varrho r(x) + (1-\varrho)\tau(x)])y = 0,$$

wenn

$$p(x) \geqq \pi(x), \quad r(x) \leqq \tau(x)$$

für jedes $a \leqq x \leqq b$. In der Variation $\Delta\varrho \gtrless 0$ hat man dann eine solche zulässige Änderung.

Nun gilt *für die spezielle Differentialgleichung* ($\mathfrak{A}_1$)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \tag{a}$$

*) Daß $\left(\frac{d\lambda_0}{d\varrho}\right)$ existiert, ist leicht zu sehen.

und ein zugehöriges Greensches Randbedingungenpaar folgendes *Oszillationstheorem: Es existieren unendlich viele reelle ausgezeichnete Parameterwerte, die nur im Positiv-Unendlichen eine Häufungsstelle besitzen. Zu der von Null verschiedenen Oszillationszahl* $2n$ *und der ihr — je nach Art der vorgelegten Randbedingung — zugeordneten Oszillationszahl* $2n+1$ *bezw.* $2n-1$ *gehören stets zwei aber nur zwei ausgezeichnete Lösungen. Im ersteren Falle, d. h. wenn* $2n+1$ *und* $2n$ *zugeordnet sind, gehören zu den Oszillationszahlen* 0 *und* 1 *im ganzen zwei ausgezeichnete Lösungen; andernfalls gibt es immer gerade eine ausgezeichnete Lösung mit der Oszillationszahl Null. Zu Paaren größerer Oszillationszahlen gehören größere ausgezeichnete Parameterwerte.**)

Das Theorem gilt unverändert auch für Differentialgleichungen

$$(\mathfrak{a}) \qquad \frac{d}{dx}\left(\pi \frac{dy}{dx}\right) + (\lambda \varkappa^2 + \nu) y = 0,$$

wenn π, $\varkappa$, ν von Null verschiedene reelle Konstanten sind. Ferner erleidet das Oszillationstheorem gemäß Satz III, wie aus seiner Herleitung hervorgeht,**) bei zulässigen Änderungen der Differentialgleichung ($\mathfrak{a}$) allein keinerlei Änderung, es sei denn daß ein Gewinn oder Verlust von ausgezeichneten Parameterwerten stattfindet. Daß dies nur „im Unendlichen" geschehen kann, ist bereits oben gezeigt.

Mit Hilfe der zulässigen Änderung des Hilfssatzes Ia ergibt sich aber, daß auch diese letzte Möglichkeit ausgeschlossen ist. Betrachten wir zunächst eine Differentialgleichung ($\mathfrak{A}_1$) der Form

$$(\mathfrak{A}_1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda k(x) y = 0.$$

Jeder derartigen Differentialgleichung kann man zwei Differentialgleichungen ($\mathfrak{a}$) zuordnen

$$(\mathfrak{a}_j) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda \varkappa_j^2 y = 0, \qquad j = 1, 2,$$

die zu ihr in der für die Anwendung des Hilfssatzes erforderlichen Beziehung stehen. Man braucht nur die Konstanten $\varkappa_j^2$ $(j = 1, 2)$ so zu wählen, daß etwa

$$\varkappa_2^2 > k(x) > \varkappa_1^2 > 0, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Führt man nun ($\mathfrak{a}_1$) bzw. ($\mathfrak{a}_2$) in der S. 78 angegebenen Weise in ($\mathfrak{A}_1$) über, so läßt sich Hilfssatz Ia anwenden. Es können demgemäß im einen

---

*) Bezüglich der eingehenderen Formulierung vgl. Birkhoff, l. c., S. 269; ferner D. S. 35.

**) Siehe D. § 5. Durch das Oszillationstheorem müssen eben solche Oszillationszahlen einander zugeordnet werden, die auch vermöge der Randbedingungen (Satz III, § 2) einander entsprechen.

Falle ausgezeichnete Parameterwerte nur gewonnen, im andern nur verloren werden. Da man beide Male zur Differentialgleichung ($\mathfrak{A}_1$) gelangt, findet also weder Gewinn noch Verlust statt. ($\mathfrak{A}_1$) besitzt für die gleichen Randbedingungen das nämliche Oszillationstheorem wie ($\mathfrak{a}$).

Durch entsprechende Verwendung des ersten Teiles von Hilfssatz Ia beweist man ein Gleiches für die allgemeine Differentialgleichung ($\mathfrak{A}_1$). Wir formulieren das Ergebnis so:

Hilfssatz II. *Beschränkt man sich ausschließlich auf Differentialgleichungen ($\mathfrak{A}_1$), so werden bei festen Randbedingungen d. h. festen Werten der Koeffizienten $A, \ldots, F$ infolge irgendwelcher zulässigen Änderung der Differentialgleichung d. i. der Koeffizienten p, k, r ausgezeichnete Parameterwerte bzw. ausgezeichnete Lösungen niemals gewonnen oder verloren. Ausgezeichnete Parameterwerte und Lösungen ändern sich stetig mit einem reellen Parameter ϱ, wenn die Koeffizienten von ($\mathfrak{A}_1$) eindeutige, stetige, reellwertige Funktionen von ϱ und $x (a \leqq x \leqq b)$ für den in Betracht kommenden Bereich von ϱ sind.*

Sind die Koeffizienten von ($\mathfrak{A}_1$) bloß stetige, nicht-analytische Funktionen des Hilfsparameters, so kann der Beweis des Satzes dadurch geführt werden, daß man beispielsweise die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[(p(x, \varrho_0) - \varepsilon)\frac{dy}{dx}\right] + (\lambda k(x) + [r(x, \varrho_0) + \varepsilon])y = 0$$

bildet, wobei ε eine genügend kleine positive Größe ist. Vergleicht man hiermit alle Differentialgleichungen ($\mathfrak{A}_1$) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle $\varrho = \varrho_0$ und faßt hierbei einen bestimmten ausgezeichneten Parameterwert ins Auge, so ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Hilfssatz Ia bzw. der Formel (3) und analoger Beziehungen die Behauptung.

Der Hilfssatz Ia gestattet die entsprechende Erweiterung.

Zum Schlusse sei nochmals hervorgehoben, daß zulässige Änderungen von $p(x)$ das Oszillationstheorem in keiner Weise beeinflussen.

§ 4.

Ausdehnung des Oszillationstheorems auf die Differentialgleichung $\frac{d}{dx}\left(p(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right) + q(x, \lambda)y = 0$. (Nicht-polarer Fall.)*)

Das im vorstehenden angewandte Verfahren läßt sich so modifizieren, daß es auch im Falle der allgemeinen Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) zum Be-

*) Vgl. hierzu Birkhoff, l. c. und die daselbst zitierte Literatur.

weise führt. Dabei wird sich die Betrachtung ausschließlich auf reelle endliche Parameterwerte beschränken.

Als gegeben betrachten wir bei den folgenden Überlegungen die Differentialgleichung ($\mathfrak{A}$) und ein System von Greenschen Bedingungen, das wir ein für allemal festhalten.

Zunächst ziehen wir nur *die Bedingungen*

$$(1)\quad p(x,\Lambda)-p(x,\lambda)\leqq 0,\quad q(x,\Lambda)-q(x,\lambda)\geqq 0,\quad a\leqq x\leqq b,\quad \Lambda>\lambda$$

heran; dabei soll also für jedes Λ in der Umgebung jeden Wertes von λ mindestens für einen der Koeffizienten ein Teilintervall ξ_1, ξ_2 von a, b existieren, so daß in diesem das Ungleichheitszeichen gilt.

Wir betrachten dann in der Schar von Differentialgleichungen

$$(\mathfrak{A}_1^\varrho)\qquad \frac{d}{dx}\left(p(x,\varrho)\frac{dy}{dx}\right)+(\mu+q(x,\varrho))y=0$$

den Parameter ϱ als Hilfsparameter*). Für den Wert $\varrho=\varrho_1$ möge das zu ($\mathfrak{A}_1^{\varrho_1}$) und den festen Randbedingungen gehörige Problem n_1 negative ausgezeichnete Parameterwerte μ besitzen. Für jeden größeren Wert $\varrho=\varrho_2$ besitzt dann das entsprechende, zu ϱ_2 gehörige Problem sicher nicht weniger negative ausgezeichnete Parameterwerte. Vergleicht man nämlich die beiden Differentialgleichungen ($\mathfrak{A}_1^{\varrho_1}$) und ($\mathfrak{A}_1^{\varrho_2}$), so bestehen für ihre Koeffizienten bzw. die Beziehungen

$$p(x,\varrho_2)\leqq p(x,\varrho_1),\quad q(x,\varrho_2)\geqq q(x,\varrho_1),\quad a\leqq x\leqq b,\quad \varrho_1<\varrho_2.$$

Zufolge Hilfssatz Ia müssen demgemäß die ausgezeichneten Parameterwerte von ($\mathfrak{A}_1^{\varrho_1}$) sämtlich abnehmen, wenn ϱ von ϱ_1 bis ϱ_2 wächst. Weil bei dieser zulässigen Änderung ausgezeichnete Parameterwerte weder verloren noch gewonnen werden, ist die Behauptung erwiesen.

Wie bereits bemerkt, nehmen bei zunehmendem ϱ die ausgezeichneten Parameterwerte von ($\mathfrak{A}_1^\varrho$) beständig ab. Jeder positive (einfache oder zweifache) ausgezeichnete Parameterwert von ($\mathfrak{A}_1^\varrho$) kann hierbei also höchstens einmal Null werden. Für $\mu=0$ wird aber jeweils ($\mathfrak{A}_1^\varrho$) mit ($\mathfrak{A}$) für den betreffenden Wert $\lambda=\varrho$ des Parameters λ identisch. Daher kann jede zu einem positiven ausgezeichneten Parameterwerte von ($\mathfrak{A}_1^{\varrho_1}$) gehörige ausgezeichnete Lösung höchstens zu einer einzigen ausgezeichneten Lösung von ($\mathfrak{A}$) führen. Andererseits liefert ein negativer ausgezeichneter Parameterwert von ($\mathfrak{A}_1^{\varrho_1}$) bei wachsendem ϱ niemals einen ausgezeichneten Parameterwert von ($\mathfrak{A}$), auch der etwa vorhandene ausgezeichnete Parameterwert $\mu=0$ von ($\mathfrak{A}_1^{\varrho_1}$) gibt zu keinem weiteren ausgezeichneten Parameterwert von ($\mathfrak{A}$) Veranlassung. Und umgekehrt entspricht jeder aus-

*) Eine analoge Schlußweise findet sich bei Hilb, l. c. (Jahresber. 1907) zum Beweise Sturmscher Oszillationstheoreme im polaren Fall. Vgl. S. 88.

gezeichnete Parameterwert λ $(\varrho_1 \leqq \lambda < \varrho_2)$ von $(\mathfrak{A})$ einem ausgezeichneten Parameterwerte $\mu = 0$ von $(\mathfrak{A}_1^{\varrho})$ $(\varrho_1 \leqq \varrho < \varrho_2)$. Daher das **Resultat:**

Sind ϱ_1 und ϱ_2 zwei reelle Werte des Parameters ϱ $(\varrho_1 < \varrho_2)$ und hat die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_1})$ im ganzen n_1, die Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_2})$ hingegen im ganzen n_2 zu negativen ausgezeichneten Parameterwerten gehörige ausgezeichnete Lösungen, so ist $n_1 \leqq n_2$; und es gibt genau $n_2 - n_1$ verschiedene reelle ausgezeichnete Lösungen von $(\mathfrak{A})$, deren zugehörige reelle ausgezeichnete Parameterwerte der Bedingung $\varrho_1 \leqq \lambda < \varrho_2$ genügen. Voraussetzung ist hierbei nur, daß die Koeffizienten von $(\mathfrak{A})$ die Bedingung (1) erfüllen.

Aus dem so gewonnenen Ergebnis folgt unmittelbar: *Ist die Forderung* (1) *erfüllt, so gilt für die Differentialgleichung* $(\mathfrak{A})$ *und die vorgegebene Randbedingung dann und nur dann das nämliche Oszillationstheorem wie für die Differentialgleichung* $(\mathfrak{A}_1)$, *wenn*

(2)

a) *zu jeder positiven ganzen Zahl* N_0 *ein Wert* $\lambda = \varrho_0$ *existiert, so daß* $(\mathfrak{A}_1^{\varrho_0})$ *unter den gleichen Randbedingungen mindestens* N_0 *zu negativen ausgezeichneten Parameterwerten gehörige ausgezeichnete Lösungen besitzt;*

b) *ein Wert* $\lambda = \mathrm{P}$ *existiert, so daß* $(\mathfrak{A}_1^{\mathrm{P}})$ *nur positive ausgezeichnete Parameterwerte zuläßt.*

Um die an erster Stelle genannte *Bedingung* (2a) zu erfüllen, genügt es und ist zugleich notwendig, daß bei passender Wahl von λ eine (und dann zufolge § 2 auch jede) Lösung von $(\mathfrak{A})$ im Intervalle a, b beliebig viele Nullstellen besitze. Um ein *Kriterium* hierfür zu gewinnen, führe man in der Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ vermöge der Substitution

$$x = x(x_1, \lambda), \quad x_1 = \frac{1}{c}\int_a^x \frac{dx}{p(x, \lambda)}$$

die neue unabhängige Veränderliche x_1 ein. Wie leicht zu zeigen, ergibt sich dann aus $(\mathfrak{A})$ die Differentialgleichung

$$\frac{\bar{p}(x_1)}{c^2(\bar{p}(x_1))^2} \cdot \frac{d^2\bar{y}}{dx_1^2} + \bar{q}(x_1)\bar{y} = 0,$$

wobei

$$\bar{p}(x_1) = p(x(x_1, \lambda), \lambda), \quad \bar{q}(x_1) = q(x(x_1, \lambda), \lambda), \quad \bar{y}(x_1) = y(x(x_1, \lambda)).$$

Bestimmt man den willkürlichen, von x unabhängigen Faktor c durch die Gleichung

$$c(\lambda) = \int_a^b \frac{dx}{p(x, \lambda)},$$

so entsprechen den Punkten $a \leqq x \leqq b$ eineindeutig die Punkte $0 \leqq x_1 \leqq 1$ für jeden endlichen Wert von λ. $\bar{y}(x_1)$ hat in 0,1 die gleiche Nullstellenzahl wie $y(x)$ in a, b.

($\mathfrak{A}$) besitzt demgemäß die oben geforderte Eigenschaft, sobald in

$$\frac{d^2\bar{y}}{d x_1^2} + \bar{p}(x_1)\bar{q}(x_1)\left\{\int_a^b \frac{dx}{p(x,\lambda)}\right\}^2 \bar{y} = 0$$

der Koeffizient von $\bar{y}$ im Intervalle 0, 1 (oder auch nur in einem festen Teilintervall, das also mit wachsendem λ eine feste Größe nicht unterschreitet) durchweg größer wird als eine beliebig große positive Größe. Die Bedingung (2a) ist somit gewiß erfüllt, wenn

$$\lim_{\lambda=+\infty} p(x,\lambda)\,q(x,\lambda)\left\{\int_a^b \frac{dx}{p(x,\lambda)}\right\}^2 = +\infty, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Um die *Bedingung* (2b) zu befriedigen, genügt es z. B., daß für alle $a \leqq x \leqq b$ die Beziehung gilt:

$$\lim_{\lambda=-\infty} q(x,\lambda) = -\infty.\text{*)}$$

Zum Beweise bestimme man in der Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (\mu+\tau)y = 0$$

die Konstante τ so, daß alle ausgezeichneten Parameterwerte μ von (a) für die vorgegebenen Randbedingungen positiv sind. Das ist immer möglich. Bezeichnet α das Minimum von $p(x,l)$, wo l ein fester, im übrigen beliebiger Wert des Parameters λ ist, so gilt

$$0 < \alpha \leqq p(x,\lambda), \quad a \leqq x \leqq b$$

für jedes $\lambda \leqq l$. Setzt man ferner $\tau = \frac{\beta}{\alpha}$, so gibt es den angenommenen Eigenschaften von $q(x,\lambda)$ zufolge überdies eine Zahl $l_0 \leqq l$, für welche

$$q(x,l_0) < \beta, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Führt man nun die Differentialgleichung

$$\text{(a')} \qquad \frac{d}{dx}\left(\alpha\frac{dy}{dx}\right) + (\mu'+\beta)y = 0,$$

die ebenfalls nur positive ausgezeichnete Parameterwerte besitzt, in

$$(\mathfrak{A}_1^{l_0}) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x,l_0)\frac{dy}{dx}\right) + (\mu'+q(x,l_0))y = 0$$

---

*) Mit dieser Bedingung ist die folgende

$$\lim_{\lambda=-\infty} \frac{q(x,\lambda)}{p(x,\lambda)} = -\infty$$

gleichbedeutend. Da nämlich die stets positive Funktion $p(x,\lambda)$ mit abnehmendem λ sicher nicht abnimmt, so muß $q(x,\lambda)$, absolut genommen, für alle $a \leqq x \leqq b$ mit gegen $-\infty$ abnehmendem λ offenbar über alle Grenzen wachsen.

über, so nehmen alle ausgezeichneten Parameterwerte zu, $(\mathfrak{A}_1^b)$ hat nur positive ausgezeichnete Parameterwerte, w. z. b. w.

Eine ganz entsprechende Betrachtung zeigt übrigens, daß die bereits behandelte Bedingung (2a) sicher befriedigt ist, sobald für ein festes Teilintervall ξ_1, ξ_2 $(a \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq b)$

$$\lim_{\lambda = +\infty} q(x, \lambda) = +\infty.$$

Auf weitere Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden. Bezüglich der Kriterien, die in den Sturmschen Fällen die Existenz des vollständigen Oszillationstheorems für die Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ garantieren, sei an dieser Stelle nochmals auf die Arbeiten von Herrn Bôcher*) hingewiesen.

Die beiden Bedingungen (1) und (2) waren für die vorstehende Untersuchung durch die Natur der Koeffizienten von $(\mathfrak{A}_1)$ vorgezeichnet. Sie erwiesen sich als hinreichend, um für ein festes Greensches System die Gültigkeit eines und des nämlichen Oszillationstheorems, und zwar des gleichen wie für $(\mathfrak{A}_1)$, für alle Differentialgleichungen vom Typus $(\mathfrak{A})$ zu sichern. Die Annahmen, daß $p(x, \lambda)$ und $q(x, \lambda)$ mit wachsendem λ bei festem x monoton abnehmen, bzw. monoton wachsen, boten die Gewähr, daß *nicht mehr* ausgezeichnete Parameterwerte von $(\mathfrak{A})$ existierten, als durch das Oszillationstheorem von $(\mathfrak{A}_1)$ vorgeschrieben waren. Die hinzutretende Eigenschaft (2) sicherte die Existenz *aller* dieser ausgezeichneten Parameterwerte für die Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$.

Die Bedingungen (1), (2) sind im oben erklärten Sinne offenbar auch notwendig. Dies läßt sich durch Konstruktion von Beispielen leicht erhärten.

§ 5.

Die Oszillationstheoreme für die Differentialgleichung $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + r(x))y = 0,\ k(x) \gtreqless 0.$ (Polarer Fall.)

Die im vorstehenden entwickelte Methode gestattet die Behandlung sogenannter *polarer Probleme*. In diesem Paragraphen soll zunächst das einfachste Beispiel eines solchen, nämlich die zu vorgegebenen Greenschen Bedingungen und zur Differentialgleichung

$$(\mathfrak{B}_1) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + r(x))y = 0$$

gehörige Randwertaufgabe betrachtet werden. Dabei wechselt also $k(x)$

*) Siehe die bei Bôcher, l. c. (S. 446) zitierten Arbeiten.

in endlich vielen oder unbegrenzt vielen Stellen des Intervalls a, b sein Vorzeichen. Die Voraussetzungen über $p(x)$, $k(x)$ und $r(x)$ sind im übrigen die gleichen wie in Paragraph 3.

Zunächst lehrt die Betrachtung von $(\mathfrak{B}_1)$, daß zu jeder vorgegebenen Oszillationszahl N immer eine positive Zahl L von folgender Eigenschaft existiert: Für alle positiven und alle negativen Werte des Parameters λ, deren absoluter Betrag nicht kleiner ist als L, ist die Oszillationszahl einer jeden Lösung von $(\mathfrak{B}_1)$ größer als N. Um dies einzusehen, greife man ein Teilintervall von a, b heraus, in dem $\lambda k(x)$, einschließlich der Endpunkte, für $\lambda > 0$ durchweg positiv ist und bestimme (vgl. S. 82) eine Konstante L^+, die für eben dieses Teilintervall und damit auch für das Intervall a, b bezüglich der positiven Werte von λ die oben geforderte Eigenschaft besitzt. Für negative Werte von λ ergibt sich auf Grund einer ähnlichen Betrachtung eine entsprechende Zahl L^-. Die größere der Zahlen L^+ und L^- ist die gesuchte Schranke L.

Eine unmittelbare Folge dieser Tatsache ist, daß *die Randbedingungen nur für diskrete Werte λ erfüllt sein können.* Die ausgezeichneten Parameterwerte ergeben sich nämlich als Nullstellen einer in λ ganzen transzendenten Funktion $\delta(\lambda)$ *); sie liegen daher entweder diskret oder erfüllen die ganze (komplexe) λ-Ebene. Geht man im letzteren Falle von einem beliebigen reellen Werte des Parameters λ und einer zugehörigen ausgezeichneten reellen Lösung von $(\mathfrak{B}_1)$ aus, so müßte sich dieser Wert von λ stetig in jeden anderen überführen lassen, so zwar, daß während des ganzen Verlaufes der Änderung sowohl die Differentialgleichung als die Randbedingungen erfüllt und die auftretenden Parameterwerte λ und die zugehörigen Lösungen von $(\mathfrak{B}_1)$ sämtlich reell sind. Bei einer solchen Änderung würde aber nach dem oben Bewiesenen die ursprüngliche Lösung beliebig viele Nullstellen gewinnen, obwohl dies den Randbedingungen (§ 2) zufolge unmöglich ist.

Nunmehr bilden wir die Schar von Differentialgleichungen $(\mathfrak{A}_1)$:

$$(\mathfrak{A}_1^\lambda) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\nu + \lambda k(x) + r(x))\, y = 0,$$

wobei λ der Hilfsparameter ist, und betrachten das zur gegebenen Greenschen Randbedingung und zu jedem $(\mathfrak{A}_1^\lambda)$ gehörige nichtpolare Oszillationstheorem; die Anzahl negativer ausgezeichneter Parameterwerte sei dann $n(\lambda)$. Die Funktion $n(\lambda)$ von λ besitzt das absolute Minimum n_0 und die Werte Λ, für die $n(\lambda) = n_0$ ist, liegen dem oben Bemerkten zufolge zwischen angebbaren endlichen Grenzen. Eine Teilmenge der Λ bilden die Punkte Λ', in denen gleichzeitig die Mindestzahl von ausgezeichneten Parameterwerten

*) Vgl. D. I., § 3.

$\nu = 0$ erreicht wird. Bei der Bildung von $n(\lambda)$ sind natürlich zweifache negative ausgezeichnete Parameterwerte immer als zwei in Anschlag zu bringen.

Wir verlegen den Nullpunkt der λ-Zählung in eine Stelle Λ' oder, wie der Kürze wegen im folgenden stets gesagt werden soll, wir *normieren den Parameter* λ. Die Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ lautet dann:

$$(\mathfrak{B}_1) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + r_0(x))\, y = 0.$$

(Der Index 0 in r_0 soll anzeigen, daß der Parameter normiert ist.)

Jedem positiven ausgezeichneten Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^0)$ entspricht mindestens ein positiver und ein negativer reeller ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1)$. In der Tat, faßt man irgend einen positiven ausgezeichneten Parameterwert ν_0 von $(\mathfrak{A}_1^0)$ ins Auge, bzw. das Oszillationszahlenpaar, dem er zugehört, so läßt sich, wie oben bewiesen wurde, eine obere Grenze L für die absoluten Beträge der etwa zu diesem Oszillationszahlenpaar gehörigen ausgezeichneten reellen Parameterwerte von $(\mathfrak{B}_1)$ stets angeben. Dem für $(\mathfrak{A}_1^\lambda)$ geltenden nichtpolaren Oszillationstheorem zufolge ist dann jeder diesem Oszillationszahlenpaar entsprechende ausgezeichnete Parameterwert ν_0 von $(\mathfrak{A}_1^\lambda)$ sicher negativ, sobald $|\lambda| \geqq L$ ist. Lassen wir nun λ von Null beginnend beständig wachsen (oder abnehmen), so ändert sich hierbei ν_0 stetig (Hilfssatz Ia), ist für $\lambda = 0$ positiv und wird für $\lambda = \underset{(-)}{+} L$ negativ sein. Da überdies ν_0 stets innerhalb endlicher Grenzen bleibt, muß es mindestens einmal den Wert Null annehmen; dann ist $(\mathfrak{A}_1^\lambda)$ mit $(\mathfrak{B}_1)$ identisch, der zugehörige Wert λ ist ein reeller ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1)$.

Umgekehrt entspricht jedem reellen ausgezeichneten Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1)$ ein ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^0)$. Es erübrigt, um für die reellen ausgezeichneten Parameterwerte von $(\mathfrak{B}_1)$ ein Oszillationstheorem zu gewinnen, die Untersuchung, wie oft jeder positive und jeder negative ausgezeichnete Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^0)$, sowie der etwa vorhandene ausgezeichnete Parameterwert $\nu = 0$ von $(\mathfrak{A}_1^0)$ den Wert Null passiert, wenn entweder λ von Null beginnend beständig wächst oder beständig abnimmt.

In dieser Hinsicht gilt folgender Satz: *Bei wachsendem sowohl als bei abnehmendem λ wechselt jeder positive ausgezeichnete Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^0)$ gerade einmal das Vorzeichen, wenn*

$$(\mathrm{U}) \qquad \lambda_0 \int_a^b k(x)\,(y_0(x))^2\, dx > 0$$

für jeden von Null verschiedenen reellen ausgezeichneten Parameterwert λ_0 und eine zu λ_0 gehörige ausgezeichnete Lösung y_0 von $(\mathfrak{B}_1)$. Unter der

gleichen Voraussetzung bleibt jeder negative ausgezeichnete Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^0)$ bei wachsendem sowohl als bei abnehmendem λ beständig negativ.

Es entspricht dann jedem positiven ausgezeichneten Parameterwert bzw. jeder ausgezeichneten Lösung von $(\mathfrak{A}_1^0)$ nicht mehr als ein reeller ausgezeichneter positiver und negativer Parameterwert bzw. eine reelle ausgezeichnete Lösung von $(\mathfrak{B}_1)$. Keinem der negativen ausgezeichneten Parameterwerte von $(\mathfrak{A}_1^0)$ entspricht ein reeller ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1)$.

Ist noch bekannt, daß der ausgezeichnete Parameterwert $\nu = 0$ *von* $(\mathfrak{A}_1^0)$ *keine weiteren ausgezeichneten Parameterwerte von* $(\mathfrak{B}_1)$ *liefert,* so kann man sagen: *damit für die reellen positiven bzw. negativen ausgezeichneten Parameterwerte von* $(\mathfrak{B}_1)$ *je das gleiche Oszillationstheorem wie für die positiven ausgezeichneten Parameterwerte von* $(\mathfrak{A}_1^0)$ *gilt, ist hinreichend, daß die Bedingung* $(\mathfrak{U})$ *erfüllt ist.*

Zum Beweise sei ν_0 ein ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^\lambda)$, $\nu_0 + \Delta\nu_0$ derjenige ausgezeichnete Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^{\lambda+\Delta\lambda})$, der aus ν_0 bei Änderung von λ in $\lambda + \Delta\lambda$ hervorgeht. Die zugehörigen ausgezeichneten Lösungen seien bzw. y_0 und $y_0 + \Delta y_0$. Da beide den gleichen Greenschen Randbedingungen und bzw. den Differentialgleichungen $(\mathfrak{A}_1^\lambda)$ und

$$(\mathfrak{A}_1^{\lambda+\Delta\lambda}) \quad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d(y_0+\Delta y_0)}{dx}\right) + (\nu_0+\Delta\nu_0+(\lambda+\Delta\lambda)\,k(x)+r_0(x))\,(y_0+\Delta y_0) = 0$$

genügen, ergibt der Greensche Satz:

$$\int_a^b y_0(y_0+\Delta y_0)\,(\Delta\nu_0+\Delta\lambda\cdot k(x))\,dx = 0.$$

λ geht analytisch in die Koeffizienten von $(\mathfrak{A}_1^\lambda)$ ein. Infolgedessen dürfen wir, nach Division mit $\Delta\lambda$, zur Grenze übergehen und erhalten

$$\left(\frac{d\nu_0}{d\lambda}\right)_\lambda = -\frac{\int_a^b k(x)\,(y_0(x))^2\,dx}{\int_a^b (y_0(x))^2\,dx}.$$

Nehmen wir insbesondere $\nu_0 = 0$, so ist $\lambda = \lambda_0$ ein ausgezeichneter Parameterwert, y_0 eine zugehörige ausgezeichnete Lösung von $(\mathfrak{B}_1)$. Ist λ positiv, so wird mithin ν_0 bei zunehmendem λ stets abnehmend durch Null hindurchgehen, wenn

$$(\mathfrak{U}^+) \qquad \int_a^b k(x)\,(y_0(x))^2\,dx > 0.$$

Und das gleiche wird bei abnehmendem, negativen λ stattfinden, wenn

$$(\mathfrak{U}^-) \qquad \int_a^b k(x)\,(y_0(x))^2\,dx < 0.$$

Anders ausgedrückt: wenn ν_0 einmal die Null passiert hat, muß es beständig negativ bleiben, w. z. z. w.

Wir ziehen hieraus noch die weitere Folgerung, daß *für jede zum einfachen ausgezeichneten Parameterwert* $\lambda = 0$ *gehörige ausgezeichnete Lösung* y_0

$$(\mathfrak{U}^0) \qquad \int k(x)\,(y_0(x))^2\,dx = 0$$

wird, *sobald der Parameter normiert ist.* Da die ausgezeichneten Parameterwerte von $(\mathfrak{B}_1)$ diskret liegen, muß nämlich der ausgezeichnete Parameterwert $\nu_0 = 0$ von $(\mathfrak{A}_1^0)$ in der Umgebung von $\lambda = 0$ sicher von Null verschiedene Werte annehmen, und zwar negative, da der Parameter normiert ist. Wäre nun

$$\int_a^b k y_0^2\,dx \neq 0,$$

so ließe sich stets eine Änderung von λ angeben, für die ν_0 positiv würde. Aus dieser Überlegung *folgt in Verbindung mit dem oben Gezeigten gleichzeitig, daß unter Annahme von* $(\mathfrak{U})$ *eine etwa vorhandene, zu* $\nu = 0$ *gehörige ausgezeichnete Lösung von* $(\mathfrak{A}_1^0)$ *zu keinem weiteren von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwert von* $(\mathfrak{B}_1)$ *Anlaß gibt.* Entsprechendes gilt (wenigstens im definiten Fall) für zweifache ausgezeichnete Parameterwerte $\nu_0 = 0$. Die Darstellung berührt sich im Grundgedanken aufs engste mit der von Herrn Hilb*) gegebenen Behandlung Sturmscher Randbedingungen. Vgl. ferner Richardson, l. c., § 1.

Die Ungleichung $(\mathfrak{U})$ besteht *im definiten Falle***) d. h. immer dann, wenn $n_0 = 0$ ist, wenn also *kein ausgezeichneter Parameterwert von* $(\mathfrak{A}_1^0)$ *negativ* ist.

Um dies nachzuweisen bildet man die zu den vorgegebenen Greenschen Randbedingungen und dem Differentialausdruck

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + r_0(x)y$$

gehörige Greensche***) Funktion $G(x, \xi)$; diese gestattet die Darstellung

*) Hilb, Eine Erweiterung des Kleinschen Oszillationstheorems (Jahresb. d. D. Math.-Ver. 1907).

**) Vgl. Hilbert, l. c., 5. Mitt. Für den Fall, daß in der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ der Koeffizient $k(x)$ unbegrenzt viele Nullstellen im Intervall a, b besitzt, vgl. Lichtenstein, Zur Analysis der unendlich vielen Variabeln I. (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XXXVIII, 1914) sowie die Literaturangaben ebenda.

***) Vgl. Hilbert, l. c, 2. Mitt.

$$G(x,\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\nu_j}\varphi_j(x)\varphi_j(\xi). \tag{I}$$

Dabei sind die ν_j die positiven ausgezeichneten Parameterwerte, φ_j die zugehörigen ausgezeichneten Lösungen von $(\mathfrak{A}_1^0)$ und die Darstellung konvergiert gleichmäßig für alle $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq \xi \leqq b$. Je nachdem $\nu = 0$ ein ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{A}_1^0)$ für die gegebenen Randbedingungen ist oder nicht, hat man es mit einer Greenschen Funktion im erweiterten oder im gewöhnlichen Sinne zu tun. Der Beweis für die Gültigkeit dieser Darstellung läßt sich mit Hilfe der Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_1^0)$ allein erbringen, indem man unter Zuhilfenahme asymptotischer Darstellungen für die Lösungen von $(\mathfrak{A}_1^0)$ bei großen Werten von ν das Verhalten von $G(x, \xi; \mu)$ d. h. der zu $L(y)+\mu y$ (für den betreffenden Wert μ) gehörigen Greenschen Funktion untersucht. Der Beweis ergibt sich aus den Untersuchungen von Herrn Birkhoff.*)

Aus den charakteristischen Eigenschaften der Greenschen Funktion (im gewöhnlichen oder erweiterten Sinne) folgt in bekannter Weise die Symmetrie von $G(x, \xi)$ hinsichtlich der beiden Variablen x, ξ; sie ist eine Folge des speziellen Charakters der Randbedingungen. (Die Greensche Funktion im gewöhnlichen Sinne liefert einen abgeschlossenen Kern, die im erweiterten Sinne besitzt, als Kern einer Integralgleichung 2. Art betrachtet, die dem Werte $\nu = 0$ zugehörigen ausgezeichneten Lösungen von $(\mathfrak{A}_1^0)$ und nur diese als Nullösungen.)

Ist ferner $y_0(x)$ eine reelle oder komplexe ausgezeichnete Lösung von $(\mathfrak{B}_1)$, λ_0 der zugehörige von Null verschiedene reelle oder komplexe ausgezeichnete Parameterwert, so gilt

$$y_0(\xi)=\lambda_0\int_a^b G(x,\xi)k(x)y_0(x)\,dx \tag{II}$$

und hieraus folgt

$$\lambda_0\int_a^b k(x)(y_0(x))^2\,dx=\lambda_0^2\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)y_0(x)y_0(\xi)\,dx\,d\xi;$$

außerdem ist für zwei verschiedene ausgezeichnete Parameterwerte λ_1, λ_2 bzw. die ausgezeichneten Lösungen $y_1(x), y_2(x)$

$$\int_a^b k(x)y_1(x)y_2(x)\,dx=0,\qquad \int_a^b\!\!\int G(x,\xi)k(x)k(\xi)y_1(x)y_1(\xi)\,dx\,d\xi=0.$$

---

*) Birkhoff, Boundary value and expansion problems (Trans. Am. Math. Soc., Vol. 9, S. 373 ff.). Birkhoff, Note on the Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations (Rend. Circ. Mat. Palermo, T. XXXVI, S. 115 ff.).

Setzen wir für $G(x, \xi)$ die Entwicklung (I) und integrieren gliedweise, was wegen der gleichmäßigen Konvergenz gestattet ist, so folgt

$$\lambda_0 \int_a^b k(x)(y_0(x))^2 dx = \lambda_0^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_j} \Big[\int_a^b k(x) \varphi_j(x) y_0(x) dx \Big]^2.$$

Da die ν_j alle positiv und, ebenso wie die $\varphi_j(x)$, sämtlich reell sind, so ist für reelle ausgezeichnete Parameterwerte $\lambda_0 \neq 0$ von $(\mathfrak{B}_1)$ tatsächlich (U) erfüllt. Daß $(\mathfrak{B}_1)$ im definiten Falle keine komplexen ausgezeichneten Parameterwerte hat, folgt aus ähnlichen Überlegungen. (Vgl. auch weiter unten.)

Für die definiten Fälle gilt somit der Satz:*) *Normiert man, bei vorgegebenen Randbedingungen, den Parameter der Differentialgleichung* $(\mathfrak{B}_1)$ *und hat dann die nichtpolare Differentialgleichung* $(\mathfrak{A}_1^0)$

$$\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big) + (\nu + r_0(x))y = 0$$

keinen negativen ausgezeichneten Parameterwert, so ist die Gesamtheit sowohl der positiven als der negativen reellen ausgezeichneten Parameterwerte von $(\mathfrak{B}_1)$ *— jede für sich — nach dem nämlichen Oszillationstheorem geordnet, wie die Gesamtheit der positiven ausgezeichneten Parameterwerte der Differentialgleichung* $(\mathfrak{A}_1^0)$.

Damit sind die definiten Fälle erledigt. Im Hinblick auf spätere Anwendung formulieren wir für diese Fälle noch folgenden, dem Hilfssatze Ia entsprechenden

Hilfssatz Ib. *Es sei durch ein festes Greensches System und eine Differentialgleichung*

$$(\mathfrak{B}_1) \qquad \frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dy}{dx}\Big) + (\lambda k(x) + r_0(x))y = 0$$

ein definites polares Problem bestimmt (und der Parameter in $(\mathfrak{B}_1)$ bereits normiert). *Ändert man dann* $(\mathfrak{B}_1)$ *mit Hilfe eines Parameters* ϱ, *der etwa linear in die Koeffizienten von* $(\mathfrak{B}_1)$ *eingeht, in zulässiger Weise, wobei* $k(x)$ *an jeder Stelle des Intervalls* $a \leqq x \leqq b$ *wächst (oder doch nicht abnimmt), so bleibt das Problem definit**), alle positiven ausgezeichneten Parameterwerte nehmen ab oder doch nicht zu; im Verlaufe der Änderung werden positive ausgezeichnete Parameterwerte weder gewonnen noch verloren. Nimmt, unter im übrigen gleichen Voraussetzungen,* $k(x)$ *für alle* $a \leqq x \leqq b$ *ab (oder doch nicht zu), so nehmen die negativen ausgezeichneten Parameterwerte sämtlich zu (sicher nicht ab); keiner von ihnen geht verloren. Etwa vorhandene aus-*

---

*) Vgl. D. I. Teil, § 8.

**) Und kann unter Umständen auch in ein nichtpolares Problem übergehen.

gezeichnete Parameterwerte $\lambda = 0$ *bleiben bei den genannten Änderungen erhalten.*

Daß bei der Änderung das Problem definit bleibt, ist klar. Zum Beweise der übrigen Behauptungen sei etwa

$$(\mathfrak{B}_1^\varrho) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \left(\lambda(k(x) + \varrho\Delta k(x)) + r_0(x)\right)y = 0$$

gesetzt, wobei die stetige Funktion $\Delta k(x)$ der Ungleichung genügt

$$\Delta k(x) \geqq 0, \quad a \leqq x \leqq b.$$

Der Greensche Satz, angewandt auf eine ausgezeichnete Lösung $y_0(x)$ von $(\mathfrak{B}_1^\varrho)$ und die ihr entsprechende Lösung $y_0 + \Delta y_0$ von $(\mathfrak{B}_1^{\varrho + \Delta\varrho})$ ergibt beim Übergang zur Grenze

$$\left(\frac{d\lambda_0}{d\varrho}\right)_\varrho = -\frac{\lambda_0\int\limits_a^b \Delta k(x) y_0{}^2\, dx}{\int\limits_a^b k(x) y_0{}^2\, dx}.$$

Da der Nenner stets von Null verschieden ist, folgt die Behauptung.

Was den *allgemeinen*, also den *nichtdefiniten, polaren Fall* anlangt, so scheint bis jetzt der Nachweis nicht gelungen, daß bei normiertem Parameter ausnahmslos für alle reellen von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerte bzw. die entsprechenden ausgezeichneten Lösungen die Ungleichung $(\mathfrak{U})$ in Geltung bleibt.

Indes kann man durch Betrachtung der Greenschen Funktion im nichtdefiniten Falle wenigstens erkennen, daß es sicher nicht mehr als n_0 reelle von Null verschiedene ausgezeichnete Parameterwerte λ_0 bzw. verschiedene ausgezeichnete Lösungen y_0 geben kann, die eine Ausnahmestellung einnehmen, insofern für sie

$$\lambda_0 \int\limits_a^b k(x)(y_0(x))^2 dx \leqq 0$$

ist. n_0 bedeutet hierbei wie früher die Gesamtzahl verschiedener ausgezeichneter Lösungen von $(\mathfrak{A}_1{}^0)$, die zu negativen ausgezeichneten Parameterwerten gehören, im Falle der Parameter normiert ist. Die folgende Betrachtung wird gleichzeitig eine obere Schranke für die Anzahl komplexer ausgezeichneter Lösungen des polaren Problems liefern.

Wir *beschränken uns vorläufig auf die Betrachtung* **reeller** *ausgezeichneter Parameterwerte*; der Parameter in $(\mathfrak{B}_1)$ sei normiert. Die zu $(\mathfrak{A}_1{}^0)$ und den gegebenen Randbedingungen gehörige Greensche Funktion besitzt n_0 verschiedene zu negativen ausgezeichneten Parameterwerten von $(\mathfrak{A}_1{}^0)$ gehörige Summanden, es ist also

$$\text{(I)} \qquad G(x,\xi) = -\sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{\nu_j}\varphi_j(x)\varphi_j(\xi) + \sum_{\varrho=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{\nu_\varrho}\varphi_\varrho(x)\varphi_\varrho(\xi);$$

die Größen ν_j, ν_ϱ und die Funktionen $\varphi_j(x)$, $\varphi_\varrho(x)$ sind alle reellwertig, die ν_j, ν_ϱ sämtlich positiv.

Aus der Integralgleichung (II) folgt für jeden von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwert λ_0 und die zugehörige ausgezeichnete Lösung wie oben

$$\lambda_0\int_a^b k(x)y_0^2dx = \lambda_0^2\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)y_0(x)y_0(\xi)dx\,d\xi.$$

Für alle reellen von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerte ist also gleichzeitig mit

$$\lambda_0\int_a^b k(x)y_0^2dx \gtreqless 0$$

stets auch

$$J_0 = \int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)y_0(x)y_0(\xi)dx\,d\xi \gtreqless 0.$$

Zunächst werden wir zeigen: es gibt sicher *nicht mehr als n_0 reelle* verschiedene *ausgezeichnete Lösungen*, die reellen von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerten zugehören und *für welche das* (mit den ausgezeichneten Lösungen gebildete) *Doppelintegral $J(y)$ kleiner als Null ist*,

$$\text{(1)} \qquad J(y) = \int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)y(x)y(\xi)dx\,d\xi < 0.$$

Nehmen wir im Gegenteil an, es gebe n_0+1 reelle ausgezeichnete Parameterwerte $\lambda_\tau(\tau = 1, \cdots, n_0+1)$, deren zugehörige ausgezeichnete Lösungen $y_\tau(\tau = 1, \cdots, n_0+1)$ nur negative Integralwerte $J(y_\tau) = J_\tau$ liefern. In der Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n_0+1}$ sind dabei zweifache ausgezeichnete Parameterwerte, für welche zwei verschiedene zugehörige ausgezeichnete Lösungen negative Integralwerte J_τ liefern, zunächst doppelt zu zählen. Außerdem soll sein

$$\text{(2)} \qquad \int_a^b k(x)y_\tau(x)y_\sigma(x)dx = 0 = \int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)y_\tau(x)y_\sigma(\xi)dx\,d\xi.$$

Für $\lambda_\sigma \neq \lambda_\tau$ ist (2) eine direkte Folge aus (II) (S. 89).

Ist im Falle $\lambda_\sigma = \lambda_\tau$ (2) nicht erfüllt, so ersetzen wir y_σ und y_τ durch zwei verschiedene lineare Kombinationen

$$\Phi_\sigma = y_\sigma + cy_\tau, \quad \Phi_\tau = y_\sigma + \gamma y_\tau,$$

welche der Bedingung (2) genüge leisten. Dies ist der Fall, sobald

$$\gamma = \frac{1 - c\eta}{\eta - c}$$

ist, wobei

$$\eta = \int_a^b\int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_\sigma(x) y_\tau(\xi) dx d\xi$$

gesetzt wird. Hierbei sind, was immer möglich ist, y_σ und y_τ so normiert, daß die zugehörigen Integrale J gleich -1 werden.

Außerdem wird dann

$$J(\Phi_\sigma) = \int_a^b\int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi)\, \Phi_\sigma(x)\, \Phi_\sigma(\xi)\, dx\, d\xi = -1 + 2\eta c - c^2,$$

$$J(\Phi_\tau) = \int_a^b\int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi)\, \Phi_\tau(x) \Phi_\tau(\xi) dx d\xi = \frac{1-\eta^2}{(\eta - c)^2}(-1 + 2c\eta - c^2).$$

Sobald also $\eta^2 < 1$ ist, liefert $\lambda_\sigma = \lambda_\tau$ wirklich zwei verschiedene der Forderung (1) genügende ausgezeichnete Lösungen. Im Falle $\eta^2 > 1$ hingegen gibt es im wesentlichen nur eine einzige ausgezeichnete Lösung dieser Art; letztere Eventualität ist daher auszuschließen, während $\eta^2 = 1$ sich den später zu erörternden Fällen unterordnet, in denen ein Teil der Integrale J_τ Null ist.

Jedes lineare Aggregat

$$S(x) = \sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau y_\tau(x) \qquad [c_\tau \text{ nicht alle } 0]$$

von $(n_0 + 1)$ reellen, den Forderungen (1) und (2) ausnahmslos genügenden stetigen Funktionen $y_\tau(\tau = 1, \cdots, n_0 + 1)$ ergibt als zugehörigen Integralwert $J(S)$

$$\begin{aligned} J(S) &= \sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau^2 \int_a^b\int_a^b G(x, \xi) k(x) k(\xi) y_\tau(x)\, y_\tau(\xi)\, dx\, d\xi \\ &= -\sum_{j=1}^{n_0} \frac{1}{v_j}\Big(\sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau \cdot \int_a^b \varphi_j(x) k(x) y_\tau(x) dx\Big)^2 \\ &\quad + \sum_{\varrho=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{v_\varrho}\Big(\sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau \cdot \int_a^b \varphi_\varrho(x) k(x) y_\tau(x) dx\Big)^2 < 0. \end{aligned}$$

Die n_0 Gleichungen

$$\sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau \int_a^b \varphi_j(x) k(x) y_\tau(x) dx = 0, \quad j = 1, \cdots, n_0,$$

sind hinsichtlich der $n_0 + 1$ reellen Größen c_τ linear und homogen, werden

also unter allen Umständen durch (mindestens) ein System von Größen c_τ befriedigt, die nicht sämtlich Null sind. Für ein solches System bzw. das zugehörige $S(x)$ wäre aber

$$J(S) = \sum_{\varrho=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{v_\varrho} \Big(\sum_{\tau=1}^{n_0+1} c_\tau \int_a^b \varphi_\varrho(x)\, k(x)\, y_\tau(x)\, dx \Big)^2 < 0,$$

was unmöglich ist, da in dieser Ungleichung linker Hand nur positive (höchstens verschwindende) Glieder stehen.

Die *Überlegung bleibt anwendbar, wenn* an Stelle der reellen ausgezeichneten Parameterwerte oder eines Teiles derselben *komplexe ausgezeichnete Parameterwerte* $\Lambda_\tau = \Lambda_\tau' + i\Lambda_\tau''$ $(\Lambda_\tau'' \neq 0)$ bzw. die zugehörigen komplexen ausgezeichneten Lösungen $Y_\tau = Y_\tau' + i\,Y_\tau''$ $(Y_\tau'' \neq 0)$ treten. Λ_τ', Y_τ' bzw. $i\Lambda_\tau''$, $i\,Y_\tau''$ bedeuten die reellen bzw. lateralen Bestandteile der Größen Λ_τ und Y_τ. Aus der Problemstellung folgt übrigens, daß zu einem komplexen ausgezeichneten Parameterwert sicher keine reellwertige ausgezeichnete Lösung gehört, ferner daß mit Λ immer auch der konjugiert komplexe Wert $\bar\Lambda = \Lambda' - i\Lambda''$ ausgezeichneter Parameterwert ist. Entspricht dem ausgezeichneten Parameterwert Λ die ausgezeichnete Lösung $Y = Y' + i\,Y''$, so ist die konjugiert komplexe Funktion $\bar{Y} = Y' - i\,Y''$ die zu $\bar\Lambda$ gehörige ausgezeichnete Lösung.

Anstatt (1) genügt es jetzt zu fordern, daß

$$(1') \qquad J_\tau \neq 0;$$

dabei ist

$$\begin{aligned} J_\tau &= \int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\, k(x)\, k(\xi)\, Y_\tau(x)\, Y_\tau(\xi)\, dx\, d\xi \\ &= 2\Big(\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\, k(x)\, k(\xi)\, Y_\tau'(x)\, Y_\tau'(\xi)\, dx\, d\xi \\ &\quad + i \int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\, k(x)\, k(\xi)\, Y_\tau'(x)\, Y_\tau''(\xi)\, dx\, d\xi \Big). \end{aligned}$$

Dies soll jetzt gezeigt werden.

Die Integralgleichung (II) ergibt, da die ausgezeichneten Lösungen $Y_\tau' + i\,Y_\tau''$ und $Y_\tau' - i\,Y_\tau''$ zu verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerten gehören,

$$(1a) \qquad \begin{aligned} &\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\, k(x)\, k(\xi)\, Y_\tau'(x)\, Y_\tau'(\xi)\, dx\, d\xi \\ &= -\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\, k(x)\, k(\xi)\, Y_\tau''(x)\, Y_\tau''(\xi)\, dx\, d\xi. \end{aligned}$$

Ferner ist für jede zu einem reellen ausgezeichneten Parameterwert gehörige reellwertige ausgezeichnete Lösung y_σ die Bedingung erfüllt

$$
\text{(2a)}\qquad
\begin{aligned}
&\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y_\tau'(x)y_\sigma(\xi)\,dx\,d\xi = 0,\\
&\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y_\tau''(x)y_\sigma(\xi)\,dx\,d\xi = 0.
\end{aligned}
$$

Für jeden von Λ_τ und $\bar{\Lambda}_\tau$ verschiedenen komplexen ausgezeichneten Parameterwert Λ_σ hat man

$$
\text{(2b)}\qquad
\begin{aligned}
&\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y_\tau'(x)\,Y_\sigma'(\xi)\,dx\,d\xi = 0,\\
&\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y_\tau''(x)\,Y_\sigma''(\xi)\,dx\,d\xi = 0,\\
&\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y_\tau'(x)\,Y_\sigma''(\xi)\,dx\,d\xi = 0.
\end{aligned}
$$

Existieren hingegen zwei verschiedene zu Λ_τ gehörige ausgezeichnete Lösungen, etwa Y_τ, $Y_{\tau+1}$, so gilt zunächst nur

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\,k(x)\,k(\xi)\,Y_\tau'(x)\,Y_{\tau+1}'(\xi)\,dx\,d\xi\\
&= -\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\,k(x)\,k(\xi)\,Y_\tau''(x)\,Y_{\tau+1}''(\xi)\,dx\,d\xi;\\
&\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\,k(x)\,k(\xi)\,Y_{\tau+1}'(x)\,Y_\tau''(\xi)\,dx\,d\xi\\
&= +\int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi)\,k(x)\,k(\xi)\,Y_{\tau+1}''(x)\,Y_\tau'(\xi)\,dx\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Ist für das Paar Y_τ, $Y_{\tau+1}$ die Bedingung (2b) nicht befriedigt, so ersetzt man wieder Y_τ und $Y_{\tau+1}$ durch zwei verschiedene lineare Kombinationen

$$
Z_\tau = Y_\tau + c\,Y_{\tau+1} \quad\text{und}\quad Z_{\tau+1} = Y_\tau + \gamma\,Y_{\tau+1}
$$
$$
(c \text{ und } \gamma \text{ sind komplexe Konstanten}),
$$

die wiederum ausgezeichnete Lösungen sind und deren reelle bzw. laterale Bestandteile die Bedingungen (2b) erfüllen. Das ist immer möglich. Für Z_τ und $Z_{\tau+1}$ bzw. ihre reellen und lateralen Bestandteile gelten dann außerdem die Gleichungen (1a) und (2a), aber nicht notwendig (1').

Unter den Voraussetzungen (1a), (2a), (2b), (1') läßt sich nun aus jedem System von m komplexen Funktionen $Y_\varrho(\varrho = 1, \cdots m)$ ein System von m reellen stetigen Funktionen z_ϱ bilden, das den Bedingungen (1) und (2) genügt und überdies bezüglich jeder reellen ausgezeichneten Lösung y_τ die Eigenschaft besitzt, daß

$$(2') \qquad \int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,y_\tau(x)\,z_\varrho(\xi)\,dx\,d\xi = 0.$$

Im Falle

$$\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y'_\varrho(x)\,Y'_\varrho(\xi)\,dx\,d\xi \neq 0$$

ist nämlich wegen (1a) entweder $Y'_\varrho(x)$ oder $Y''_\varrho(x)$ der Beitrag, den Y_ϱ zu dem neuen Systeme der z_ϱ liefert. Ist hingegen

$$\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y'_\varrho(x)\,Y'_\varrho(\xi)\,dx\,d\xi$$

$$= -\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y''_\varrho(x)\,Y''_\varrho(\xi)\,dx\,d\xi = 0,$$

so muß wegen (1') sein

$$\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,Y'_\varrho(x)\,Y''_\varrho(\xi)\,dx\,d\xi \neq 0.$$

Es wird also für eine der reellen Größen $c_\varrho = \pm 1$ die Ungleichung gelten

$$\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)k(x)k(\xi)\,(Y'_\varrho(x) + c_\varrho Y''_\varrho(x))(Y'_\varrho(\xi) + c_\varrho Y''_\varrho(\xi))\,dx\,d\xi < 0.$$

$y_\varrho = Y'_\varrho + c_\varrho Y''_\varrho$ ist dann wegen (2b) und (2a) der von Y_ϱ herrührende Bestandteil im Systeme der z_ϱ.

Nun waren aber in dem oben für reelle ausgezeichnete Lösungen durchgeführten Beweis die Eigenschaft (1) und (2) allein wesentlich. Unser Satz gilt daher allgemein für $(n_0 + 1)$ reelle *und* komplexe den Bedingungen (2), (2b) ausnahmslos genügende ausgezeichnete Lösungen, sobald nur für jede von ihnen auch (1) bzw. (1') erfüllt ist.

Der bisher ausgeschlossene Fall, daß für alle ausgezeichnete Lösungen des betrachteten Systems oder auch nur für einen Teil derselben die Integrale J verschwinden, läßt sich immer auf den bereits behandelten Fall negativer bzw. von Null verschiedener Integralwerte J zurückführen.

Zu dem Ende betrachte man die Schar von Differentialgleichungen $(\mathfrak{B}_1)$

$$(\mathfrak{B}_1^\mu) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (\lambda k(x) + r_0(x) - \mu R(x))y = 0$$

in der Umgebung der Stelle $\mu = 0$. $R(x)$ ist hierbei eine stetige reellwertige Funktion von x, und μ ein reeller Hilfsparameter; für $\mu = 0$ erhält man die ursprüngliche Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$. $\lambda = 0$ soll kein ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1)$ sein.

Jeder ausgezeichnete Parameterwert λ_1 von $(\mathfrak{B}_1'')$ ist, als Nullstelle einer in λ und μ ganzen transzendenten, für keinen Wert von μ identisch in λ verschwindenden Funktion $\vartheta(\lambda, \mu)$, eine stetige*) Funktion $\lambda_1(\mu)$ von μ; diese letztere wird im allgemeinen, d. h. von diskret liegenden (reellen) Werten von μ abgesehen**), in der Umgebung einer Stelle $\mu = \mu_0$ durch eine nach positiven, ganzen, steigenden Potenzen von $\mu - \mu_0$ fortschreitende konvergente Reihe dargestellt. Ein gleiches gilt für die zugehörige ausgezeichnete Lösung $y_1(x; \mu)$. Ferner ergibt sich die Existenz einer Umgebung $\varepsilon_0 : |\mu| < \varepsilon_0$ der Stelle $\mu = 0$, in der $\lambda = 0$ kein ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1'')$ ist, wenn dies für $\mu = 0$ nicht der Fall war; in dieser Umgebung bleibt daher die Greensche Funktion $G(x, \xi; \mu)$ des Differentialausdruckes

$$L(y; \mu) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + r_0 y - \mu R y$$

eine regulär-analytische Funktion von μ und besitzt stets die gleiche Anzahl n_0 negativer ausgezeichneter Parameterwerte wie für $\mu = 0$.

Wir lassen im Systeme der $y_\tau(\tau = 1, \cdots, n_0 + 1)$ zuerst nur eine einzige reelle oder komplexe ausgezeichnete Lösung von $(\mathfrak{B}_1)$ zu — sie sei etwa mit y_1 bezeichnet — deren Integral J_1 Null ist. Auf den Fall einer größeren Zahl derartiger Funktionen y_τ übertragen sich die nachstehenden Überlegungen ohne weiteres. Den oben angeführten Stetigkeitssätzen zufolge existiert nun eine positive Größe $\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_0$ derart, daß bei Beschränkung auf Änderungen $|\mu - \mu_0| = |\Delta\mu| \leqq \varepsilon_1$, $(\mu_0 = 0)$, keines der zu y_τ $(\tau = 2, \cdots, n_0 + 1)$ gehörigen Integrale J_τ $(\tau = 2, \cdots)$ verschwindet, und daß keiner der zugehörigen ausgezeichneten Parameterwerte $\lambda_\tau(\tau = 1, \cdots, n_0 + 1)$ verloren geht.

Ändert man demgemäß μ, von Null beginnend, um den reellen Betrag $\Delta\mu$, so wird hierbei $y_1(x; 0)$ in eine andere ausgezeichnete Lösung $y_1(x; \Delta\mu) = y_1(x; 0) + \Delta y_1(x)$, $\lambda_1(0)$ in einen anderen ausgezeichneten Parameterwert $\lambda_1(\Delta\mu) = \lambda_1(0) + \Delta\lambda_1$ übergehen und der Greensche Satz ergibt

$$\text{(III)} \quad \frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\mu}\int_a^b k(x)\, y_1(x; \Delta\mu)\, y_1(x; 0)\, dx = \int_a^b R(x)\, y_1(x; \Delta\mu)\, y_1(x; 0)\, dx.$$

Der Stetigkeit von $\lambda_1(\mu)$ zufolge bleibt der Differenzenquotient $\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\mu}$ endlich, solange $\Delta\mu \neq 0$ ist. Da ferner $y_1(x; \mu)$ nicht identisch in x verschwindet

*) Vgl. D. S. 22. **) Vgl. S. 98 der vorliegenden Arbeit.

und stetige Funktion von μ und x ist, läßt sich bei geeigneter Verfügung über $R(x)$ eine positive Größe ε_2 bestimmen, so daß

$$\int_a^b R(x)\, y_1(x;0)\, y_1(x;\Delta\mu)\, dx \quad \text{und} \quad \int_a^b R(x)(y_1(x;\Delta\mu))^2\, dx$$

von Null verschieden bleiben, solange $|\Delta\mu| \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1$ ist; dabei kann $R(x) \geqq 0\ (a \leqq x \leqq b)$ angenommen werden. Dann folgt aber aus (III), daß $\frac{\Delta\lambda_1}{\Delta\mu}$ mit gegen Null gehendem μ absolut genommen größer wird als jede gegebene positive Größe.

An der Stelle $\mu = 0$, $\lambda = \lambda_1(0)$ sind daher eine endliche Zahl k von Lösungen $\lambda_1^{(h)}(\mu)(h = 1, \cdots, k)$ der Gleichung $0 = \delta(\lambda, \mu)$ verzweigt. *Es ist ein charakteristischer Unterschied des polaren Falles gegenüber dem nichtpolaren, daß derartige Verzweigungsstellen nur im ersteren auftreten können.*

Da die Verzweigungsstellen von $\lambda_1(\mu)$ diskret liegen,*) gibt es eine Umgebung $\varepsilon_3 \leqq \varepsilon_2$ von $\mu = 0$, in welcher, von $\mu = 0$ abgesehen, die Differentialquotienten $\frac{d\lambda_1^{(h)}}{d\mu}\ (h = 1, \cdots, k)$ endlich und stetig bleiben. In dieser Umgebung liefern die Zweige $\lambda_1^{(h)}(\mu)$ verschiedene ausgezeichnete Parameterwerte bzw. verschiedene zugehörige ausgezeichnete Lösungen $y_1^{(h)}(x;\mu)$. Wir schränken überdies ε_3 so ein, daß in der Umgebung $|\lambda - \lambda_1(0)| < \delta$ von $\lambda_1(0)$ außer den Werten $\lambda_1^{(h)}(\mu)$ keine weiteren ausgezeichneten Parameterwerte sich vorfinden, sobald $|\mu| \leqq \varepsilon_3$; $\delta > 0$ ist eine hinreichend kleine, vorgegebene, positive Größe. Im Rahmen dieser Bedingung kann über ε_3 noch so verfügt werden, daß auch für $|\mu| \leqq \varepsilon_3$

$$\int_a^b R(x)\,(y_1^{(h)}(x;\mu))^2\, dx \neq 0, \qquad h = 1, 2, \cdots, k.$$

In der Umgebung ε_3, von $\mu = 0$ abgesehen, ist aber jetzt

$$J_1^{(h)} \neq 0, \quad J_1^{(h)} = \int_a^b\!\!\int_a^b G(x,\xi;\mu)\, k(x)\, k(\xi)\, y_1^{(h)}(x;\mu)\, y_1^{(h)}(\xi;\mu)\, d\xi\, dx,$$

$$\lambda_1^{(h)}(\mu)\int_a^b k(x)\,(y_1^{(h)}(x;\mu))^2\, dx = (\lambda_1^{(h)})^2 J_1^{(h)}, \quad \lambda_1^{(h)} \neq \lambda_1(0), \quad h = 1, \cdots, k.$$

Daß $J_1^{(h)} \neq 0$ ist, ergibt sich aus dem eben Bemerkten, wenn (III) auf eine solche Stelle μ und eine hinreichend benachbarte $\mu + \Delta\mu$ angewandt und der Grenzübergang $\lim(\mu + \Delta\mu) = \mu$ ausgeführt wird.

War $\lambda_1(0)$ ein komplexer ausgezeichneter Parameterwert, so liefert dem eben Bewiesenen zufolge jede reelle Änderung $|\Delta\mu| \leqq \varepsilon_3$ ein System

*) Es folgt dies unter anderem auch daraus, daß $\frac{d\mu}{d\lambda}$ in einer Umgebung von $\lambda = \lambda_1(0)$, $\mu = 0$ eindeutig und stetig ist (vgl. (III)) und nicht identisch verschwindet.

von mindestens $n_0 + 1$ Funktionen y_τ, das die Bedingungen (1), (2) erfüllt. Das gleiche hat statt, wenn $\lambda_1(0)$ reell war und bei einer Änderung $|\Delta\mu| \leqq \varepsilon_3$ einer der Zweige $\lambda_1^{(k)}(\mu)$ komplexe Werte liefert.

War hingegen $\lambda_1(0)$ reell und führen die sämtlichen in $\mu = 0$, $\lambda = \lambda_1(0)$ zusammenhängenden Zweige für eine reelle Änderung von μ zu reellen Werten $\lambda_1^{(k)}(\mu)$, so sind die den beiden kleinsten so entstehenden reellen ausgezeichneten Parameterwerten $\lambda_1^{(1)}(\mu)$, $\lambda_1^{(2)}(\mu)$ entsprechenden (nicht verschwindenden) Integrale $J_1^{(1)}$, $J_1^{(2)}$ von verschiedenem Vorzeichen. Tatsächlich entspricht der ausgezeichnete Parameterwert $\lambda_1(0)$ von $(\mathfrak{B}_1)$ bzw. die ausgezeichnete Lösung $y_1(x; 0)$ dem Nullwerden eines ganz bestimmten ausgezeichneten Parameterwertes $\nu(\lambda = 0, \mu = 0)$ von $(\mathfrak{A}_1^0)$; die (bzw. eine) zu $\nu(0, 0)$ gehörige ausgezeichnete Lösung von $(\mathfrak{A}_1^0)$ werde mit $\varphi(x; \lambda = 0, \mu = 0)$ bezeichnet. Bei genügender Beschränkung der reellen Änderung von μ im Rahmen der Bedingung $|\mu| < \varepsilon_3$ entsprechen die ausgezeichneten Parameterwerte $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$ von $(\mathfrak{B}_1^\mu)$ mit den zugehörigen ausgezeichneten Lösungen $y_1^{(1)}$, $y_1^{(2)}$ sicher der ausgezeichneten Lösung $\varphi(x; \lambda = 0, \mu)$ von

$$(\mathfrak{A}_1^\mu) \qquad \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (r_0(x) - \mu R(x) + \nu)\, y = 0, \quad \nu = \nu(\lambda = 0, \mu),$$

wobei $\varphi(x; \lambda = 0, \mu)$ ihrerseits gerade der Lösung $\varphi(x; \lambda = 0, \mu = 0)$ von $(\mathfrak{A}_1^0)$ entspricht. Zwischen $\lambda_1^{(1)}(\mu)$ und $\lambda_1^{(2)}(\mu)$ findet sich kein weiterer der Lösung $\varphi(x; \lambda = 0, \mu)$ entsprechender reeller ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1^\mu)$, d. h. $\lambda_1^{(1)}(\mu)$ und $\lambda_1^{(2)}(\mu)$ repräsentieren zwei „unmittelbar" aufeinander folgende Vorzeichenwechsel von $\nu(\lambda, \mu)$, bei variablem λ und festem μ. Daraus folgt die Behauptung.

Die übrigen Fälle erledigen sich in ganz entsprechender Weise. Aber auch die bisher festgehaltene Annahme, daß $\lambda = 0$ kein ausgezeichneter Parameterwert sei, ist unwesentlich. Man fordere nämlich, daß $R(x)$ nur positive Werte annehme; das ist, wie schon oben angedeutet, im Rahmen der über $R(x)$ bereits getroffenen Festsetzungen gewiß möglich. Läßt man μ, von Null beginnend, positive Werte annehmen, so wachsen alle ausgezeichneten Parameterwerte ν_ϱ von $(\mathfrak{A}_1^0)$, insbesondere wird also der ausgezeichnete Parameterwert $\nu = 0$ der ursprünglichen Differentialgleichung $(\mathfrak{A}_1^0)$ positiv. Die (gewöhnliche) Greensche Funktion des neuen Problems hat bei normiertem Parameter sicher nicht mehr negative ausgezeichnete Parameterwerte als die (erweiterte) Greensche Funktion des ursprünglichen.

Hätte man unter den zuletzt genannten Annahmen und unter Zugrundelegung etwa eines definiten Falles den Parameter μ in der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1^\mu)$ abnehmen lassen, so wären die ausgezeichneten Parameterwerte $\lambda = 0$ von $(\mathfrak{B}_1)$ in komplexe von $(\mathfrak{B}_1^\mu)$ übergegangen, wie

die obigen Erörterungen erkennen lassen. Damit ist schließlich die Möglichkeit komplexer ausgezeichneter Parameterwerte nachgewiesen.

Werden *zur Abkürzung alle reellen von Null verschiedenen ausgezeichneten Parameterwerte von* $(\mathfrak{B}_1)$, *deren zugehörige ausgezeichnete Lösungen zu nicht-positiven Integralwerten J führen, als* **irregulär**, *alle übrigen als* **regulär** *bezeichnet*, so läßt das gewonnene Ergebnis sich so formulieren: *die Anzahl der Paare konjugiert komplexer vermehrt um die Anzahl der irregulären reellen ausgezeichneten Parameterwerte beträgt insgesamt höchstens* n_0. (Jeder zweifache ausgezeichnete Parameterwert ist hierbei doppelt zu zählen, sofern er zwei irreguläre bzw. zwei verschiedene komplexe ausgezeichnete Lösungen liefert.)

Es gibt also bei vorgegebener Differentialgleichung und vorgegebenen Randbedingungen *immer einen positiven ausgezeichneten Parameterwert* N_0 *von* $(\mathfrak{A}_1^0)$ von der Eigenschaft, daß für alle reellen ausgezeichneten Lösungen y_j und die zugehörigen ausgezeichneten Parameterwerte λ_j von $(\mathfrak{B}_1)$, die N_0 oder größeren positiven ausgezeichneten Parameterwerten von $(\mathfrak{A}_1^0)$ entsprechen,

$$\lambda_j \int_a^b k y_j^2 \, dx > 0$$

ist. Jedem ausgezeichneten Parameterwert $\mathsf{N} \geqq \mathsf{N}_0$ von $(\mathfrak{A}_1^0)$ entspricht ein und nur ein positiver sowie ein und nur ein negativer ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1)$. Mit anderen Worten: *oberhalb der zu* N_0 *gehörigen Oszillationszahl gilt das Oszillationstheorem des definiten Falles.**)

Entsprechen nun dem (reellen) ausgezeichneten Parameterwert $\nu_0 < \mathsf{N}_0$ von $(\mathfrak{A}_1^0)$, wobei $\nu_0 > 0$ (bzw. $\nu_0 < 0$), im ganzen l verschiedene reelle positive ausgezeichnete Parameterwerte $\lambda_0^{(k)}$ $(k=1,\cdots,l)$ von $(\mathfrak{B}_1)$ und finden sich unter diesen im ganzen m reguläre $\lambda^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, m)$ und n irreguläre $\bar{\lambda}_0^{(j)}$ $(j = 1, \cdots, n)$, so ist neben $l = m + n$ stets $m - 1 \leqq n$, bzw. $m \leqq n$. Sind nämlich die irregulären ausgezeichneten Parameterwerte $\bar{\lambda}_0^{(j)}$ der Größe nach geordnet $\bar{\lambda}_0^{(1)} < \bar{\lambda}_0^{(2)} < \cdots < \bar{\lambda}_0^{(n)}$, so kann zwischen $\bar{\lambda}_0^{(j)}$ und $\bar{\lambda}_0^{(j+1)}$ immer höchstens ein regulärer ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B}_1)$ liegen, der gleichfalls dem ν_0 entspricht. Außerdem kann höchstens ein (bzw. kein) regulärer Parameterwert kleiner sein als $\bar{\lambda}_0^{(1)}$, höchstens einer größer als $\bar{\lambda}_0^{(n)}$: dies folgt aus den eingangs des § 5 angestellten Überlegungen. Nun ist aber $(m-1)$ bzw. m gerade der Überschuß regulärer ausgezeichneter Parameterwerte über die durch das nicht gestörte Oszillationstheorem geforderte Anzahl 1 bzw. 0. Dieser Überschuß beträgt mithin insgesamt nicht mehr als

$$\sum n \leqq n_0,$$

*) Nicht entschieden ist, ob irreguläre (reelle) ausgezeichnete Parameterwerte wirklich auftreten.

die Summe linker Hand erstreckt über alle Gruppen reeller ausgezeichneter Parameterwerte von $(\mathfrak{B}_1)$, die irreguläre ausgezeichnete Parameterwerte enthalten, und deren jede einem einzigen ausgezeichneten Parameterwert $\nu_0 \gtrless 0$ bzw. der zugehörigen ausgezeichneten Lösung von $(\mathfrak{A}_1^0)$ entspricht.

Unter anderem ergibt sich also: *Liegt ein polares Problem vor, gegeben durch ein Paar Greenscher Randbedingungen und eine Differentialgleichung* $(\mathfrak{B}_1)$, *deren Parameter normiert sei, und besitzt das zu* $(\mathfrak{A}_1^0)$ *und den gleichen Randbedingungen gehörige nichtpolare Problem gerade* n_0 *negative, aber keine verschwindenden ausgezeichneten Parameterwerte, so ist die Gesamtheit der positiven sowohl als der negativen ausgezeichneten Parameterwerte von* $(\mathfrak{B}_1)$ *— jede für sich — nach dem gleichen Oszillationstheorem geordnet wie die der positiven ausgezeichneten Parameterwerte von* $(\mathfrak{A}_1^0)$, *sobald man von höchstens* n_0 *irregulären und höchstens* n_0 *regulären (positiven und negativen, insgesamt also von höchstens* $2n_0$ *reellen) ausgezeichneten Parameterwerten des polaren Problems absieht.*

§ 6.

Das Oszillationstheorem für definite polare Fälle der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + q(x, \lambda)\, y = 0$.

Zum Schlusse soll mit den entwickelten Methoden noch eine Verallgemeinerung des Oszillationstheorems im definiten polaren Falle (§ 5) behandelt werden. Hierbei schlagen wir im wesentlichen den gleichen Weg ein, der auch bei der Untersuchung in § 4 zum Ziele führte. Auch hier kommen nur reelle Werte des Parameters λ in Betracht.

Es sei ein System Greenscher Randbedingungen und die Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + q(x, \lambda) y = 0$$

gegeben. Über den Koeffizienten $q(x, \lambda)$ von $(\mathfrak{B})$ werden dabei folgende Voraussetzungen gemacht.

Bedingung $(\mathfrak{B})$ 1. $q(x, \lambda)$ und $\frac{\partial q(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ sind eindeutige, stetige, für reelle Werte von x und λ reellwertige Funktionen von x und λ.

2. $\frac{\partial q(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ nimmt, als Funktion von λ betrachtet, also bei festgehaltenem x, mit wachsendem λ sicher nicht ab.

3. Für die Punkte x mindestens eines festen Teilintervalles ξ_1, ξ_2 $(a \leqq \xi_1 < \xi_2 \leqq b)$ ist $\lim\limits_{\lambda = +\infty} q(x, \lambda) = +\infty$. Für die Punkte mindestens eines festen Teilintervalles η_1, η_2 $(\eta_1 < \eta_2)$ ist $\lim\limits_{\lambda = -\infty} q(x, \lambda) = +\infty$.

Zuerst bildet man die Schar von Differentialgleichungen $(\mathfrak{A}_1)$

$$(\mathfrak{A}_1^\varrho) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (\nu + q(x, \varrho))y = 0,$$

wobei also ϱ ein Hilfsparameter ist, und betrachtet das durch $(\mathfrak{A}_1^\varrho)$ und die gegebenen Randbedingungen bestimmte Oszillationstheorem. Λ sei ein Wert von ϱ, für welchen dieses Oszillationstheorem die, für alle möglichen Werte von ϱ auftretende, Mindestanzahl negativer ausgezeichneter Parameterwerte ν aufweist. Wird ein Wert Λ, für den $\nu = 0$ die geringste Anzahl ausgezeichneter Lösungen von $(\mathfrak{A}_1^\Lambda)$ liefert, als Nullpunkt der Zählung des Parameters λ gewählt, so heißt, wie früher, *der Parameter* in $(\mathfrak{B})$ *normiert.*

Im folgenden wird *die Annahme zugrunde gelegt, daß in bezug auf die gegebenen Randbedingungen kein ausgezeichneter Parameterwert von* $(\mathfrak{A}_1^0)$ *Null oder negativ ist, sobald der Parameter in* $(\mathfrak{B})$ *normiert wird.*

$(\mathfrak{B})$ kann unter dieser Voraussetzung *nicht mehr als zwei ausgezeichnete Lösungen* besitzen, die *zum gleichen Paare* durch die Randbedingungen einander zugeordneter *Oszillationszahlen und zu positiven ausgezeichneten Parameterwerten* λ gehören. Seien im Gegenteil $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ drei einfache, zum betrachteten Oszillationszahlenpaar gehörige positive ausgezeichnete Parameterwerte von $(\mathfrak{B})$. Zufolge der Voraussetzungen über $q(x, \lambda)$ kann man

$$(1') \qquad q(x, \lambda_j) = \lambda_j k_j(x) + q(x, 0) \ \left(\geqq \lambda_j \left(\frac{\partial q(x, \varrho)}{\partial \varrho}\right)_{\varrho = 0} + q(x, 0)\right), \qquad a \leqq x \leqq b, \quad j = 1, 2, 3,$$

setzen, wenn

$$k_j(x) = \frac{1}{\lambda_j}\int_0^{\lambda_j} \frac{\partial q(x, \varrho)}{\partial \varrho}\, d\varrho, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Da nun $\frac{\partial q}{\partial \lambda}$ mit wachsendem λ sicher nicht abnimmt, so gilt

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial q(x, \varrho)}{\partial \varrho}\right)_{\varrho = 0} \leqq k_1(x) \leqq k_2(x) \leqq k_3(x), \qquad a \leqq x \leqq b.$$

Zum Beweise benutzt man den Mittelwertsatz für Integrale.

Die Greenschen Probleme, die aus den gegebenen Randbedingungen und den Differentialgleichungen $(\mathfrak{B}_1^{\lambda_j})$

$$(\mathfrak{B}_1^{\lambda_j}) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda k_j(x) + q(x, 0))y = 0, \qquad j = 1, 2, 3,$$

sich ergeben, sind entweder nichtpolar oder polar definit und liefern die positiven ausgezeichneten Parameterwerte bzw. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Den Ungleichungen (1) zufolge kann man stets durch eine zulässige Änderung von der in Hilfssatz Ia bzw. Ib charakterisierten Art $(\mathfrak{B}_1^{\lambda_1})$ in $(\mathfrak{B}_1^{\lambda_2})$ und diese wieder in $(\mathfrak{B}_1^{\lambda_3})$ überführen. Dabei nehmen die positiven ausgezeichneten

Parameterwerte dieser Differentialgleichungen sicher nicht zu und es findet kein Gewinn oder Verlust von solchen ausgezeichneten Parameterwerten bzw. ausgezeichneten Lösungen statt. Die zulässige Änderung würde demnach ergeben, daß $(\mathfrak{B}_1^{\lambda_0})$ drei verschiedene, dem gleichen Paare von Oszillationszahlen entsprechende reelle ausgezeichnete Lösungen besitzt. Dies widerspricht aber dem für die positiven ausgezeichneten Parameterwerte von $(\mathfrak{B}_1^{\lambda_0})$ geltenden Oszillationstheorem (des nichtpolaren bzw. des polaren definiten Falles). Die Annahme, daß etwa $\lambda_1 = \lambda_2$ ein zweifacher ausgezeichneter Parameterwert von $(\mathfrak{B})$ ist, schließt, wie ebenso gezeigt wird, die Existenz eines davon verschiedenen ausgezeichneten Parameterwertes λ_3 aus. In gleicher Weise wird der Satz für negative Werte von λ bewiesen.

$(\mathfrak{B})$ *besitzt aber auch die sämtlichen*, durch das Oszillationstheorem für den definiten Fall der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ geforderten, *ausgezeichneten Lösungen* bzw. ausgezeichneten Parameterwerte. Das läßt sich wie im § 5 unter Benutzung der Ergebnisse von § 4 nachweisen, wesentlich auf Grund der über $\lim\limits_{\lambda=(\pm)\infty} q(x, \lambda)$ gemachten Annahme.

Den oben angestellten Betrachtungen läßt sich noch folgendes entnehmen. Jeder positive ausgezeichnete Parameterwert λ_0 von $(\mathfrak{B})$ läßt sich gleichzeitig auffassen als positiver ausgezeichneter Parameterwert des entsprechenden durch die Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1^{\lambda_0})$

$$(\mathfrak{B}_1^{\lambda_0})\quad \frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda k_0(x) + q(x, 0))y = 0, \quad k_0(x) = \frac{1}{\lambda_0}\{q(x, \lambda_0) - q(x, 0)\},$$

bestimmten (nichtpolaren oder polaren definiten) Randwertproblems. Mithin gilt für die zugehörige ausgezeichnete Lösung y_0

$$\lambda_0 \int_a^b k_0(x)\,(y_0(x))^2\,dx > 0;$$

andererseits ist

$$k_0(x) \leqq \left(\frac{\partial q(x, \varrho)}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\lambda_0}.$$

Daher ergibt sich

$$(\mathfrak{U})\qquad \lambda_0 \int_a^b \left(\frac{\partial q(x, \lambda)}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} (y_0(x))^2\,dx > 0.$$

$(\mathfrak{U})$ ist auch für negative ausgezeichnete Parameterwerte λ_0 von $(\mathfrak{B})$ richtig.

Wir fassen das Ergebnis folgendermaßen zusammen:

Für die reellen positiven sowohl als für die negativen ausgezeichneten Parameterwerte von $(\mathfrak{B})$ *gilt unter der Voraussetzung, daß der Parameter in* $(\mathfrak{B})$ *normiert und daß kein ausgezeichneter Parameterwert von* $(\mathfrak{A}_1^0)$ *Null oder negativ ist, je das nämliche Oszillationstheorem wie für die positiven ausgezeichneten Parameterwerte von* $(\mathfrak{A}_1^0)$. *Jeder reelle (von Null verschiedene)*

ausgezeichnete Parameterwert λ_0 von ($\mathfrak{B}$) genügt mit der zugehörigen ausgezeichneten Lösung y_0 der Ungleichung

$$\lambda_0 \int_a^b \left(\frac{\partial q(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} (y_0(x))^2\, dx > 0 .$$

Auf die Frage, wie die Verhältnisse sich für den Fall gestalten, daß p von λ abhängt, ferner inwieweit die Bedingungen ($\mathfrak{B}$) als notwendig für die Existenz des Oszillationstheorems anzusehen sind (vgl. § 4) soll nicht eingegangen werden.

Schlußbemerkung.

Zum Schlusse mag auf weitere Anwendungen der entwickelten Methoden hingewiesen werden.

Für die (sich selbst adjungierte) Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p(x)\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + \lambda q(x) y = 0, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0, \quad a \leqq x \leqq b,$$

und eine Reihe von speziellen Greenschen Randbedingungen lassen sich auf ähnlichem Wege Oszillationstheoreme gewinnen*). Durch entsprechende Modifikation der Betrachtungen des § 4 vorliegender Arbeit übertragen sich diese Sätze auf Differentialgleichungen, deren Koeffizienten allgemeinere Funktionen von λ sind. Auch die Randbedingungen können dann noch von λ abhängen. Hierher gehören unter anderem gewisse Probleme, deren Behandlung man Liouville**) verdankt.

Würzburg, 1. Oktober 1913.

---

*) Vgl. D. II. Teil.

**) Vgl. Liouville, J. de Math. (1) 3 (1838), S. 561; hierzu auch Birkhoff, Annals of Math. (2), Bd. 12, S. 103ff.

Über unendlich kleine isometrische Verbiegungen einer Fläche mit höherer als erster Näherung.

Von

MAX LAGALLY in München.

Einleitung.

Während sich das Problem der allgemeinen Verbiegung einer Fläche unter Erhaltung des Krümmungsmaßes nur für ganz wenige Flächenfamilien durchführen läßt, und während selbst die Angabe diskreter Transformationen, welche aus einer Ausgangsfläche neue Flächen von gleichem Krümmungsmaß ableiten lassen, nur in wenigen Fällen möglich ist, läßt sich die einfachere Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen mit erster Näherung für unendlich viele Familien von Flächen lösen. Der Zusammenhang des Problems der unendlich kleinen Verbiegungen mit den Weingartenschen Strahlensystemen führt zu der Möglichkeit, mittels der Moutardschen Transformation aus jeder Familie von Flächen, für welche das Problem der unendlich kleinen Verbiegungen lösbar ist, unendlich viele andere von gleicher Eigenschaft abzuleiten. Der Versuch, durch schrittweise Näherung zu endlichen Verbiegungen überzugehen, scheint bisher nicht gemacht worden zu sein und bereitet auch offenbar große Schwierigkeiten. Dagegen läßt sich, wie im folgenden gezeigt wird, wenigstens die 2. Näherung behandeln, indem die allgemeinen Isometrien einer Fläche durch Hinzufügung eines Korrektionsgliedes derart abgeändert werden, daß das Linienelement mit dem der Ausgangsfläche bis auf Größen 3. Ordnung übereinstimmt. Die Lösung dieses Problems hängt von der Auffindung eines partikulären Integrales einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit zweitem Glied ab, deren vollständiges Integral ohne zweites Glied bereits bekannt ist. Die so erhaltenen Flächen werden, wenn man an Stelle des unendlich kleinen Parameters der Deformation eine zwar kleine, aber endliche Größe setzt, auf die Ausgangsfläche mit

großer Annäherung abwickelbar sein, mit weit größerer Näherung jedenfalls als die mittels der gewöhnlichen unendlich kleinen Verbiegungen um einen endlichen Betrag deformierten Flächen.

Vorbereitende Formeln und Weingartensche Theorie.

Bezeichnet man mit x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Ausgangsfläche und mit

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= x + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \cdots \\ y' &= y + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \cdots \\ z' &= z + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^3 z_3 + \cdots, \end{aligned}$$

die Koordinaten einer durch Verbiegung aus ihr hervorgegangenen Fläche, wobei ε eine beliebige Konstante, $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ usw. noch unbekannte Funktionen sind, so muß das Linienelement der verbogenen Fläche dem der Ausgangsfläche gleich sein:

$$\sum dx'^2 = \sum dx^2.$$

Andererseits ist

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sum dx'^2 = \sum dx^2 &+ \varepsilon \sum dx\, dx_1 + \varepsilon^2 [2 \sum dx\, dx_2 + \sum dx_1^2] \\ &+ \varepsilon^3 [2 \sum dx\, dx_3 + 2 \sum dx_1\, dx_2] \\ &+ \varepsilon^4 [2 \sum dx\, dx_4 + 2 \sum dx_1\, dx_3 + \sum dx_2^2] + \cdots. \end{aligned}$$

Also müssen die Faktoren sämtlicher Potenzen von ε verschwinden. Wenn nur der erste derselben

$$\sum dx\, dx_1 = 0$$

ist und ε so klein genommen wird, daß alle Potenzen von ε außer der ersten zu vernachlässigen sind, so hat man das gewöhnliche Problem der unendlich kleinen Verbiegungen. Es ist bekannt, daß man dieser Aufgabe auch eine Fragestellung in endlicher Form unterlegen kann: Bezeichnet man mit x_1, y_1, z_1 die Koordinaten einer Fläche, so entspricht sie der gegebenen Fläche durch Orthogonalität der Elemente.

Die 2. Näherung fordert die Bestimmung dreier Funktionen x_2, y_2, z_2 zufolge der Gleichung

$$(2\text{a})\qquad 2 \sum dx\, dx_2 + \sum dx_1^2 = 0.$$

Wie man sieht, unterscheidet sie sich von der vorigen durch das Vorhandensein eines zweiten Gliedes; Aufgaben dieser Art hat hauptsächlich Voß*) behandelt, der bei der Untersuchung unendlich kleiner *nicht*-iso-

*) Insbes. Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformation einer Fläche, Sitzungsberichte der math. phys. Klasse der k. bayr. Akademie der Wissensch. 1904.

metrischer Flächendeformationen bereits beim ersten Schritt Gleichungen mit zweitem Glied erhält. Während bei Voß das zweite Glied den „Charakter“ der Deformation bestimmt und also das von vornherein gegebene ist, ergibt es sich bei unserer Aufgabe als Funktion der Lösung des ersten Schrittes der isometrischen Deformation.

Man kann auch an Stelle des 2. Schrittes der Verbiegung eine andere Aufgabestellung wählen. Weil

$$(2\text{b})\quad \sum(dx+\varepsilon dx_1)(dx_1+2\varepsilon dx_2) \\ =\sum dx\,dx_1+\varepsilon\left[\sum dx_1^2+2\sum dx\,dx_2\right]+\varepsilon^2\cdots$$

ist, *führt die Frage nach denjenigen Flächen, welche der unendlich wenig verbogenen Ausgangsfläche durch Orthogonalität der Elemente entspricht, ebenfalls auf die Gleichung*

$$\sum dx\,dx_2+\sum dx_1^2=0.$$

Es läßt sich zeigen, daß auch für die weiteren Schritte der Verbiegung ein ähnlicher Satz gilt. Bezeichnet man mit

$$\bar{x}=x+\varepsilon x_1+2\varepsilon^2x_2+4\varepsilon^3x_3+8\varepsilon^4x_4+\cdots$$

und

$$\bar{\bar{x}}=x_1+2\varepsilon x_2+4\varepsilon^2x_3+8\varepsilon^3x_4+16\varepsilon^4x_5+\cdots$$

nebst analogen Ausdrücken für $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{\bar{y}}$, $\bar{\bar{z}}$ zwei Flächen, die einander durch Orthogonalität der Elemente entsprechen sollen für jeden Wert von ε, so muß

$$\sum d\bar{x}\,d\bar{\bar{x}}=0$$

sein. Daraus folgt:

$$\sum dx\,dx_1+\varepsilon\left[2\sum dx\,dx_2+\sum dx_1^2\right]+\varepsilon^2\left[4\sum dx\,dx_3+4\sum dx_1dx_2\right] \\ +\varepsilon^3\left[8\sum dx\,dx_4+8\sum dx_1\,dx_3+4\sum dx_2^2\right]+\varepsilon^4\cdots=0.$$

Man sieht, daß die Glieder dieser Gleichung, die sämtlich verschwinden müssen, sich jeweils nur um einen Zahlenfaktor von denen der Gleichung (2) unterscheiden, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, bis zu beliebig hoher Ordnung. *Man kann also an Stelle der einzelnen Schritte der Verbiegung auch die Bestimmung einer Fläche* ($\bar{\bar{x}}$) *setzen, welche der mittels der bereits bekannten Zusatzglieder in geeigneter Weise veränderten Ausgangsfläche* ($\bar{x}$) *durch Orthogonalität der Elemente entspricht.*

Weingarten*) hat die Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen einer Fläche auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung zurückgeführt. Es sei

*) Crelles Journal Bd. 100. In der Bezeichnung habe ich mich, soweit möglich, an die Vorlesungen über Differentialgeometrie von L. Bianchi angeschlossen. Die zitierten Seitenzahlen beziehen sich auf die 1. Auflage der deutschen Ausgabe.

$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ das Linienelementquadrat der Fläche,
$d\sigma^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$ das des sphärischen Bildes,
$D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2$ die zweite Fundamentalform,
$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}$ das Gaußsche Krümmungsmaß,
x, y, z die Koordinaten der Fläche,
X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen,
$\left\{ {i\,k \atop l} \right\}$ und $\left\{ {i\,k \atop l} \right\}'$ die für das Linienelement der Fläche bzw. der Bildkugel berechneten Christoffelschen Symbole zweiter Art.

Dann läßt sich die Weingartensche „charakteristische Gleichung" in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} & D''\left[\varphi_{uu} - \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\}' \varphi_u - \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\}' \varphi_v + e\varphi\right] \\ (3) \qquad & - 2D'\left[\varphi_{uv} - \left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}' \varphi_u - \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\}' \varphi_v + f\varphi\right] \\ & + D\left[\varphi_{vv} - \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\}' \varphi_u - \left\{ {2\,2 \atop 2} \right\}' \varphi_v + g\varphi\right] = 0 \end{aligned}$$

oder, wenn zur Abkürzung die in den eckigen Klammern stehenden Differentialausdrücke mit $\Delta_{11}(\varphi)$, $\Delta_{12}(\varphi)$, $\Delta_{22}(\varphi)$ bezeichnet werden:

$$(3a) \qquad D''\Delta_{11}(\varphi) - 2D'\Delta_{12}(\varphi) + D\Delta_{22}(\varphi) = 0.$$

Führt man noch den Abstand W der Tangentialebene vom Anfangspunkt ein, so ist

$$\begin{aligned} -D &= W_{uu} - \left\{ {1\,1 \atop 1} \right\}' W_u - \left\{ {1\,1 \atop 2} \right\}' W_v + eW = \Delta_{11}(W) \\ -D' &= W_{uv} - \left\{ {1\,2 \atop 1} \right\}' W_u - \left\{ {1\,2 \atop 2} \right\}' W_v + fW = \Delta_{12}(W) \\ -D'' &= W_{vv} - \left\{ {2\,2 \atop 1} \right\}' W_u - \left\{ {2\,2 \atop 2} \right\}' W_v + gW = \Delta_{22}(W), \end{aligned}$$

wodurch die charakteristische Gleichung die Form

$$(3b) \qquad \Delta_{22}(W)\Delta_{11}(\varphi) - 2\Delta_{12}(W)\Delta_{12}(\varphi) + \Delta_{11}(W)\Delta_{22}(\varphi) = 0$$

annimmt. Sie läßt eine Reziprozität zwischen zwei Flächen mit gleichem sphärischen Bild und dem Abstand W bzw. φ der Tangentialebene vom Anfangspunkt erkennen, derart, daß dieser Abstand bei jeder der beiden Flächen zugleich eine Lösung der Verbiegungsgleichung für die andere Fläche ist.

$$\Delta_{11}(\varphi) = D_0, \quad \Delta_{12}(\varphi) = D_0', \quad \Delta_{22}(\varphi) = D_0''$$

sind die 2. Fundamentalgrößen der bei der Verbiegung der gegebenen Fläche mittels der charakteristischen Funktion φ „assoziierten" Fläche.

Die Zuwächse der Koordinaten der Fläche bei einer unendlich kleinen Verbiegung, $\varepsilon \cdot \bar{x}$, $\varepsilon \cdot \bar{y}$, $\varepsilon \cdot \bar{z}$, wo $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Koordinaten einer durch Orthogonalität der Elemente zugeordneten Fläche sind, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \bar{x}_u &= \frac{1}{K\sqrt{EG-F^2}}\left[D(\varphi X_v - X\varphi_v) - D'(\varphi X_u - X\varphi_u)\right] \\ \bar{x}_v &= \frac{1}{K\sqrt{EG-F^2}}\left[D'(\varphi X_v - X\varphi_v) - D''(\varphi X_u - X\varphi_u)\right] \end{aligned}$$

und entsprechend für $\bar{y}$ und $\bar{z}$.

Die Variationen der Fundamentalgrößen 2. Art bei einer unendlich kleinen Verbiegung.

Gemäß der Stellung der Aufgabe erleiden bei einer unendlich kleinen Verbiegung der Fläche die ersten Fundamentalgrößen E, F, G und ebenso das Krümmungsmaß K nur Änderungen, die von höherer als erster Ordnung unendlich klein sind. Dagegen gehen die zweiten Fundamentalgrößen D, D', D'' in $D + \varepsilon \cdot \delta D$, $D' + \varepsilon \cdot \delta D'$, $D'' + \varepsilon \cdot \delta D''$ über; wegen der Erhaltung des Krümmungsmaßes muß

$$(D + \varepsilon \cdot \delta D)(D'' + \varepsilon \cdot \delta D'') - (D' + \varepsilon \cdot \delta D')^2 = DD'' - D'^2$$

sein bis auf Größen 2. Ordnung; also

$$(5)\qquad D \cdot \delta D'' + D'' \cdot \delta D - 2D' \cdot \delta D' = 0.$$

Für die Berechnung dieser Variationen δD, $\delta D'$, $\delta D''$ ist die Kenntnis der Variationen δX, δY, δZ der Richtungskosinus der Normalen X, Y, Z erforderlich. Da

$$X + \varepsilon \cdot \delta X = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} y_u + \varepsilon\bar{y}_u & z_u + \varepsilon\bar{z}_u \\ y_v + \varepsilon\bar{y}_v & z_v + \varepsilon\bar{z}_v \end{vmatrix}$$

ist, ergeben sich die Gleichungen

$$\sum (X + \varepsilon\delta X)(x_u + \varepsilon\bar{x}_u) = 0,$$
$$\sum (X + \varepsilon\delta X)(x_v + \varepsilon\bar{x}_v) = 0.$$

Die Glieder erster Ordnung sind:

$$\sum X\bar{x}_u + \sum \delta X \cdot x_u = 0,$$
$$\sum X\bar{x}_v + \sum \delta X \cdot x_v = 0.$$

Nun ist

$$\sum X\bar{x}_u = \frac{-D\varphi_v + D'\varphi_u}{K\cdot\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\sum X\bar{x}_v = \frac{-D'\varphi_v + D''\varphi_u}{K\cdot\sqrt{EG-F^2}},$$

also

$$\sum \delta X \cdot x_u = \frac{D\varphi_v - D'\varphi_u}{K\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\sum \delta X \cdot x_v = \frac{D'\varphi_v - D''\varphi_u}{K\sqrt{EG-F^2}}.$$

Außerdem folgt aus $\sum X^2 = 1$ und $\sum (X + \varepsilon \cdot \delta X)^2 = 1$:

$$\sum \delta X \cdot X = 0;$$

man hat also zur Bestimmung von δX, δY, δZ drei lineare Gleichungen, die durch

$$\delta X = \frac{X_v \varphi_u - X_u \varphi_v}{K\sqrt{EG-F^2}} \tag{6}$$

und analoge Ausdrücke für δY und δZ erfüllt werden.

Nach der Definition der Fundamentalgrößen 2. Art ist

$$\begin{aligned} D + \varepsilon \cdot \delta D &= -\sum (X_u + \varepsilon \delta X_u)(x_u + \varepsilon \bar{x}_u) \\ &= D - \varepsilon \left[\sum X_u \bar{x}_u + \sum \delta X_u x_u\right], \\ \delta D &= -\sum X_u \bar{x}_u - \sum \delta X_u x_u. \end{aligned}$$

Durch Differenzieren erhält man

$$\begin{aligned} \delta X_u = X_{uv}\left(\frac{\varphi_u}{K\sqrt{EG-F^2}}\right) - X_{uu}\left(\frac{\varphi_v}{K\sqrt{EG-F^2}}\right) \\ + X_v \frac{\varphi_{uu}}{K\sqrt{EG-F^2}} - X_u \frac{\varphi_{uv}}{K\sqrt{EG-F^2}} + (X_v \varphi_u - X_u \varphi_v) \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{K\sqrt{EG-F^2}}. \end{aligned}$$

Die Richtungskosinus der Normalen genügen den drei partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' X_u + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' X_v - eX, \\ X_{uv} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' X_u + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' X_v - fX, \\ X_{vv} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' X_u + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' X_v - gX \end{aligned} \tag{7}$$

und sind deshalb partikuläre Integrale der charakteristischen Gleichu ng außerdem ist

$$K\sqrt{EG-F^2} = \pm\sqrt{eg-f^2}, \tag{8}$$

jenachdem das Krümmungsmaß positiv oder negativ ist; ferner

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{eg-f^2}} &= \frac{-1}{\sqrt{eg-f^2}}\left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'\right] \\ \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{eg-f^2}} &= \frac{-1}{\sqrt{eg-f^2}}\left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Man erhält durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\delta X_u = \frac{1}{K\sqrt{EG-F^2}}\Big[&\left(\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' X_u + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' X_v - fX\right)\varphi_u \\
&- \left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}' X_u + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}' X_v - eX\right)\varphi_v \\
&+ X_v\varphi_{uu} - X_u\varphi_{uv} - (X_v\varphi_u - X_u\varphi_v)\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\right)\Big] \\
= \frac{1}{K\sqrt{EG-F^2}}\Big[&- X_u\left(\varphi_{uv} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\varphi_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\varphi_v\right) \\
&+ X_v\left(\varphi_{uu} - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\varphi_u - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\varphi_v\right) + X(e\varphi_v - f\varphi_u)\Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum \delta X_u x_u = \frac{1}{K\sqrt{EG-F^2}}\Big[&D\left(\varphi_{uv} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\varphi_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\varphi_v\right) \\
&- D'\left(\varphi_{uu} - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\varphi_u - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\varphi_v\right)\Big].
\end{aligned}$$

Einfacher gestaltet sich die Berechnung der zweiten Summe:

$$\sum X_u \bar{x}_u = \frac{1}{K\sqrt{EG-F^2}}[Df\varphi - D'e\varphi].$$

Also

$$\begin{aligned}
\delta D = \frac{-1}{K\sqrt{EG-F^2}}\Big[&D\left(\varphi_{uv} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\varphi_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\varphi_v + f\varphi\right) \\
&- D'\left(\varphi_{uu} - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\varphi_u - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\varphi_v + e\varphi\right)\Big] \\
= \frac{-1}{K\sqrt{EG-F^2}}&[D\Delta_{12}(\varphi) - D'\Delta_{11}(\varphi)].
\end{aligned}$$

Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für $\delta D'$ und $\delta D''$; setzt man zur Abkürzung

$$K\sqrt{EG-F^2} = \Delta, \tag{8a}$$

so sind unter Weglassung des Argumentes φ die Variationen der zweiten Fundamentalform:

$$\begin{aligned}
&\delta D = \frac{D'\Delta_{11} - D\Delta_{12}}{\Delta}, \\
&\left.\begin{aligned}
\delta D' &= \frac{D''\Delta_{11} - D'\Delta_{12}}{\Delta} \\
\delta D' &= \frac{D'\Delta_{12} - D\Delta_{22}}{\Delta}
\end{aligned}\right\}\; 2\,\delta D' = \frac{D''\Delta_{11} - D\Delta_{22}}{\Delta}, \\
&\delta D'' = \frac{D''\Delta_{12} - D'\Delta_{22}}{\Delta}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Wie man sieht, sind die Größen δD, $\delta D'$, $\delta D''$ in D, D', D'' und Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{22} symmetrisch gebaut bis auf das Vorzeichen; *sie können also auch als die Variationen der zweiten Fundamentalgrößen der assoziierten Fläche aufgefaßt werden,* wenn diese mittels der charakteristischen Funktion W verbogen wird; und ebenso wie

$$D\,\delta D'' - 2D'\delta D' + D''\delta D = 0$$

gilt auch die Gleichung

$$\Delta_{11}\delta D'' - 2\Delta_{12}\delta D' + \Delta_{22}\delta D = 0. \tag{11}$$

Nimmt man hinzu die charakteristische Gleichung

$$D\Delta_{22} - 2D'\Delta_{12} + D''\Delta_{11} = 0,$$

so bemerkt man, daß *die drei Differentialformen*

$$\begin{aligned} &D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 \\ &\Delta_{11}du^2 + 2\Delta_{12}\,du\,dv + \Delta_{22}\,dv^2 \\ &\delta D\,du^2 + 2\delta D'du\,dv + \delta D''dv^2 \end{aligned}$$

durch das gleichzeitige Verschwinden der algebraischen Simultaninvarianten von je zweien von ihnen in Beziehung stehen, und daß jede bis auf einen Faktor durch Auflösen von zwei linearen Gleichungen aus den beiden anderen berechnet werden kann.

Die Größen $\Delta_{11}(\varphi)$, $\Delta_{12}(\varphi)$, $\Delta_{22}(\varphi)$ müssen als zweite Fundamentalgrößen der assoziierten Fläche den Codazzischen Gleichungen für das Linienelement der Bildkugel genügen, während die Variationen δD, $\delta D'$, $\delta D''$, weil ja bei einer unendlich kleinen Verbiegung der Fläche das Krümmungsmaß nur um Größen zweiter Ordnung geändert wird, die Codazzischen Gleichungen für das Linienelement der Fläche selbst erfüllen. Ein direkter Beweis dieser beiden Sätze ist nicht ohne Interesse.

$$\begin{aligned} \Delta_{11v} = \varphi_{uuv} &- \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\varphi_{uv} - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\varphi_{vv} + e\varphi_v \\ &- \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'_v\varphi_u - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'_v\varphi_v + e_v\varphi, \\ \Delta_{12u} = \varphi_{uuv} &- \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\varphi_{uu} - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\varphi_{uv} + f\varphi_u \\ &- \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'_u\varphi_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'_u\varphi_v + f_u\varphi. \end{aligned}$$

Bildet man $\Delta_{11v} - \Delta_{12u}$, so fallen die dritten Differentialquotienten hinaus. Wenn man nun φ_{uu}, φ_{uv}, φ_{vv} durch Hinzunahme der nötigen Glieder mit φ_u, φ_v, φ zu $\Delta_{11}(\varphi)$, $\Delta_{12}(\varphi)$, $\Delta_{22}(\varphi)$ ergänzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta_{11v} - \Delta_{12u} = {} & \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\Delta_{11} + \left[\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\right]\Delta_{12} - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\Delta_{22} \\ & + \varphi_u\left[-f - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'_v + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'_u + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}'\right] \\ & + \varphi_v\left[e - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'_v + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'_u + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'^2 - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}'\right] \\ & + \varphi\left[e_v - f_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'e + \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\right]f + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'g\right]. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von φ_u, φ_v, φ sind aber Null; die beiden ersten sind zwei verschiedene Ausdrücke dafür, daß das Krümmungsmaß der Form $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ den Wert $+1$ hat; die letzte ist eine der Codazzischen Gleichungen für die Einheitskugel. Die übrigbleibenden Glieder sagen aus, daß *die Größen* Δ_{ik} *den Codazzischen Gleichungen für das Linienelement der Bildkugel genügen;* denn ebenso wie diese erste läßt sich auch die zweite Gleichung erweisen.

Die Ableitung macht keinen Gebrauch von der charakteristischen Gleichung; *deshalb ist die Funktion* φ *vollkommen willkürlich.*

In ähnlicher Weise wird der zweite Satz bewiesen.

Es ist

$$\delta D = \frac{D'}{\Delta}\Delta_{11} - \frac{D}{\Delta}\Delta_{12},$$

$$\delta D' = \frac{D'}{\Delta}\Delta_{12} - \frac{D}{\Delta}\Delta_{22},$$

$$\begin{aligned}\delta D_v - \delta D_u' = {} & \frac{D'}{\Delta}(\Delta_{11v} - \Delta_{12u}) - \frac{D}{\Delta}(\Delta_{12v} - \Delta_{22u}) \\ & + \frac{D_v}{\Delta}\Delta_{11} - \frac{D_v'}{\Delta}\Delta_{12} - \frac{D_u'}{\Delta}\Delta_{12} + \frac{D_u}{\Delta}\Delta_{22} \\ & + \left(\frac{1}{\Delta}\right)_v (D'\Delta_{11} - D\Delta_{12}) - \left(\frac{1}{\Delta}\right)_u (D'\Delta_{12} - D\Delta_{22}).\end{aligned}$$

Man kann jetzt die Differentialquotienten der Δ_{ik} mittels der eben bewiesenen Codazzischen Gleichungen zum Verschwinden bringen; die Differentialquotienten von D, D', D'' lassen sich mittels der Weingartenschen Gleichungen unter Einführung Christoffelscher Symbole für die Bildkugel und für die Fläche selbst beseitigen; endlich mittels der Gleichungen (9) die Differentialquotienten von $\frac{1}{\Delta}$ entfernen. Diese Substitutionen führen zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}\delta D_v - \delta D_u' = {} & \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}' [D\Delta_{22} - 2D'\Delta_{12} + D''\Delta_{11}] \\ & + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left[\frac{D}{\Delta}\Delta_{22} - \frac{D'}{\Delta}\Delta_{12}\right] + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left[\frac{D'}{\Delta}\Delta_{11} - \frac{D}{\Delta}\Delta_{12}\right] \\ & + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left[\frac{D''}{\Delta}\Delta_{11} - \frac{D'}{\Delta}\Delta_{12}\right] + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left[\frac{D'}{\Delta}\Delta_{22} - \frac{D''}{\Delta}\Delta_{12}\right].\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß φ *ein Integral der charakteristischen Gleichung ist, ist also*

$$\delta D_v - \delta D_u' = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\delta D + \left[\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right]\delta D' - \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\delta D'',$$

d. h. *die Variationen der zweiten Fundamentalgrößen bei einer unendlich kleinen Verbiegung erfüllen die Codazzischen Gleichungen für das Linienelement der Fläche.*

Die 2. Fundamentalform auf der durch Orthogonalität der Elemente zugeordneten Fläche.

Jede der Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ der durch Orthogonalität der Elemente zugeordneten Fläche genügt drei Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{aligned} \bar{x}_{uu} &= \alpha_1 \bar{x}_u + \alpha_2 \bar{x}_v + \bar{D}\bar{X}\,, \\ \bar{x}_{uv} &= \beta_1 \bar{x}_u + \beta_2 \bar{x}_v + \bar{D}'\bar{X}\,, \\ \bar{x}_{vv} &= \gamma_1 \bar{x}_u + \gamma_2 \bar{x}_v + \bar{D}''\bar{X}, \end{aligned}$$

in denen $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ die Richtungskosinus der Normalen, $\bar{D}, \bar{D}', \bar{D}''$ die zweiten Fundamentalgrößen, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ die Christoffelschen Symbole für das Linienelement dieser Fläche sind.

Nun ergeben sich nach (4) die Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ durch Quadraturen aus folgenden Gleichungen:

$$(4\text{a})\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2}\cdot \bar{x}_u &= \frac{D}{\Delta}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_v - \frac{D'}{\Delta}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_u, \\ \frac{1}{\varphi^2}\cdot \bar{x}_v &= \frac{D'}{\Delta}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_v - \frac{D''}{\Delta}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_u \end{aligned}$$

und analogen für $\bar{y}$ und $\bar{z}$, aus denen sich X, Y, Z eliminieren läßt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2}(D'\bar{x}_u - D\bar{x}_v) &= \frac{DD''-D'^2}{\Delta}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_u = \sqrt{EG-F^2}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_u, \\ \frac{1}{\varphi^2}(D''\bar{x}_u - D'\bar{x}_v) &= \frac{DD''-D'^2}{\Delta}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_v = \sqrt{EG-F^2}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_v. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen von $\left(\frac{X}{\varphi}\right)_{uv}$ in beiden Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\varphi^2\sqrt{EG-F^2}}\bar{x}_u - \frac{D}{\varphi^2\sqrt{EG-F^2}}\bar{x}_v\right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\varphi^2\sqrt{EG-F^2}}\bar{x}_u - \frac{D'}{\varphi^2\sqrt{EG-F^2}}\bar{x}_v\right) = 0, \end{aligned}$$

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\frac{2D'}{\varphi^2\sqrt{EG-F^2}}\bar{x}_{uv} - \frac{D}{\varphi^2\sqrt{EG-F^2}}\bar{x}_{vv} - \frac{D''}{\varphi^2\sqrt{EG-F^2}}\bar{x}_{uu} \\ &\quad + A\cdot\bar{x}_u + B\cdot\bar{x}_v = 0, \end{aligned}$$

wo die Größen A und B zur Abkürzung gesetzt und für das Folgende ohne Bedeutung sind. Führt man nun für $\bar{x}_{uu}, \bar{x}_{uv}, \bar{x}_{vv}$ die obigen Werte ein, so ergibt sich eine in $\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{X}$ lineare Gleichung, in der die Koef-

fizienten von $\bar{x}_u$, $\bar{x}_v$, $\bar{X}$ Null sein müssen. Insbesondere ergibt sich aus dem Verschwinden des Faktors von $\bar{X}$

(14) $$D\bar{D}'' - 2D'\bar{D}' + D''\bar{D} = 0.\text{*)}$$

Verbindet man diese Gleichung mit

$$D\Delta_{22} - 2D'\Delta_{12} + D''\Delta_{11} = 0$$

und

$$D\cdot\delta D'' - 2D'\cdot\delta D' + D''\cdot\delta D = 0,$$

so folgt

$$\begin{vmatrix} \bar{D} & \bar{D}' & \bar{D}'' \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \\ \delta D & \delta D' & \delta D'' \end{vmatrix} = 0.$$

Zwischen je 3 in einer Vertikalreihe stehenden Größen besteht eine lineare Gleichung

(15) $$\begin{aligned} \bar{D} &= a\Delta_{11} + b\cdot\delta D\,, \\ \bar{D}' &= a\Delta_{12} + b\cdot\delta D'\,, \\ \bar{D}'' &= a\Delta_{22} + b\cdot\delta D''. \end{aligned}$$

Um die Faktoren a und b kennen zu lernen, ist es nötig, eine der Größen der linken Seite, etwa $\bar{D}$, direkt zu berechnen. Dazu ist es notwendig, $\bar{X}$ zu kennen.

$$\bar{X} = \frac{\bar{y}_u\bar{z}_v - \bar{z}_u\bar{y}_v}{\sqrt{\sum(\bar{y}_u\bar{z}_v - \bar{z}_u\bar{y}_v)^2}}.$$

Die Berechnung des Zählers ergibt sich aus (4)

$$\begin{aligned} \bar{y}_u\bar{z}_v - \bar{z}_u\bar{y}_v = \frac{\varphi^4}{\Delta^2}\Big[&\Big(D\Big(\frac{Y}{\varphi}\Big)_v - D'\Big(\frac{Y}{\varphi}\Big)_u\Big)\Big(D'\Big(\frac{Z}{\varphi}\Big)_v - D''\Big(\frac{Z}{\varphi}\Big)_u\Big) \\ &- \Big(D\Big(\frac{Z}{\varphi}\Big)_v - D'\Big(\frac{Z}{\varphi}\Big)_u\Big)\Big(D'\Big(\frac{Y}{\varphi}\Big)_v - D''\Big(\frac{Y}{\varphi}\Big)_u\Big)\Big] \\ = \frac{\varphi^4}{\Delta^2}(DD''-D'^2)&\Big[\Big(\frac{Y}{\varphi}\Big)_u\Big(\frac{Z}{\varphi}\Big)_v - \Big(\frac{Z}{\varphi}\Big)_u\Big(\frac{Y}{\varphi}\Big)_v\Big] \\ = \frac{1}{K}\,[\varphi^2(Y_uZ_v - Z_uY_v) &- \varphi\varphi_u(YZ_v - ZY_v) - \varphi\varphi_v(Y_uZ - Z_uY)]. \end{aligned}$$

Weil

$$\begin{aligned} Y_uZ_v - Z_uY_v &= \sqrt{eg-f^2}\cdot X, \\ YZ_v - ZY_v &= \frac{-gX_u + fX_v}{\Delta}, \\ YZ_u - ZY_u &= \frac{-fX_u + eX_v}{\Delta} \end{aligned}$$

---

*) Dieser Satz findet sich auch bei Voß, l. c. und bei Bianchi Seite 301 in etwas anderer Form.

gesetzt werden kann, ergibt sich

$$\bar{y}_u\bar{z}_v-\bar{z}_u\bar{y}_v=\frac{\varphi}{K\cdot\Delta}[\varphi(eg-f^2)X+(\varphi_u g-\varphi_v f)X_u+(\varphi_v e-\varphi_u f)X_v].$$

Der Nenner kann jetzt ohne weiteres berechnet werden.

$$\sum(\bar{y}_u\bar{z}_v-\bar{z}_u\bar{y}_v)^2=\left(\frac{\varphi}{K\cdot\Delta}\right)^2(eg-f^2)[\varphi^2(eg-f^2)+\varphi_u^2 g-2\varphi_u\varphi_v f+\varphi_v^2 e].$$

Also ist

$$(16)\qquad \bar{X}=\frac{\varphi(eg-f^2)X+(\varphi_u g-\varphi_v f)X_u+(\varphi_v e-\varphi_u f)X_v}{\sqrt{eg-f^2}\sqrt{\varphi^2(eg-f^2)+\varphi_u^2 g-2\varphi_u\varphi_v f+\varphi_v^2 e}}.$$

Die Größen $\bar{D}$, $\bar{D}'$, $\bar{D}''$ sind nun die Koeffizienten von $\bar{X}$ in den Gleichungen (12). Um die erste derselben aufzustellen, hat man nach (4) $\bar{x}_{uu}$ durch $\left(\frac{X}{\varphi}\right)$ und seine Differentialquotienten auszudrücken. Die zweiten Differentialquotienten sind nach (7) zu beseitigen, die ersten nach (4) durch $\bar{x}_u$ und $\bar{x}_v$ zu ersetzen, während an Stelle von X selbst nach (16) $\bar{X}$ einzuführen ist. Da es sich nicht um die ganze Gleichung, sondern nur um den Koeffizienten von $\bar{X}$ handelt, können alle Terme, die auf ihn keinen Einfluß haben, während der Berechnung beiseite gelassen werden. So ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varphi^2}\bar{x}_u\right)=\frac{D}{\Delta}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_{uv}-\frac{D'}{\Delta}\left(\frac{X}{\varphi}\right)_{uu}+\cdots.$$

Nun ist

$$X_{uu}=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'X_u+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'X_v-eX.$$

Setzt man

$$\frac{X}{\varphi}=\xi,\quad X=\varphi\cdot\xi,$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$\xi_{uu}=\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'-2\frac{\varphi_u}{\varphi}\right)\xi_u+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\xi_v-\Delta_{11}(\varphi)\cdot\xi$$

und in ganz ähnlicher Weise

$$\xi_{uv}=\left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'-\frac{\varphi_v}{\varphi}\right)\xi_u+\left(\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'-\frac{\varphi_u}{\varphi}\right)\xi_v-\Delta_{12}(\varphi)\cdot\xi.$$

Dann ergibt sich

$$\frac{1}{\varphi^2}\bar{x}_{uu}+\cdots=\left(\frac{-D\Delta_{12}(\varphi)}{\Delta}+\frac{D'\Delta_{11}(\varphi)}{\Delta}\right)\left(\frac{X}{\varphi}\right)+\cdots$$

oder

$$\bar{x}_{uu}=\delta D\cdot\varphi X+\cdots.$$

Andererseits ist nach (16)

$$\overline{X} = \xi \frac{\sqrt{\varphi^2(eg-f^2) + \varphi_u^2 g - 2\varphi_u\varphi_v f + \varphi_v^2 e}}{\sqrt{eg-f^2}} + \alpha\xi_u + \beta\xi_v$$

also

$$\bar{x}_{uu} = \delta D \cdot \frac{\varphi^2\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{\varphi^2(eg-f^2) + \varphi_u^2 g - 2\varphi_u\varphi_v f + \varphi_v^2 e}} \cdot \overline{X} + \cdots,$$

$$(17) \qquad \overline{D} = \delta D \cdot \frac{\varphi^2\sqrt{eg-f^2}}{\sqrt{\varphi^2(eg-f^2) + \varphi_u^2 g - 2\varphi_u\varphi_v f + \varphi_v^2 e}}.$$

Für $\overline{D}'$ und $\overline{D}''$ ergibt sich ein analoger Gang der Rechnung, die nicht durchgeführt zu werden braucht. Man sieht, daß sich der oben ausgesprochene Satz, wonach die Größen $\overline{D}, \overline{D}', \overline{D}''$ lineare Kombinationen der Größen $\delta D, \delta D', \delta D''$ und $\Delta_{11}(\varphi), \Delta_{12}(\varphi), \Delta_{22}(\varphi)$ sind, vereinfacht: *Die 2. Fundamentalgrößen der durch Orthogonalität der Elemente entsprechenden Fläche unterscheiden sich von den Variationen der 2. Fundamentalgrößen der gegebenen Fläche nur um einen gleichen Faktor*, der oben berechnet ist,

$$(18) \qquad \overline{D} : \overline{D}' : \overline{D}'' = \delta D : \delta D' : \delta D''.$$

Da sich die Variationen der 2. Fundamentalgrößen $\Delta_{11}(\varphi)$, $\Delta_{12}(\varphi)$, $\Delta_{22}(\varphi)$ der assoziierten Fläche von denen der gegebenen Fläche nur um das Vorzeichen unterscheiden, gilt für die mittels der charakteristischen Funktion W gebildete durch Orthogonalität der Elemente entsprechende Fläche der nämliche Satz:

$$\overline{D}_0 : \overline{D}_0' : \overline{D}_0'' = \delta D : \delta D' : \delta D''.$$

Also entsprechen sich auf den zwei Flächen, die einem Paar von assoziierten Flächen mittels der charakteristischen Funktionen φ bzw. W durch Orthogonalität der Elemente zugeordnet sind, die Haupttangentenkurven. Ihre Bestimmung auf beiden Flächen hängt von der Integration der folgenden Gleichung ab:

$$\delta D\, du^2 + 2\delta D'\, du\, dv + \delta D''\, dv^2 = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ D & D' & D'' \\ \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{22} \end{vmatrix} = 0$$

wofür sich auch

$$\begin{vmatrix} D\,du + D'\,dv & \Delta_{11}du + \Delta_{12}dv \\ D'\,du + D''\,dv & \Delta_{12}du + \Delta_{22}dv \end{vmatrix} = 0$$

schreiben läßt. Folglich sind sie durch das Verschwinden der Jakobischen Determinante der 2. Fundamentalformen der beiden assoziierten Flächen charakterisiert.

Die Variation der charakteristischen Gleichung.

Wie eingangs gezeigt wurde, ist die Lösung der Aufgabe, eine gegebene Fläche so zu deformieren, daß das Linienelement der deformierten Fläche von dem der gegebenen nur um Größen dritter Ordnung abweicht, identisch mit der Aufsuchung einer Fläche, welche der bereits unendlich wenig verbogenen Fläche durch Orthogonalität der Elemente entspricht. Hierzu ist eine Differentialgleichung zu integrieren, welche aus der ursprünglichen charakteristischen Gleichung

$$D''\Delta_{11}(\varphi) - 2D'\Delta_{12}(\varphi) + D\Delta_{22}(\varphi) = 0$$

dadurch hervorgeht, daß an Stelle von D, D', D'' die variierten Größen $D + \varepsilon\cdot\delta D$, $D' + \varepsilon\cdot\delta D'$, $D'' + \varepsilon\cdot\delta D''$ treten, während $\Delta_{11}(\varphi)$, $\Delta_{12}(\varphi)$, $\Delta_{22}(\varphi)$ durch Größen

$$\Delta_{11}(\varphi) + \varepsilon\cdot\delta\Delta_{11}(\varphi), \quad \Delta_{12}(\varphi) + \varepsilon\cdot\delta\Delta_{12}(\varphi), \quad \Delta_{22}(\varphi) + \varepsilon\cdot\delta\Delta_{22}(\varphi)$$

ersetzt werden, welche aus den ursprünglichen Größen dadurch hervorgehen, daß für das sphärische Bild der Ausgangsfläche das der unendlich wenig verbogenen Fläche eintritt. Also ist

$$\begin{aligned}\Delta_{11}(\varphi) + \varepsilon\cdot\delta\Delta_{11}(\varphi) = \varphi_{uu} &- \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}' + \varepsilon\cdot\delta\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\right]\varphi_u\\ &- \left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' + \varepsilon\cdot\delta\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\right]\varphi_v + [e + \varepsilon\cdot\delta e]\varphi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(19)\quad \delta\Delta_{11}(\varphi) &= -\delta\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\cdot\varphi_u - \delta\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\cdot\varphi_v + \delta e\cdot\varphi,\\ \delta\Delta_{12}(\varphi) &= -\delta\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\cdot\varphi_u - \delta\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\cdot\varphi_v + \delta f\cdot\varphi,\\ \delta\Delta_{22}(\varphi) &= -\delta\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\cdot\varphi_u - \delta\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\cdot\varphi_v + \delta g\cdot\varphi.\end{aligned}$$

Führt man für das von φ unendlich wenig verschiedene Integral der variierten charakteristischen Gleichung $\varphi + \varepsilon\cdot\delta\varphi$ ein, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}&(D'' + \varepsilon\cdot\delta D'')[\Delta_{11}(\varphi) + \varepsilon\cdot\Delta_{11}(\delta\varphi) + \varepsilon\cdot\delta\Delta_{11}(\varphi) + \varepsilon^2\cdots]\\ &-2(D' + \varepsilon\cdot\delta D')[\Delta_{12}(\varphi) + \varepsilon\cdot\Delta_{12}(\delta\varphi) + \varepsilon\cdot\delta\Delta_{12}(\varphi) + \varepsilon^2\cdots]\\ &+(D + \varepsilon\cdot\delta D)[\Delta_{22}(\varphi) + \varepsilon\cdot\Delta_{22}(\delta\varphi) + \varepsilon\cdot\delta\Delta_{22}(\varphi) + \varepsilon^2\cdots] = 0.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nur die Glieder erster Ordnung, so ergibt sich folgende Variation der charakteristischen Gleichung:

$$\begin{aligned}&[\delta D''\Delta_{11}(\varphi) - 2\delta D'\Delta_{12}(\varphi) + \delta D\Delta_{22}(\varphi)]\\ &+[D''\Delta_{11}(\delta\varphi) - 2D'\Delta_{12}(\delta\varphi) + D\Delta_{22}(\delta\varphi)]\\ &+[D''\delta\Delta_{11}(\varphi) - 2D'\delta\Delta_{12}(\varphi) + D\delta\Delta_{22}(\varphi)] = 0.\end{aligned}$$

Da der Ausdruck in der ersten Klammer identisch verschwindet, ergibt sich

$$(20)\quad D''\Delta_{11}(\delta\varphi) - 2D'\Delta_{12}(\delta\varphi) + D\Delta_{22}(\delta\varphi) = -[D''\cdot\delta\Delta_{11}(\varphi) - 2D'\cdot\delta\Delta_{12}(\varphi) + D\cdot\delta\Delta_{22}(\varphi)].$$

Es genügt also die Variation von φ einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung mit zweitem Glied, deren linke Seite die ursprüngliche charakteristische Gleichung ist.

Also ist

$$\delta\varphi = \varphi + \varphi_1,$$

wo φ das allgemeine Integral der charakteristischen Gleichung und φ_1 ein beliebiges partikuläres Integral ihrer Variation ist.

Um die rechte Seite der Gleichung (20) zu berechnen, ist es nicht nötig, die Variation des sphärischen Bildes und sämtlicher Christoffelscher Symbole zu kennen und einzusetzen. Die rechte Seite ist

$$(21)\quad \begin{aligned} &-[D''\cdot\delta\Delta_{11}(\varphi) - 2D'\cdot\delta\Delta_{12}(\varphi) + D\cdot\delta\Delta_{22}(\varphi)]\\ &=\left[\delta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\cdot D'' - 2\delta\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\cdot D' + \delta\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}'\cdot D\right]\varphi_u\\ &+\left[\delta\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\cdot D'' - 2\delta\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\cdot D' + \delta\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}'\cdot D\right]\varphi_v\\ &-[\delta e\cdot D'' - 2\delta f\cdot D' + \delta g\cdot D]\varphi. \end{aligned}$$

Die Faktoren von φ_u und φ_v ergeben sich durch Variation der Codazzischen Gleichungen. Da bei einer unendlich kleinen Verbiegung das Linienelement bis auf Größen zweiter Ordnung unverändert bleibt, während das sphärische Bild sich ändert, genügen die Größen δD, $\delta D'$, $\delta D''$ den unveränderten Codazzischen Gleichungen für das Linienelement der Fläche, dagegen den variierten Codazzischen Gleichungen für das Linienelement der Bildkugel.

Wenn man von jedem der beiden Gleichungssysteme die erste herausgreift:

$$D_v - D'_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} D + \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right]D' + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} D'' = 0,$$

$$D_v - D'_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' D + \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\right]D' + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}' D'' = 0,$$

erhält man für δD, $\delta D'$, $\delta D''$ folgende Gleichungen:

$$\delta D_v - \delta D'_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cdot\delta D + \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right]\cdot\delta D' + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\cdot\delta D'' = 0,$$

$$\begin{aligned} &\delta D_v - \delta D'_u - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\cdot\delta D + \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\right]\cdot\delta D' + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\cdot\delta D''\\ &\quad -\delta\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\cdot D + \left[\delta\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}' - \delta\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\right]D' + \delta\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\cdot D'' = 0 \end{aligned}$$

und hieraus

$$-\delta\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}'\cdot D+\left[\delta\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}'-\delta\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}'\right]D'+\delta\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}'D''$$

$$=\left[-\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}+\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}'\right]\cdot\delta D+\left[\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}-\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}-\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}'+\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}'\right]\cdot\delta D'$$

$$+\left[\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}-\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}'\right]\cdot\delta D''.$$

Mit Rücksicht auf (9) ist

$$\delta\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}'+\delta\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}'=0,\quad \delta\left\{{2\,2 \atop 2}\right\}'+\delta\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}'=0$$

also geht die linke Seite der obigen Gleichung in den Faktor von φ_v über

$$\delta\left\{{2\,2 \atop 2}\right\}'\cdot D-2\delta\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}'\cdot D'+\delta\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}'\cdot D'',$$

aus der rechten Seite kann man mit Hilfe der ersten Codazzischen Gleichung für das Linienelement der Fläche die ungestrichenen Christoffelschen Symbole beseitigen; es ergibt sich

$$\delta\left\{{2\,2 \atop 2}\right\}'\cdot D-2\delta\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}'\cdot D'+\delta\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}'\cdot D'' \tag{22}$$

$$=-\delta D_v+\delta D'_u+\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}'\delta D-\left[\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}'-\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}'\right]\delta D'-\left\{{1\,1 \atop 2}\right\}'\cdot\delta D'',$$

wie auch direkt zu erkennen gewesen wäre. Diese Gleichung enthält dritte Differentialquotienten von φ, während bei Einführung des Linienelementes der Fläche nur die zweiten Differentialquotienten auftreten.

Ebenso ergibt sich der Koeffizient von φ_u

$$\delta\left\{{2\,2 \atop 1}\right\}'\cdot D-2\delta\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}'\cdot D'+\delta\left\{{1\,1 \atop 1}\right\}'\cdot D'' \tag{22a}$$

$$=-\delta D''_u+\delta D'_v-\left\{{2\,2 \atop 1}\right\}'\cdot\delta D-\left[\left\{{2\,2 \atop 2}\right\}'-\left\{{1\,2 \atop 1}\right\}'\right]\delta D'+\left\{{1\,2 \atop 2}\right\}'\delta D''.$$

Die Koeffizienten von φ_u und φ_v haben Invarianteneigenschaft; sie sind die Koeffizienten der für die Form $\delta D\,du^2+2\delta D'\,du\,dv+\delta D''\,dv^2$ in Bezug auf $e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2$ gebildeten trilinearen Kovariante.

Der Koeffizient von φ

$$-[\delta e\cdot D''-2\delta f\cdot D'+\delta g\cdot D]$$

ergibt sich am einfachsten in folgender Weise:

Die Fundamentalgrößen der Bildkugel sind

$$\begin{aligned} e&=-K\cdot E-H\cdot D,\\ f&=-K\cdot F-H\cdot D',\\ g&=-K\cdot G-H\cdot D'', \end{aligned} \tag{23}$$

wo K und H die Gaußsche und die mittlere Krümmung der Fläche bedeuten. Dann ist

$$\delta e = -\delta H\cdot D - H\cdot\delta D\,,$$
$$\delta f = -\delta H\cdot D' - H\cdot\delta D',$$
$$\delta g = -\delta H\cdot D'' - H\cdot\delta D''.$$

Aus diesen Gleichungen, die nebenbei die Beziehung

$$\delta e\cdot\Delta_{22}(\varphi) - 2\delta f\cdot\Delta_{12}(\varphi) + \delta g\cdot\Delta_{11}(\varphi) = 0$$

erkennen lassen, ergibt sich der Faktor von φ:

$$-[\delta e\cdot D'' - 2\delta f\cdot D' + \delta g\cdot D] = 2\delta H[DD'' - D'^2].$$

Führt man für H seinen Wert

$$\frac{-ED'' + 2FD' - GD}{EG - F^2}$$

ein, so folgt

$$(24)\quad \begin{aligned} -[\delta e\cdot D'' - 2\delta f\cdot D' + \delta g\cdot D] &= -2K[E\cdot\delta D'' - 2F\cdot\delta D' + G\cdot\delta D] \\ &= 2[e\cdot\delta D'' - 2f\cdot\delta D' + g\cdot\delta D]\cdot \end{aligned}$$

Also ist der Faktor von φ bis auf den Faktor 2 die algebraische Simultaninvariante der quadratischen Differentialformen $e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ und $\delta D\,du^2 + 2\delta D'\,du\,dv + \delta D''\,dv^2$; damit ist der Invariantencharakter der rechten Seite der Variation der charakteristischen Gleichung nachgewiesen.

Wenn ein Integral der variierten charakteristischen Gleichung bekannt ist, hat man, um die der unendlich wenig verbogenen Ausgangsfläche durch Orthogonalität der Elemente entsprechende Fläche zu finden, nur die Gleichungen (4) zu variieren. Nach (2b) hat man die Koordinaten dieser Fläche mit $x_1 + 2\varepsilon x_2$, $y_1 + 2\varepsilon y_2$, $z_1 + 2\varepsilon z_2$ zu bezeichnen, wo x_1, y_1, z_1 mit dem früheren $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ identisch ist. Dann ergibt (4)

$$(25)\quad \begin{aligned} (x_1 + 2\varepsilon x_2)_u = {} & \frac{1}{\Delta}[D(\varphi X_v - X\varphi_v) - D'(\varphi X_u - X\varphi_u)] \\ & + \frac{\varepsilon}{\Delta}[\delta D(\varphi X_v - X\varphi_v) - \delta D'(\varphi X_u - X\varphi_u)] \\ & + \frac{\varepsilon}{\Delta}[D(\varphi\cdot\delta X_v - \delta X\cdot\varphi_v) - D'(\varphi\cdot\delta X_u - \delta X\cdot\varphi_u)] \\ & + \frac{\varepsilon}{\Delta}[D(\delta\varphi\cdot X_v - X\cdot\delta\varphi_v) - D'(\delta\varphi\cdot X_u - X\cdot\delta\varphi_u)], \\ (x_1 + 2\varepsilon x_2)_v = {} & \frac{1}{\Delta}[D'(\varphi X_v - X\varphi_v) - D''(\varphi X_u - X\varphi_u)] \\ & + \frac{\varepsilon}{\Delta}[\delta D'\cdot(\varphi X_v - X\varphi_v) - \delta D''\cdot(\varphi X_u - X\varphi_u)] \\ & + \frac{\varepsilon}{\Delta}[D'(\varphi\cdot\delta X_v - \delta X\cdot\varphi_v) - D''(\varphi\cdot\delta X_u - \delta X\cdot\varphi_u)] \\ & + \frac{\varepsilon}{\Delta}[D'(\delta\varphi\cdot X_v - X\cdot\delta\varphi_v) - D''(\delta\varphi\cdot X_u - X\cdot\delta\varphi_u)] \end{aligned}$$

nebst analogen Formeln in y und z. *Nun lassen sich* x_2, y_2, z_2 *durch Quadraturen bestimmen und damit die Koordinaten*

$$x + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \quad y + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2, \quad z + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2$$

einer Fläche, deren Linienelement mit dem der gegebenen Fläche bis auf Größen 3. Ordnung übereinstimmt.

Die 2. Variation der 2. Fundamentalform.

Während durch die Verbiegung 2. Ordnung auch die zweiten Variationen der Größen E, F, G zu Null werden, nehmen die Größen der 2. Fundamentalform Werte von der Form

$$D + \varepsilon \cdot \delta D + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 D + \cdots,$$

$$D' + \varepsilon \cdot \delta D' + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 D' + \cdots,$$

$$D'' + \varepsilon \cdot \delta D'' + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 D'' + \cdots$$

an. Diese Größen müssen nun den Gleichungen von Gauß und von Codazzi für das Linienelement der Fläche genügen. Da die letzteren Gleichungen linear sind, folgt, daß die 2. Variationen $\delta^2 D, \delta^2 D', \delta^2 D''$ selbst die Codazzischen Gleichungen erfüllen müssen. Aus der Gaußschen Gleichung ergibt sich:

$$DD'' - D'^2 = \left[D + \varepsilon \cdot \delta D + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 D\right]\left[D'' + \varepsilon \cdot \delta D'' + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 D''\right] - \left[D' + \varepsilon \cdot \delta D' + \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 D'\right]^2.$$

In der Gleichung, die von selbst bis auf Größen 2. Ordnung erfüllt ist, muß auch der Faktor von ε^2 noch verschwinden; also

(26) $$D \cdot \delta^2 D'' - 2D' \cdot \delta^2 D' + D'' \cdot \delta^2 D + 2[\delta D \cdot \delta D'' - \delta D'^2] = 0.$$

Man erhält leicht

(27) $$\delta D \cdot \delta D'' - \delta D'^2 = \frac{2}{\Delta^2}[DD'' - D'^2]\,[\Delta_{11}(\varphi)\,\Delta_{22}(\varphi) - \Delta_{12}^2(\varphi)],$$

also

(26a) $$D \cdot \delta^2 D'' - 2D' \cdot \delta^2 D' + D'' \cdot \delta^2 D = \frac{-2}{\Delta^2}[DD'' - D'^2]\,[\Delta_{11}(\varphi)\,\Delta_{22}(\varphi) - \Delta_{12}^2(\varphi)].$$

Setzt man

$$\delta^2 D = -D\,\frac{\Delta_{11}(\varphi)\,\Delta_{22}(\varphi) - \Delta_{12}^2(\varphi)}{\Delta^2} + \tau,$$

$$\delta^2 D' = -D'\,\frac{\Delta_{11}(\varphi)\,\Delta_{22}(\varphi) - \Delta_{12}^2(\varphi)}{\Delta^2} + \tau',$$

$$\delta^2 D'' = -D''\,\frac{\Delta_{11}(\varphi)\,\Delta_{22}(\varphi) - \Delta_{12}^2(\varphi)}{\Delta^2} + \tau'',$$

so folgt
$$D\tau'' - 2D'\tau' + D''\tau = 0.$$
Diese Gleichung ergibt, mit
$$D\Delta_{22}(\varphi) - 2D'\Delta_{12}(\varphi) + D''\Delta_{11}(\varphi) = 0$$
und
$$D\cdot\delta D'' - 2D'\cdot\delta D' + D''\cdot\delta D = 0$$
zusammengestellt, daß die Größen τ, τ', τ'' lineare Kombinationen der Größen $\Delta_{11}(\varphi)$, $\Delta_{12}(\varphi)$, $\Delta_{22}(\varphi)$ und δD, $\delta D'$, $\delta D''$ sein müssen. Folglich ist

$$\text{(28)}\qquad \begin{aligned} \delta^2 D &= \frac{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}}{\Delta} D + \alpha\Delta_{11} + \beta\cdot\delta D, \\ \delta^2 D' &= \frac{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}}{\Delta} D' + \alpha\Delta_{12} + \beta\cdot\delta D', \\ \delta^2 D'' &= \frac{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}}{\Delta} D'' + \alpha\Delta_{22} + \beta\cdot\delta D'', \end{aligned}$$

Dabei müssen die Faktoren α und β so bestimmt werden, daß $\delta^2 D$, $\delta^2 D'$, $\delta^2 D''$ noch den Codazzischen Gleichungen genügen, während die Gaußsche Gleichung bereits erfüllt ist. Es ist ersichtlich, *daß man ein Größensystem, welches den Codazzischen Gleichungen und der Gaußschen Gleichung oder einer ihr äquivalenten genügen soll, stets als lineare Kombination dreier Größensysteme ansetzen kann; hier ist die Aufgabe dadurch reduziert, daß einer der Multiplikatoren bereits bekannt ist.* α und β müssen zwei linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung genügen; durch Elimination einer der Veränderlichen, etwa von α, ergibt sich eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für β mit zweitem Glied, von der jedes partikuläre Integral durch Quadraturen einen Wert von α liefert.

Ebenso wie die $\delta^2 D$, $\delta^2 D'$, $\delta^2 D''$ bekannt sind, wenn ein partikulärer Wert $\delta\varphi$ gegeben ist, kann man auch aus bekannten Größen $\delta^2 D$, $\delta^2 D'$ $\delta^2 D''$ die charakteristische Funktion $\varphi + \varepsilon\cdot\delta\varphi$ erhalten. Denn sie ist nichts anderes als der Abstand der Tangentialebenen derjenigen Fläche vom Anfangspunkt, welche der unendlich wenig verbogenen Ausgangsfläche bei der zweiten Verbiegung assoziiert ist. Die assoziierte Fläche ergibt sich aber bei der Bianchischen Behandlung des Problems der unendlich kleinen Verbiegungen durch Quadraturen, sowie die Variation der 2. Fundamentalform bekannt ist.*)

*) Bianchi § 163 S. 307.

Beispiel. Deformation eines Paraboloids.

Bei Einführung der Haupttangentenkurven als Parameterlinien reduziert sich die charakteristische Gleichung auf

$$\Delta_{12}(\varphi) = \varphi_{uv} - \left\{ {12 \atop 1} \right\}' \varphi_u - \left\{ {12 \atop 2} \right\}' \varphi_v + f\varphi = 0.$$

Setzt man nach dem Vorgang von Lelieuvre

$$\varphi = \frac{\vartheta}{\sqrt{\varrho}},$$

wo ϱ mit dem Krümmungsmaß durch die Gleichung

$$K = -\frac{1}{\varrho^2}$$

zusammenhängt, so geht die charakteristische Gleichung in

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = M\vartheta$$

über, wo

$$M = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\varrho}}{\partial u\, \partial v} - f$$

ist. Die Richtungskosinus der Normalen ergeben drei partikuläre Integrale

$$\xi = X\sqrt{\varrho}, \qquad \eta = Y\sqrt{\varrho}, \qquad \zeta = Z\sqrt{\varrho}$$

der umgeformten charakteristischen Gleichung, aus denen man erkennt, daß

$$\varrho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

ist.

Die Koordinaten der Fläche werden durch folgende Gleichungen und entsprechende für y und z bestimmt:

$$x_u = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix}, \qquad x_v = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}.$$

Jedes weitere Integral ϑ führt nach (4) auf eine durch Orthogonalität der Elemente entsprechende Fläche, die durch die Gleichungen

$$\bar{x}_u = \begin{vmatrix} \xi & \vartheta \\ \xi_u & \vartheta_u \end{vmatrix}, \qquad \bar{x}_v = -\begin{vmatrix} \xi & \vartheta \\ \xi_v & \vartheta_v \end{vmatrix}$$

nebst analogen für $\bar{y}$ und $\bar{z}$ gegeben ist.

Nimmt man als normierte charakteristische Gleichung

$$\vartheta_{uv} = 0$$

und wählt die drei partikulären Integrale

$$\xi = u, \quad \eta = v, \quad \zeta = 1,$$

so ergibt sich

$$x = -v, \quad y = -u, \quad z = uv.$$

Diese Gleichungen stellen das *orthogonale Paraboloid*

$$xy = z$$

bezogen auf die Erzeugenden als Parameterkurven dar.

Setzt man, um die allgemeinste unendlich kleine Verbiegung zu bekommen, die Verbiegungsfunktion

$$\vartheta = U(u) + V(v),$$

so folgt

$$\bar{x}_u = \begin{vmatrix} u & U+V \\ 1 & U' \end{vmatrix} = uU' - U - V,$$

$$\bar{x}_v = -\begin{vmatrix} u & U+V \\ 0 & V' \end{vmatrix} = uV',$$

also

$$\bar{x} = uU - uV - 2\int U\,du$$

und ähnlich

$$\bar{y} = vU - vV + 2\int V\,dv,$$
$$\bar{z} = U - V.$$

Diese Gleichungen geben die allgemeinste Fläche, die dem gegebenen Paraboloid durch Orthogonalität der Elemente entspricht.

Die allgemeinste aus dem Paraboloid durch unendlich kleine Verbiegung hervorgegangene Fläche ist

$$x' = -v + \varepsilon\left[u(U-V) - 2\int U\,du\right],$$
$$y' = -u + \varepsilon\left[v(U-V) + 2\int V\,dv\right],$$
$$z' = uv \quad + \varepsilon\,[U-V].$$

Die Fundamentalgrößen für das Linienelement sind leicht zu berechnen:

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + u^2, \quad \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + u^2 + v^2} = \sqrt{\varrho}.$$

Die 2. Fundamentalgrößen sind:

$$D = 0, \quad D' = \frac{-1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} = \frac{-1}{\sqrt{\varrho}}, \quad D'' = 0,$$

also

$$DD'' - D'^2 = \frac{-1}{u^2 + v^2 + 1} = \frac{-1}{\varrho}, \quad K = -\frac{1}{\varrho^2}.$$

Für das Linienelement der Bildkugel findet man:

$$e = \frac{1 + v^2}{\varrho^2}, \quad f = \frac{-uv}{\varrho^2}, \quad g = \frac{1 + u^2}{\varrho^2}, \quad \sqrt{eg - f^2} = \varrho^{-\frac{3}{2}},$$

$$\Delta = K \cdot \sqrt{EG - F^2} = -\varrho^{-\frac{3}{2}}.$$

Die Ebenenkoordinaten des Paraboloids sind:

$$X=\frac{u}{\sqrt{\varrho}},\quad Y=\frac{v}{\sqrt{\varrho}},\quad Z=\frac{1}{\sqrt{\varrho}},\quad W=\frac{-uv}{\sqrt{\varrho}}.$$

Um $\Delta_{11}(\varphi)$ zu berechnen, erinnert man sich, daß

$$\Delta_{11}(\varphi)=\varphi_{uu}-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\varphi_u-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\varphi_v+e\varphi$$

den Wert Null annimmt, wenn man φ durch X, Y oder Z ersetzt. Führt man für φ den Wert $\frac{\vartheta}{\sqrt{\varrho}}$ ein, so folgt:

$$\sqrt{\varrho}\cdot\Delta_{11}(\varphi)=\vartheta_{uu}+A\vartheta_u+B\vartheta_v+C\vartheta,$$

wo A, B, C leicht durch die Koeffizienten der vorigen Gleichung auszudrücken wären. Weil nun aber die rechte Seite der umgeformten Gleichung für die drei Werte $\xi=u$, $\eta=v$, $\zeta=1$ Null sein muß, folgt:

$$\begin{vmatrix}\vartheta_{uu}-\sqrt{\varrho}\,\Delta_{11}(\varphi) & \vartheta_u & \vartheta_v & \vartheta\\ 0 & 1 & 0 & u\\ 0 & 0 & 1 & v\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0,$$

also

$$\sqrt{\varrho}\,\Delta_{11}(\varphi)=\vartheta_{uu}=U'',$$

$$\Delta_{11}(\varphi)=\frac{U''}{\sqrt{\varrho}}.$$

Auf diese Weise *erhält man für die 2. Fundamentalgrößen der assoziierten Fläche*

$$\Delta_{11}(\varphi)=\frac{U''}{\sqrt{\varrho}},\quad \Delta_{12}(\varphi)=0,\quad \Delta_{22}(\varphi)=\frac{V''}{\sqrt{\varrho}}.$$

Damit sind auch *die Variationen der 2. Fundamentalgrößen des Paraboloids* bekannt:

$$\delta D=U''\sqrt{\varrho},\quad \delta D'=0,\quad \delta D''=-V''\sqrt{\varrho}.$$

Es ist nun die variierte charakteristische Gleichung zu berechnen. Weil die sphärischen Bilder der Erzeugenden des Paraboloids größte Kreise, also geodätische Linien der Bildkugel sind, ist

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'=0,\quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'=0.$$

Ferner ist

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'=\frac{ge_v-fg_u}{2(eg-f^2)}=\frac{-v}{\varrho},$$

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'=\frac{eg_u-fe_v}{2(eg-f^2)}=\frac{-u}{\varrho}.$$

$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'$ und $\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'$ brauchen, weil sie nur als Faktoren von $\Delta_{12}(\varphi)$ auftreten, nicht berechnet zu werden.

Als Faktoren von φ_u und φ_v in der rechten Seite der variierten Gleichung findet man hieraus:

$$2V''u\varrho^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad -2U''v\varrho^{-\frac{1}{2}},$$

während sich als Faktor von φ der Ausdruck

$$2\varrho^{-\frac{3}{2}}[U''(1+u^2)-V''(1+v^2)]$$

ergibt.

Die Variation der charakteristischen Gleichung wird demnach:

$$-2D'\Delta_{12}(\delta\varphi)=\frac{2}{\varrho}[(U+V)(U''-V'')+uU'V''-vV'U''].$$

Setzt man wieder

$$\delta\varphi=\frac{\delta\vartheta}{\sqrt{\varrho}},$$

$$\sqrt{\varrho}\,\Delta_{12}(\delta\varphi)=\delta\vartheta_{uv},$$

so ergibt sich als Variation der charakteristischen Gleichung:

$$\delta\vartheta_{uv}=(U+V)(U''-V'')+uU'V''-vV'U''.$$

Man findet leicht *durch Probieren das folgende partikuläre Integral:*

$$\delta\vartheta=uUV'-vVU'+v\int UU''du-u\int VV''dv+2U'\int Vdv-2V'\int Udu,$$

also

$$\delta\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\left[uUV'-vVU'+v\int UU''du-u\int VV''dv+2U'\int Vdv-2V'\int Udu\right].$$

Das allgemeine Integral entsteht durch Hinzufügen eines allgemeinen Integrals der ursprünglichen charakteristischen Gleichung von der Form $\frac{U_1(u)+V_1(v)}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$; man kommt jedoch hierdurch, wie aus (25) ersichtlich ist, nicht zu allgemeineren Biegungsflächen. *Diese Gleichungen ergeben durch Einsetzen der berechneten Größen die allgemeinsten Flächen, deren Linienelement mit dem des Paraboloids bis auf Größen 3. Ordnung übereinstimmt.* Hierzu ist nur noch die Kenntnis der variierten Richtungskosinus notwendig:

$$\delta X=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}[uvU'+(1+v^2)V'-v(U+V)]=\frac{\delta\xi}{\sqrt{\varrho}},$$

$$\delta Y=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}[-(1+u^2)U'-uvV'+u(U+V)]=\frac{\delta\eta}{\sqrt{\varrho}},$$

$$\delta Z=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}[vU'-uV']=\frac{\delta\zeta}{\sqrt{\varrho}},$$

wenn man $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ zur Abkürzung für die Zähler setzt. Dann liefern unter Berücksichtigung von $D=D''=\delta D'=0$ die Gleichungen (25):

$$x_{2u} = \frac{1}{2\Delta\varrho}[\delta D(\vartheta\xi_v - \xi\vartheta_v) - D'(\vartheta\cdot\delta\xi_u - \delta\xi\vartheta_u) - D'(\delta\vartheta\cdot\xi_u - \xi\delta\vartheta_u)],$$

$$x_{2v} = \frac{1}{2\Delta\varrho}[-\delta D''(\vartheta\xi_u - \xi\vartheta_u) + D'(\vartheta\cdot\delta\xi_v - \delta\xi\cdot\vartheta_v) + D'(\delta\vartheta\cdot\xi_v - \xi\cdot\delta\vartheta_v)].$$

Um nun zu einer möglichst einfachen Fläche, jedoch von höchstem Grad der Allgemeinheit zu gelangen, ist zu berücksichtigen, daß ein Integral ϑ von der Form $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$ beim ersten Schritt der Verbiegung nur eine Verschiebung der Ausgangsfläche gibt und also für unseren Zweck unbrauchbar ist; ferner kann man von jeder Regelfläche stetige Verbiegungen angeben, bei denen die Geraden erhalten bleiben; bei den Flächen 2. Grades kann man durch Zusammensetzung zweier unendlich kleiner Verbiegungen, deren jede eine Schar der Erzeugenden enthält, die allgemeinste unendlich kleine Verbiegung erster Ordnung erhalten; von dieser ausgehend, gelangt man zur allgemeinsten Verbiegung 2. Ordnung. Ein für unseren Zweck brauchbares Integral der charakteristischen Gleichung muß also mindestens vom 2. Grad sein in beiden Veränderlichen, d. h. von der Form

$$\vartheta = \alpha u^2 + \beta v^2,$$

wo α und β zwei Konstante sind, weil die Integrale von der Form αu^2 oder βv^2 auf Regelflächen führen. Durch Einsetzen von ϑ in die Ausdrücke für x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v erhält man *die 2. Variationen der Koordinaten* durch eine ziemlich weitläufige Rechnung, *sowie die Koordinaten der verbogenen Fläche, die mit der Ausgangsfläche im Linienelement und Krümmungsmaß bis auf Größen 3. Ordnung übereinstimmt:*

$$x'' = -v + \varepsilon\left[\alpha\frac{u^3}{3} - \beta u v^2\right]$$
$$- \varepsilon^2\left[2\alpha\beta u^2 v - \frac{2}{3}\beta^2 v^3 + \left(\frac{2}{3}\alpha\beta + \frac{\alpha^2}{6}\right)u^4 v + \alpha\beta u^2 v^3 - \frac{\beta^2}{10}v^5\right],$$

$$y'' = -u + \varepsilon\left[-\beta\frac{v^3}{3} + \alpha u^2 v\right]$$
$$- \varepsilon^2\left[2\alpha\beta u v^2 - \frac{2}{3}\alpha^2 u^3 + \left(\frac{2}{3}\alpha\beta + \frac{\beta^2}{6}\right)u v^4 + \alpha\beta u^3 v^2 - \frac{\alpha^2}{10}u^5\right],$$

$$z'' = uv + \varepsilon[\alpha u^2 - \beta v^2] - \varepsilon^2\left[2\alpha\beta uv + \frac{2}{3}\alpha(\alpha+\beta)u^3 v + \frac{2}{3}\beta(\alpha+\beta)uv^3\right].$$

München, März 1913.

Über Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven.

Von

E. J. Wilczynski in Chicago.

---

§ 1.

Analytische Grundlage der projektiven Differentialgeometrie der nicht abwickelbaren Flächen.

Wir legen unserer Theorie ein System partieller Differentialgleichungen von der Form

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2a\frac{\partial y}{\partial u} + 2b\frac{\partial y}{\partial v} + cy = 0,\\
&\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + 2a'\frac{\partial y}{\partial u} + 2b'\frac{\partial y}{\partial v} + c'y = 0
\end{aligned}
$$

zugrunde. Differenziert man diese Gleichungen nach u und v, so erhält man für jede der vier Ableitungen dritter Ordnung von y einen eindeutig bestimmten Ausdruck von der Form

$$
\alpha y + \beta\frac{\partial y}{\partial u} + \gamma\frac{\partial y}{\partial v} + \delta\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}.
$$

Aus diesen Ausdrücken kann man durch nochmalige Differentiation gewisse der Ableitungen vierter Ordnung auf zwei verschiedene Weisen berechnen. Damit die so erhaltenen Formeln bei willkürlicher Wahl der Anfangswerte von y, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}$ einander nicht widersprechen mögen, müssen die Koeffizienten a, b, c, a', b', c' von (1) den *Integrabilitätsbedingungen*

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&a_v - b'_u = 0,\\
&a'_{uu} + c'_u - 2a'a_u - 2aa'_u - (a_{vv} + 2b'a_v - 2ba'_v - 4a'b_v) = 0,\\
&b_{vv} + c_v - 2bb'_v - 2b'b_v - (b'_{uu} + 2ab'_u - 2a'b_u - 4ba'_u) = 0,\\
&c'_{uu} - 4ca'_u - 2a'c_u + 2ac'_u - (c_{vv} - 4c'b_v - 2bc'_v + 2b'c_v) = 0
\end{aligned}
$$

genügen, wo wir zur Abkürzung

$$a_u = \frac{\partial a}{\partial u}, \quad a_v = \frac{\partial a}{\partial v}, \quad a_{uu} = \frac{\partial^2 a}{\partial u^2}, \text{ usw.}$$

gesetzt haben.

Nimmt man an, daß die Koeffizienten des Systems (1) analytische Funktionen sind, welche den Integrabilitätsbedingungen (2) genügen, so kann man leicht beweisen, daß (1) genau vier linear unabhängige analytische Integrale

$$(3) \qquad y^{(k)} = f^{(k)}(u, v) \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

besitzt, und man bezeichnet dann das System (1) als ein *unbeschränkt integrierbares System.*

Interpretiert man nun $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}$ als die homogenen Koordinaten eines Punktes P_y des dreidimensionalen Raumes und läßt die unabhängigen Veränderlichen u und v ihre sämtlichen Werte durchlaufen, so beschreibt P_y eine Fläche S, welche weder in eine Kurve noch in eine abwickelbare Fläche ausarten kann und welche die Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ als Haupttangentenkurven besitzt.*)

Da (1) nur vier linear unabhängige Lösungen besitzt, ist die allgemeinste Integralfläche von (1) eine projektive Transformation von S. Folglich haben die Koeffizienten a, b, c, a', b', c' für alle aus S durch projektive Transformation hervorgehenden Flächen dieselbe Bedeutung. Diese Koeffizienten hängen aber nicht allein von den Eigenschaften der Fläche und dem auf ihr gezogenen Netz der Haupttangentenkurven, sondern auch von der speziellen analytischen Darstellung ab. Transformiert man (1), indem man setzt

$$(4) \qquad \bar{u} = \alpha(u), \quad \bar{v} = \beta(v), \quad \bar{y} = \lambda(u, v) y,$$

wo $\alpha(u)$, $\beta(v)$, $\lambda(u, v)$ willkürliche Funktionen der beigefügten Argumente bedeuten, so verändert sich weder die Fläche noch das Netz ihrer Haupttangentenkurven. Die Funktionen der Koeffizienten a, b, c, a', b', c' und ihrer Ableitungen, welche durch die allgemeinste Transformation der Form (4) nicht verändert werden, heißen *Invarianten* und bestimmen durch ihr Verhalten die projektiven Eigenschaften der Integralflächen.

Es sei umgekehrt (3) die Darstellung einer beliebigen nicht abwickelbaren analytischen Fläche, bezogen auf ihre Haupttangentenkurven. Dann läßt sich immer ein System partieller Differentialgleichungen der Form (1)

---

*) E. J. Wilczynski, Projective Differential Geometry of Curved Surfaces (First Memoir). Trans. of the Am. Math. Soc. 8 (1907), S. 244 und 245. Man vergleiche überhaupt fünf Abhandlungen des Verfassers unter demselben Titel, welche in den soeben genannten Transactions (1907—1909) zu finden sind. Dieselben sollen im folgenden kurz als Erste, Zweite, . . ., Abhandlung zitiert werden.

bestimmen, welches die gegebene Fläche als Integralfläche besitzt. Die Theorie ist also auf beliebige nicht abwickelbare Flächen anwendbar.

Durch eine Transformation der Form (4) läßt sich das System (1) auf die sogenannte *kanonische Form*

$$(5)\qquad \begin{aligned} y_{uu} + 2by_v + fy &= 0,\\ y_{vv} + 2a'y_u + gy &= 0 \end{aligned}$$

reduzieren.*) Die Integrabilitätsbedingungen nehmen dann die einfachere Form

$$(6)\qquad \begin{aligned} a'_{uu} + g_u + 2ba'_v + 4a'b_v &= 0,\\ b_{vv} + f_v + 2a'b_u + 4ba'_u &= 0,\\ g_{uu} - f_{vv} - 4fa'_u - 2a'f_u + 4gb_v + 2bg_v &= 0 \end{aligned}$$

an. Aber diese kanonische Form ist nicht eindeutig bestimmt. Die allgemeinste Transformation von der Form (4), welche ein kanonisches System wieder in ein kanonisches System überführt, ist die folgende:

$$(7)\qquad \bar{y} = C\sqrt{\alpha_u\beta_v}\,y, \quad \bar{u} = \alpha(u), \quad \bar{v} = \beta(v),$$

wo $\alpha(u)$ und $\beta(v)$ willkürliche Funktionen von u und v allein und C eine willkürliche Konstante bedeutet.**)

§ 2.

Geometrische Grundbegriffe.

Man betrachte fünf Tangenten einer beliebigen Raumkurve. Dieselben bestimmen im allgemeinen einen linearen Komplex, welcher einer bestimmten Grenze zustrebt, wenn die fünf Tangenten sich einander unbeschränkt nähern. Der auf diese Weise als Grenze definierte lineare Komplex heißt der zu dem betreffenden Kurvenpunkt gehörige *oskulierende lineare Komplex*. Ich habe vor einigen Jahren die Gleichungen der beiden linearen Komplexe aufgestellt, welche zu den beiden sich in einem gegebenen Flächenpunkte kreuzenden Haupttangentenkurven als oskulierende lineare Komplexe gehören.***) Aus diesen Gleichungen ergibt sich, daß die gemeinsamen Strahlen dieser beiden Komplexe ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse bilden, von dessen Leitlinien eine (Leitlinie *erster* Art) in der Tangentenebene des betreffenden Flächenpunktes liegt, während die andere (Leitlinie *zweiter* Art) durch den Flächenpunkt selber hindurchgeht.†)

*) Erste Abhandlung S. 246.

**) Erste Abhandlung S. 256.

***) Zweite Abhandlung S. 90—95.

†) Zweite Abhandlung S. 95.

Da jedem Flächenpunkt eine Leitlinie erster Art und eine Leitlinie zweiter Art entspricht, erhält man auf diese Weise zwei Strahlenkongruenzen, die *Direktrixkongruenzen erster und zweiter Art.*

Will man diese beiden Kongruenzen näher studieren, so kommt es vor allen Dingen darauf an, ihre abwickelbaren Flächen zu bestimmen. In jedem Flächenpunkt gibt es natürlich im allgemeinen zwei Fortschreitungsrichtungen, welchen, zu Kurven zusammengefaßt, die abwickelbaren Flächen der Direktrixkongruenz erster Art entsprechen. Ebenso erhält man in jedem Flächenpunkt zwei Fortschreitungsrichtungen, entsprechend den abwickelbaren Flächen der Direktrixkongruenz zweiter Art. Es zeigt sich aber, daß *die beiden Kurvennetze*, welche auf diese Weise geometrisch definiert werden, *ganz allgemein zusammenfallen.* Ich bezeichne diese Kurven, welche mit den Direktrixkongruenzen in derselben Weise zusammenhängen wie die Krümmungskurven mit der Kongruenz der Flächennormalen, als *Direktrixkurven.* Dieselben werden durch die folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$bL\,du^2 + 2M\,du\,dv - a'N\,dv^2 = 0, \tag{8}$$

wo

$$L = -2a'(2a'bf + 2a'bb_v + ba'_{uu}) + ba'^2_u,$$

$$M = a'^2 b^2 \frac{\partial^2 \log\left(\frac{b}{a'}\right)}{\partial u\, \partial v}, \tag{9}$$

$$N = -2b(2a'bg + 2a'ba'_u + a'b_{vv}) + a'b^2_v.\text{*)}$$

Die Direktrixkurven bilden also ein konjugiertes Netz, wenn $M = 0$, $L \neq 0$, $N \neq 0$, d. h. im allgemeinen, wenn $\frac{a'}{b}$ sich in der Form $\varphi(u)\,\psi(v)$ schreiben läßt, wo $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ Funktionen von u und v allein bedeuten.

§ 3.

Analytische Formulierung des Problems der Bestimmung aller Flächen, deren Direktrixkurven unbestimmt sind.

Die Differentialgleichung (8) wird unbestimmt, wenn

$$bL = M = a'N = 0.$$

Diese Bedingungen werden zunächst erfüllt, wenn entweder a' oder b identisch verschwindet. Die Fläche S ist alsdann eine Linienfläche. Im Fall einer Linienfläche aber ist die Unbestimmtheit der Direktrixkurven *a priori* evident, da die Begriffe des § 2 in diesem Falle sogar die Direktrixkon-

*) Zweite Abhandlung S. 116.

gruenzen selber undefiniert lassen. Wir setzen daher im folgenden stets voraus, daß

(10) $$a' \neq 0, \quad b \neq 0,$$

suchen also die *nicht geradlinigen* Flächen zu bestimmen, deren Direktrixkurven unbestimmt sind. Dieselben müssen offenbar den Bedingungen

(11) $$L = M = N = 0$$

genügen.

Aus $M = 0$ ergibt sich, wie wir schon in § 2 bemerkt haben,

$$\frac{\partial^2 \log \frac{b}{a'}}{\partial u \, \partial v} = 0,$$

so daß

(12) $$\frac{b}{a'} = \frac{U}{V}, \quad U \neq 0, \quad V \neq 0,$$

wo wir mit U eine Funktion von u und mit V eine Funktion von v allein bezeichnen. Diese Bedingung läßt sich aber durch eine Transformation von der Form (7) sehr wesentlich vereinfachen. Bezeichnet man nämlich mit $\bar{a}'$, $\bar{b}$ usw. die Koeffizienten des Systems partieller Differentialgleichungen, welches aus (5) durch die Transformation (7) hervorgeht, so wird

$$\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}'}\right) = \frac{b}{a'} \frac{\beta_v^3}{\alpha_u^3} = \frac{U}{V} \frac{\beta_v^3}{\alpha_u^3},$$

und man kann $\alpha(u)$ und $\beta(v)$ immer so wählen, daß

$$\alpha_u^3 = U, \quad \beta_v^3 = V$$

wird. Alsdann ist

$$\bar{a}' = \bar{b}.$$

Wir setzen im folgenden voraus, daß diese Transformation schon ausgeführt worden ist, so daß also

(13) $$a' = b = \varphi(u, v) \neq 0.$$

Die allgemeinste Transformation der Form (7), welche diese Normalform des Systems (5) nicht stört, ergibt sich aus (7), wenn man

(14) $$\alpha_u^3 = \beta_v^3 = K^3$$

setzt, wo K eine willkürliche Konstante bedeutet.

Führt man die Werte (13) in die Bedingungen $L = N = 0$ ein, so ergibt sich

(15) $$\begin{aligned} f &= -\varphi_v - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u^2} - \frac{1}{4} \frac{\varphi_u^2}{\varphi^2}, \\ g &= -\varphi_u - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial v^2} - \frac{1}{4} \frac{\varphi_v^2}{\varphi^2}, \end{aligned}$$

und es handelt sich im übrigen nur noch darum, die Integrabilitätsbedingungen (6) zu befriedigen.

Die ersten beiden reduzieren sich auf

$$(16)\qquad \begin{aligned} -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \log\varphi}{\partial u\,\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial u\,\partial v} + 6\varphi\varphi_v = 0, \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \log\varphi}{\partial u^2\,\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial u\,\partial v} + 6\varphi\varphi_u = 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich zunächst

$$\frac{\partial \log\varphi}{\partial u}\frac{\partial^3 \log\varphi}{\partial u\,\partial v^2} - \frac{\partial \log\varphi}{\partial v}\frac{\partial^3 \log\varphi}{\partial u^2\,\partial v} = 0,$$

so daß man findet

$$(17)\qquad \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial u\,\partial v} = F(\varphi),$$

wo $F(\varphi)$ eine Funktion von φ allein bedeutet. Vermöge (17) reduzieren sich die beiden Gleichungen (16) auf eine einzige, nämlich auf

$$(18)\qquad -\frac{1}{2}F'(\varphi) - \frac{1}{2}\frac{F(\varphi)}{\varphi} + 6\varphi = 0,$$

wenn man von dem Falle

$$\varphi = c = \text{const.}$$

absieht. Aus (18) ergibt sich elementar

$$F(\varphi) = 4\varphi^2 + \frac{k}{\varphi},$$

wo k eine Konstante bedeutet, so daß man schließlich, aus (17), für φ die partielle Differentialgleichung

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial u\,\partial v} = 4\varphi^2 + \frac{k}{\varphi}$$

erhält.

Man findet jetzt leicht

$$(20)\qquad \begin{aligned} g_u &= -\varphi_{uu} - 6\varphi\varphi_v, \\ g_v &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \log\varphi}{\partial v^3} - \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial v^2} - \frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2} - 4\varphi^3 - k, \\ f_u &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 \log\varphi}{\partial u^3} - \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial u^2} - \frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2} - 4\varphi^3 - k, \\ f_v &= -\varphi_{vv} - 6\varphi\varphi_u. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die dritte Integrabilitätsbedingung (6) ein, so ergibt sich eine Identität.

Die Differentialgleichung (19) läßt sich noch etwas vereinfachen. Wir haben ja gezeigt, daß die Transformation (7) unter den Bedingungen (14)

die von uns vorausgesetzte Normalform des Systems (5) nicht stört. Setzt man insbesondere

$$\alpha_u = \beta_v = K$$

so ergibt sich

$$\bar{a}' = \frac{a'}{K}, \quad \bar{b} = \frac{b}{K},$$

und demnach

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{K}\varphi.$$

Folglich erhält man aus (19)

$$\frac{\partial^2 \log \bar{\varphi}}{\partial \bar{u}\, \partial \bar{v}} = 4\bar{\varphi}^2 + \frac{k}{K^2 \varphi}.$$

Man kann also durch passende Wahl von K die Konstante k auf einen beliebigen Wert (z. B. $k = 4$) reduzieren, vorausgesetzt, daß k nicht gleich Null ist.

Wir erhalten schließlich das folgende Theorem: *Jede nicht geradlinige Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven ist, bis auf projektive Transformationen, eindeutig bestimmt als Integralfläche des unbeschränkt integrablen Systems partieller Differentialgleichungen*

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2\varphi \frac{\partial y}{\partial v} - \left[\varphi_v + \frac{1}{2}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2}\right] y = 0, \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + 2\varphi \frac{\partial y}{\partial u} - \left[\varphi_u + \frac{1}{2}\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2}\right] y = 0, \end{aligned}$$

wo φ entweder eine nicht verschwindende Konstante oder eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u\, \partial v} = 4\varphi^2 + \frac{k}{\varphi}, \qquad k = 0 \text{ oder } k = 4,$$

bedeutet. Dabei sind die Kurven u = const. und v = const. die Haupttangentenkurven der Fläche.

Es läßt sich zeigen, daß im Falle $k = 0$ jede Haupttangentenkurve der Fläche einem linearen Komplexe angehört. Die Differentialgleichung (22) läßt sich dann leicht in eine Liouvillesche transformieren und es ergibt sich

$$(23)\qquad \varphi = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{U'V'}}{U + V},$$

wo U und V beliebige Funktionen von u und v allein und U' und V' ihre Ableitungen bedeuten.*)

Den Fall φ = const. habe ich in anderem Zusammenhang behandelt. Die entsprechenden Flächen gehören nämlich zu denjenigen, deren ein-

*) C. T. Sullivan, Properties of Surfaces whose asymptotic curves belong to linear complexes. Trans. of the Am. Math. Soc. 15 (1914).

fachste absolute projektive Differentialinvarianten konstant sind.*) Übrigens ist dieser Fall auch in (22) als Spezialfall enthalten.

Obgleich die meisten der folgenden Entwicklungen für $k = 0$ ungültig werden, behalte ich doch die Differentialgleichung in der Form (22) bei. Es versteht sich dann von selbst, daß die entsprechenden Sätze für $k = 0$ illusorisch werden, wenn k im Nenner eines Bruches erscheint. Dieses Verfahren empfiehlt sich, da die übrigen Resultate auch im Falle $k = 0$ ihre Gültigkeit bewahren.

§ 4.

Eigenschaften der beiden Direktrixkongruenzen.

Man kommt leicht auf die Vermutung, daß im Falle unbestimmter Direktrixkurven die Leitlinien erster Art sich auf die Geraden einer festen Ebene und die Leitlinien zweiter Art auf die Geraden durch einen festen Punkt reduzieren müssen. Es kommt uns jetzt darauf an, diese Vermutung analytisch zu bestätigen und überdies die Beziehungen zwischen der gegebenen Fläche, dem festen Punkt und der festen Ebene genauer zu erforschen.

Die Funktionen

$$(24) \qquad y, \quad z = y_u, \quad \rho = y_v, \quad \sigma = y_{uv}$$

sind Semikovarianten des Systems (5).**) Setzt man in einer dieser Semikovarianten, z. B. in z, für y die vier linear unabhängigen Lösungen $y^{(1)}, \ldots, y^{(4)}$ der Differentialgleichungen (5) ein, so erhält man vier Funktionen $z^{(1)}, \ldots, z^{(4)}$, welche wir als homogene Koordinaten eines Punktes P_z deuten, bezogen auf dasselbe Koordinatensystem, in welchem P_y die Koordinaten $y^{(1)}, \ldots, y^{(4)}$ hat. Man erhält demnach aus (24) vier Punkte P_y, P_z, P_ρ, P_σ, welche im allgemeinen ein nicht ausgeartetes Tetraeder bilden. In ganz entsprechender Weise bestimmt jeder Ausdruck von der Form

$$x = x_1 y + x_2 z + x_3 \rho + x_4 \sigma$$

einen Punkt P_x. Bezieht man diesen Punkt auf das durch P_y, P_z, P_ρ, P_σ gebildete Tetraeder, so kann man bei geeigneter Wahl des Einheitspunktes x_1, x_2, x_3, x_4 als homogene Koordinaten von P_x bezeichnen.

Es ergibt sich aus der allgemeinen Theorie, daß die dem Punkt P_y entsprechende Leitlinie zweiter Art die Gratlinie der von ihr beschriebenen abwickelbaren Fläche berührt in dem Punkte

$$(25) \qquad x = \left(\frac{1}{4}\frac{\varphi_u \varphi_v}{\varphi^2} - 2\varphi^2 + \frac{k}{2\varphi}\right) y - \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi} z - \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi} \rho + \sigma. ***)$$

*) E. J. Wilczynski, On a certain class of self-projective surfaces. Trans. of the Am. Math. Soc., October 1913.

**) Erste Abhandlung § 6, S. 247.

***) Zweite Abhandlung S. 117.

Man findet unschwer durch direkte Differentiation, wenn man die Relationen

$$
(26)\quad
\begin{aligned}
&y_u = z, \quad y_v = \varrho, \\
&z_u = -fy - 2\varphi\varrho, \quad z_v = \sigma, \\
&\varrho_u = \sigma, \quad \varrho_v = -gy - 2\varphi z, \\
&\sigma_u = \left(4\varphi\varphi_u + \frac{1}{2}\frac{\varphi_v^2}{\varphi}\right)y + 4\varphi^2 z - \left(\varphi_v - \frac{1}{2}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} + \frac{1}{4}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2}\right)\varrho, \\
&\sigma_v = \left(4\varphi\varphi_v + \frac{1}{2}\frac{\varphi_u^2}{\varphi}\right)y - \left(\varphi_u - \frac{1}{2}\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} + \frac{1}{4}\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2}\right)z + 4\varphi^2\varrho
\end{aligned}
$$

und die Differentialgleichung (22) beachtet, daß

$$
(27)\qquad \varkappa_u = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}\varkappa, \quad \varkappa_v = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}\varkappa.
$$

Die Gleichungen (27) beweisen, daß der Punkt $P_\varkappa$ im Raume fest liegt, d. h. daß in der Tat *alle Leitlinien zweiter Art durch einen festen Punkt $P_\varkappa$ hindurchgehen.*

Die zum Punkt P_y gehörige Leitlinie erster Art läßt sich auffassen als die Verbindungsgerade der beiden Punkte

$$
(28)\qquad r = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}y + z, \quad s = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}y + \varrho.^{*)}
$$

Setzt man zur Abkürzung

$$
(29)\qquad t = \left(\frac{1}{4}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2} - 2\varphi^2 - \frac{k}{2\varphi}\right)y - \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}z - \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}\varrho + \sigma,
$$

so daß, wegen (25)

$$
(30)\qquad \varkappa - t = \frac{k}{\varphi}y
$$

wird, so ergibt sich

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
&r_u + \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}r = -2\varphi s, \qquad r_v - \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}r = t, \\
&s_u - \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}s = t, \qquad\quad s_v + \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}s = -2\varphi r.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst, daß die Punkte P_r, P_s, willkürlichen unendlich kleinen Veränderungen von u und v entsprechend, Bahnen beschreiben, welche dieselbe Ebene berühren, und daß der Punkt P_t in dieser gemeinsamen Tangentenebene liegt. Um zu beweisen, daß die Ebene $P_rP_sP_t$ im Raume fest ist, fügen wir zunächst den Gleichungen (31) noch die entsprechenden Formeln

$$
(32)\qquad t_u + \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}t = -\frac{k}{\varphi}r, \quad t_v + \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}t = -\frac{k}{\varphi}s
$$

---

*) Zweite Abhandlung S. 118.

hinzu und differentiieren (32) nach u und v. Es ergibt sich

$$
(33)\qquad
\begin{aligned}
t_{uu} &= a^{(t)}\, t_u + b^{(t)}\, t_v + c^{(t)}\, t,\\
t_{uv} &= a^{(t)\prime}\, t_u + b^{(t)\prime}\, t_v + c^{(t)\prime}\, t,\\
t_{vv} &= a^{(t)\prime\prime} t_u + b^{(t)\prime\prime} t_v + c^{(t)\prime\prime} t,
\end{aligned}
$$

wo

$$
(34)\qquad
\begin{aligned}
a^{(t)} &= -2\frac{\varphi_u}{\varphi}, & b^{(t)} &= -2\varphi, & c^{(t)} &= -\left(\frac{1}{2}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} + \frac{1}{4}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2} + \varphi_v\right),\\
a^{(t)\prime} &= -\frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}, & b^{(t)\prime} &= -\frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}, & c^{(t)\prime} &= -\left(2\varphi^2 + \frac{3k}{2\varphi} + \frac{1}{4}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2}\right),\\
a^{(t)\prime\prime} &= -2\varphi, & b^{(t)\prime\prime} &= -2\frac{\varphi_v}{\varphi}, & c^{(t)\prime\prime} &= -\left(\frac{1}{2}\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} + \frac{1}{4}\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2} + \varphi_u\right).
\end{aligned}
$$

Die partiellen Differentialgleichungen (33) bilden ein unbeschränkt integrierbares System und besitzen genau drei gemeinsame linear unabhängige Integrale. Folglich beschreibt der Punkt P_t, allen Werten von u und v entsprechend, eine feste Ebene oder, genauer ausgedrückt, einen Bereich in einer festen Ebene. Zufolge (32) gilt dann dasselbe von den beiden Punkten P_r und P_s.

Wir haben also das folgende Resultat erhalten: *Die Leitlinien erster Art einer nicht geradlinigen Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven liegen in einer festen Ebene, die Leitebene heißen soll, und die Leitlinien zweiter Art gehen durch einen festen Punkt, den Leitpunkt der Fläche.*

Zufolge (30) sind die drei Punkte P_y, P_x und P_t kollinear. Ferner sieht man, daß *der Leitpunkt nur dann in der Leitebene liegt, wenn $k = 0$ ist, d. h. wenn die Haupttangentenkurven der Fläche S linearen Komplexen angehören. Alsdann fällt überdies P_t mit P_x zusammen. Sieht man von diesem Falle ab, so charakterisiert das System partieller Differentialgleichungen* (33) *im projektiven Sinne das ebene Kurvennetz, welches aus dem Netz der Haupttangentenkurven von S durch Projektion vom Leitpunkt auf die Leitebene hervorgeht.**)

Wir werden im folgenden dieses ebene Kurvennetz als *stereographische Projektion der Fläche* bezeichnen.

---

*) E. J. Wilczynski, One parameter families and nets of plane curves. Trans. of the Am. Math. Soc. 12 (1911), S. 473—510. Diese Arbeit soll im folgenden als *One parameter families* zitiert werden.

§ 5.

Die wichtigsten Eigenschaften der stereographischen Projektion der Fläche.

Um die Eigenschaften des soeben definierten ebenen Kurvennetzes zu erforschen, berechnen wir zunächst die Semiinvarianten, die Invarianten und Kovarianten des Systems (33).*)

Die fundamentalen Semiinvarianten haben die Werte

$$
(35)\quad
\begin{aligned}
A^{(t)} &= -\frac{1}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi}, & B^{(t)} &= -2\varphi, & C^{(t)} &= \frac{1}{3}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - \frac{1}{9}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2} + \frac{2}{3}\varphi_v,\\
A^{(t)\prime} &= +\frac{1}{3}\frac{\varphi_v}{\varphi}, & B^{(t)\prime} &= +\frac{1}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi}, & C^{(t)\prime} &= -\frac{1}{9}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2} - \frac{2}{3}\frac{k}{\varphi} + \frac{4}{3}\varphi^2,\\
A^{(t)\prime\prime} &= -2\varphi, & B^{(t)\prime\prime} &= -\frac{1}{3}\frac{\varphi_v}{\varphi}, & C^{(t)\prime\prime} &= \frac{1}{3}\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} - \frac{1}{9}\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2} + \frac{2}{3}\varphi_u,
\end{aligned}
$$

woraus sich für die fundamentalen Invarianten die Ausdrücke

$$
(36)\quad
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}^{(t)} = -2\varphi, \quad \mathfrak{C}^{(t)} = 0,\\
&\mathfrak{A}^{(t)\prime} = \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}, \quad \mathfrak{B}^{(t)\prime} = \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad \mathfrak{C}^{(t)\prime} = \frac{2}{3}\left(2\varphi^2 - \frac{k}{\varphi}\right),\\
&\mathfrak{A}^{(t)\prime\prime} = -2\varphi, \quad \mathfrak{C}^{(t)\prime\prime} = 0, \qquad H^{(t)} = K^{(t)} = -\frac{k}{\varphi},
\end{aligned}
$$

und für die Kovarianten die Werte

$$
(37)\qquad \varrho^{(t)} = -\frac{k}{\varphi}\,r, \quad \sigma^{(t)} = -\frac{k}{\varphi}\,s
$$

ergeben.

In der allgemeinen Theorie der ebenen Kurvennetze ordnen die Kovarianten ϱ und σ jedem Punkte P_t der Ebene zwei andere Punkte, P_ϱ und P_σ, zu. Die entsprechenden von P_ϱ und P_σ beschriebenen Kurvennetze gehen dann aus dem ursprünglichen durch Laplacesche Transformation hervor.**) Bezeichnet man die Haupttangentenkurven $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ der Fläche s, als Haupttangentenkurven erster und zweiter Art, und überträgt dieselbe Benennung auf die Tangenten dieser Kurven und die beiden von denselben gebildeten Strahlensysteme, so kann man den geometrischen Inhalt der Gleichungen (31) folgendermaßen formulieren.

Man betrachte die Kongruenz der Haupttangenten erster Art, einer nicht geradlinigen Fläche S mit unbestimmten Direktrixkurven, deren Haupttangentenkurven nicht sämtlich linearen Komplexen angehören. Die abwickel-

*) One parameter families. Gleichungen (13), (21), (29), (36).

**) One parameter families. § 4, S. 486—493.

*baren Flächen dieser Kongruenz einerseits, und die Linienflächen, gebildet von den Strahlen der Kongruenz, welche die Fläche S längs einer Haupttangentenkurve zweiter Art berühren, andererseits, schneiden die Leitebene der Fläche S in einem ebenen Kurvennetz, welches aus der stereographischen Projektion der Haupttangentenkurven durch Laplacesche Transformation hervorgeht.**) Entsprechendes gilt natürlich auch für die Haupttangenten zweiter Art.

Man kann aber noch mehr beweisen. *Die beiden Kurvennetze, welche, entsprechend den beiden Arten der Haupttangenten von S, auf diese Weise in der Leitebene von S entstehen, sind selber durch Laplacesche Transformation miteinander verbunden.*

Wir beweisen diesen zweiten Satz, welcher auch im Falle $k = 0$ gilt, indem wir die dem System (33) analogen Systeme von Differentialgleichungen aufstellen, welchen r und s genügen, und welche uns dann noch weitere Aufklärung geben werden. Zufolge des soeben bewiesenen Theorems kann man diese neuen Differentialgleichungen auch aus (33) durch Laplacesche Transformation erhalten.

Bezeichnet man die Koeffizienten des Systems partieller Differentialgleichungen für das r-Netz in analoger Weise wie in (33), so findet man

$$
\begin{aligned}
&a^{(r)} = \frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad b^{(r)} = -2\varphi, \quad c^{(r)} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} + \frac{5}{4}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2} + \varphi_v, \\
(38)\quad &a^{(r)'} = \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}, \quad b^{(r)'} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad c^{(r)'} = 2\varphi^2 - \frac{k}{2\varphi} + \frac{1}{4}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2}, \\
&a^{(r)''} = \frac{k}{2\varphi^2}, \quad b^{(r)''} = 0, \quad c^{(r)''} = \frac{1}{2}\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2} + \frac{k\varphi_u}{4\varphi^3},
\end{aligned}
$$

mit den entsprechenden Semiinvarianten

$$
\begin{aligned}
&A^{(r)} = \frac{2}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad B^{(r)} = -2\varphi, \quad C^{(r)} = -\frac{2}{3}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} + \frac{14}{9}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2} + \frac{2}{3}\varphi_v, \\
(39)\quad &A^{(r)'} = \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}, \quad B^{(r)'} = -\frac{2}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad C^{(r)'} = \frac{4}{3}\varphi^2 - \frac{2k}{3\varphi} + \frac{2}{9}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2}, \\
&A^{(r)''} = \frac{k}{2\varphi^2}, \quad B^{(r)''} = -\frac{1}{3}\frac{\varphi_v}{\varphi}, \quad C^{(r)''} = \frac{1}{3}\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} - \frac{1}{9}\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2} + \frac{1}{3}\frac{k\varphi_u}{\varphi^3}.
\end{aligned}
$$

Die Werte der wichtigsten Invarianten und Kovarianten des r-Netzes ergeben sich hieraus als folgende:

---

*) Die beiden Zweige der Fleknodenkurve einer jeden dieser Linienflächen fallen zusammen mit der ebenen Kurve, in welcher dieselbe die Leitebene schneidet. Man erhält so eine bemerkenswerte Klasse von Linienflächen.

$$
(40)\quad
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}^{(r)} = -2\varphi, && \mathfrak{C}^{(r)} = 0, \\
&\mathfrak{A}^{(r)\prime} = 0, && \mathfrak{B}^{(r)\prime} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad \mathfrak{C}^{(r)\prime} = \frac{4}{3}\varphi^2 - \frac{2}{3}\frac{k}{\varphi}, \\
&\mathfrak{A}^{(r)\prime\prime} = \frac{k}{2\varphi^2}, && \mathfrak{C}^{(r)\prime\prime} = 0, \\
&H^{(r)} = -\frac{k}{\varphi}, && K^{(r)} = 4\varphi^2,
\end{aligned}
$$

und

$$
(41)\qquad \varrho^{(r)} = -2\varphi s, \quad \sigma^{(r)} = t.
$$

Die entsprechenden Größen für das s-Netz sind zunächst

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
&a^{(s)} = 0, && b^{(s)} = \frac{k}{2\varphi^2}, && c^{(s)} = \frac{1}{2}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2} + \frac{k\varphi_v}{4\varphi^3}, \\
&a^{(s)\prime} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}, && b^{(s)\prime} = \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}, && c^{(s)\prime} = 2\varphi^2 - \frac{k}{2\varphi} + \frac{1}{4}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2}, \\
&a^{(s)\prime\prime} = -2\varphi, && b^{(s)\prime\prime} = \frac{\varphi_v}{\varphi}, && c^{(s)\prime\prime} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} + \frac{5}{4}\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2} + \varphi_u;
\end{aligned}
$$

alsdann

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
&A^{(s)} = -\frac{1}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi}, && B^{(s)} = \frac{k}{2\varphi^2}, && C^{(s)} = \frac{1}{3}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - \frac{1}{9}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2} + \frac{1}{3}\frac{k\varphi_v}{\varphi^3}, \\
&A^{(s)\prime} = -\frac{2}{3}\frac{\varphi_v}{\varphi}, && B^{(s)\prime} = \frac{1}{3}\frac{\varphi_u}{\varphi}, && C^{(s)\prime} = \frac{4}{3}\varphi^2 - \frac{2k}{3\varphi} + \frac{2}{9}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2}, \\
&A^{(s)\prime\prime} = -2\varphi, && B^{(s)\prime\prime} = \frac{2}{3}\frac{\varphi_v}{\varphi}, && C^{(s)\prime\prime} = -\frac{2}{3}\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} + \frac{14}{9}\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2} + \frac{2}{3}\varphi_u,
\end{aligned}
$$

woraus folgt

$$
(44)\quad
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}^{(s)} = \frac{k}{2\varphi^2}, && \mathfrak{C}^{(s)} = 0, \\
&\mathfrak{A}^{(s)\prime} = -\frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}, && \mathfrak{B}^{(s)\prime} = 0, \quad \mathfrak{C}^{(s)\prime} = \frac{4}{3}\varphi^2 - \frac{2}{3}\frac{k}{\varphi}, \\
&\mathfrak{A}^{(s)\prime\prime} = -2\varphi, && \mathfrak{C}^{(s)\prime\prime} = 0, \\
&H^{(s)} = 4\varphi^2, && K^{(s)} = -\frac{k}{\varphi},
\end{aligned}
$$

und

$$
(45)\qquad \varrho^{(s)} = t, \quad \sigma^{(s)} = -2\varphi r.
$$

Die Gleichungen (41) und (45) beweisen die oben aufgestellte Behauptung, welche sich auch folgendermaßen formulieren läßt. *Die drei durch die Fläche S in der Leitebene bestimmten Kurvennetze gehen, im Falle $k \neq 0$, auseinander durch Laplacesche Transformation hervor, und bilden deshalb bei einer solchen Transformation ein geschlossenes dreigliedriges System.*

Bezeichnet man symbolisch mit L die Laplacesche Transformation, welche das t-Netz in das r-Netz verwandelt, so hat man symbolisch

$$
(46)\quad
\begin{aligned}
&L(t) = r, && L^2(t) = L(r) = s, && L^3(t) = L(s) = t, \\
&L^{-1}(t) = s, && L^{-2}(t) = L^{-1}(s) = r, && L^{-3}(t) = L^{-1}(r) = t.
\end{aligned}
$$

Wir drücken deshalb diese Relation zwischen den drei Netzen als Eigenschaft des t-Netzes allein aus, wenn wir sagen: *die stereographische Projektion der Haupttangentenkurven unserer Fläche S ist ein, bei Laplacescher Transformation, periodisches Kurvennetz von der Periode* 3.

Das Verschwinden der Invarianten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}''$ für jedes der drei betrachteten Kurvennetze drückt diese selbe Eigenschaft nur in anderer Form aus.*)

Wesentlich andere Eigenschaften des t-Netzes werden aber durch die Gleichungen

$$H^{(t)} = K^{(t)}, \quad \mathfrak{A}^{(\tau)'} = 0, \quad \mathfrak{B}^{(s)'} = 0 \tag{47}$$

geliefert. Die Invarianten $H^{(t)}$ und $K^{(t)}$ sind nichts anderes als die von Laplace und Darboux betrachteten Invarianten der mittleren Gleichung des Systems (33), und sollen deshalb als die *Laplace-Darbouxschen Invarianten* bezeichnet werden. Man sieht, daß das t-Netz die Eigenschaft hat *gleiche* Laplace-Darbouxsche Invarianten zu besitzen. Obgleich dieser Fall gleicher Invarianten eine große Anzahl Spezialuntersuchungen hervorgerufen hat,**) scheint doch die geometrische Bedeutung dieser Bedingung bis jetzt unbekannt geblieben zu sein. Wir werden im folgenden die allgemeine Bedeutung dieser Relation kennen lernen, beschränken uns aber zunächst auf die weitere Erforschung unseres speziellen Falles in welchem, außer $H^{(t)} = K^{(t)}$, noch die beiden anderen Bedingungen (47) zu berücksichtigen sind.

§ 6.

Die oskulierenden Kegelschnitte der drei Fundamentalnetze.

Um die Gleichungen (47) geometrisch interpretieren zu können, erweist es sich als wesentlich, die oskulierenden Kegelschnitte der drei Fundamentalnetze zu studieren. Wir beziehen diese Kegelschnitte auf ein Koordinatendreieck, welches die Punkte t, $\varrho^{(t)}$ und $\sigma^{(t)}$ als Ecken besitzt, und zwar derart, daß wir dem Punkte der Leitebene, welcher durch den Ausdruck

$$x_1 t + x_2 \varrho^{(t)} + x_3 \sigma^{(t)}$$

bestimmt wird, die homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 beilegen. Eine Verwechslung mit den ähnlich definierten Tetraederkoordinaten des § 4 dürfte nicht zu befürchten sein. Durch Anwendung der allgemeinen Formeln ergeben sich dann

---

*) One parameter families, S. 506.

**) Besonders von Moutard und Darboux. Man vgl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2.

$$(48)\qquad M^{(t)} \equiv 4\varphi x_1 x_3 + 4\varphi^2 x_2^2 - 8\varphi_u x_2 x_3 + \left(\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - \frac{\varphi_u^2}{\varphi^2}\right) x_3^2 = 0$$

und

$$(49)\qquad N^{(t)} \equiv 4\varphi x_1 x_2 + \left(\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} - \frac{\varphi_v^2}{\varphi^2}\right) x_2^2 - 8\varphi_v x_2 x_3 + 4\varphi^2 x_3^2 = 0$$

als Gleichungen der beiden Kegelschnitte, welche resp. die Kurven $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ des t-Netzes im Punkte P_t oskulieren.*)

In ganz entsprechender Weise legen wir zunächst dem durch den Ausdruck

$$(50)\qquad x_1^{(r)} r + x_2^{(r)} \varrho^{(r)} + x_3^{(r)} \sigma^{(r)}$$

gelieferten Punkte die homogenen Koordinaten $x_1^{(r)}$, $x_2^{(r)}$, $x_3^{(r)}$ bei. Bezogen auf dieses Koordinatensystem, haben die oskulierenden Kegelschnitte der Kurven $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ des r-Netzes die Gleichungen

$$4\varphi^2 x_2^{(r)2} + 4\varphi_u x_2^{(r)} x_3^{(r)} + 4\varphi x_1^{(r)} x_3^{(r)} - \left(\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - 2\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2}\right) x_3^{(r)2} = 0,$$

respektive

$$\frac{k}{2\varphi^2} x_3^{(r)2} - 2 x_1^{(r)} x_2^{(r)} = 0.$$

Nun ist aber

$$r = -\frac{\varphi}{k} \varrho^{(t)}, \quad \varrho^{(r)} = \frac{2\varphi^2}{k} \sigma^{(t)}, \quad \sigma^{(r)} = t,$$

sodaß der Ausdruck (50) gleich

$$(51)\qquad x_3^{(r)} t - \frac{\varphi}{k} x_1^{(r)} \varrho^{(t)} + \frac{2\varphi^2}{k} x_2^{(r)} \sigma^{(t)}$$

wird. Bezeichnet man wieder die Koordinaten desselben Punktes, bezogen auf das oben benutzte Koordinatensystem des t-Netzes, mit x_1, x_2, x_3, so muß man x_1, x_2, x_3 proportional den Koeffizienten von t, $\varrho^{(t)}$ und $\sigma^{(t)}$ in (51) setzen. Man erhält also

$$\omega x_1 = x_3^{(r)}, \quad \omega x_2 = -\frac{\varphi}{k} x_1^{(r)}, \quad \omega x_3 = \frac{2\varphi^2}{k} x_2^{(r)},$$

oder umgekehrt

$$\omega' x_1^{(r)} = -2k\varphi x_2, \quad \omega' x_2^{(r)} = k x_3, \quad \omega' x_3^{(r)} = 2\varphi^2 x_1.$$

Führt man diese Werte in die obigen Gleichungen ein, so erhält man schließlich

$$(52)\qquad M^{(r)} \equiv k^2 x_3^2 + 2k\varphi_u x_1 x_3 - 4k\varphi^2 x_1 x_2 - \left(\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - 2\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2}\right) \varphi^2 x_1^2 = 0$$

und

$$(53)\qquad N^{(r)} \equiv \varphi x_1^2 + 2k x_2 x_3 = 0,$$

also die Gleichungen der Kegelschnitte, welche die beiden sich in P_r

*) One parameter families, Gleichungen (83) und (87).

kreuzenden Kurven des r-Netzes oskulieren, und zwar entspricht $M^{(r)}$ der betreffenden Kurve $v = \text{const.}$ und $N^{(r)}$ der betreffenden Kurve $u = \text{const.}$ des r-Netzes.

Durch eine ähnliche Rechnung findet man die Gleichungen der Kegelschnitte, welche die beiden sich in P_s kreuzenden Kurven des s-Netzes oskulieren, nämlich:

$$(54)\quad M^{(s)} \equiv \varphi x_1^2 + 2kx_2x_3 = 0$$

und

$$(55)\quad N^{(s)} \equiv -\left(\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} - 2\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2}\right)\varphi^2 x_1^2 + 2k\varphi_v x_1x_2 + k^2x_2^2 - 4k\varphi^2 x_1x_3 = 0.$$

Die Kegelschnitte $N^{(r)}$ und $M^{(s)}$ sind also identisch. Verbindet man dieses Resultat mit einem der Sätze des vorigen Abschnitts, so ergibt sich das folgende Fundamentaltheorem.

Projiziert man eine nicht geradlinige Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven, deren Haupttangentenkurven nicht sämtlich linearen Komplexen angehören, von ihrem Leitpunkt auf ihre Leitebene, so bilden sich die Haupttangentenkurven ab als Kurven eines ebenen Kurvennetzes (des t-Netzes), welches bei Laplacescher Transformation die Periode 3 besitzt. Man bezeichne die beiden aus dem t-Netz durch Laplacesche Transformation hervorgehenden Kurvennetze als r-Netz und s-Netz, und die beiden Punkte, welche einem Punkte P_t des t-Netzes in diesen Netzen entsprechen mit P_r und P_s. Alsdann wird die Kurve des r-Netzes, welche in P_r die Gerade P_rP_t berührt, in P_r von demselben Kegelschnitt oskuliert, welcher auch in P_s diejenige Kurve des s-Netzes oskuliert, welche in P_s die Gerade P_sP_t berührt.

Wir bezeichnen im folgenden den eben erwähnten gemeinsamen oskulierenden Kegelschnitt als den *zum Punkte P_t gehörigen Hauptkegelschnitt.* Wir werden im folgenden Abschnitt zeigen, daß der eben bewiesene Satz sich umkehren läßt; d. h. *daß ein jedes Netz mit diesen Eigenschaften sich auffassen läßt als stereographische Projektion der Haupttangentenkurven einer Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven.* Wir werden sogar noch spezieller zeigen, daß *die Existenz eines zu jedem Punkte des t-Netzes gehörigen Hauptkegelschnittes genügt, um das Netz als stereographische Projektion einer Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven zu charakterisieren.*

Wir haben unser Fundamentaltheorem bewiesen unter der Voraussetzung, daß φ keine Konstante ist und demnach der Differentialgleichung (19) genügen muß. *Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß der Satz auch im Falle $\varphi = \text{const.}$ gültig bleibt. Nur ergibt sich überdies, daß in diesem Falle die drei Kurvennetze zueinander projektiv sind, und daß die sechs in entsprechenden Punkten oskulierenden Kegelschnitte der drei Netze paarweise zusammenfallen, sodaß nur drei getrennte oskulierende Kegelschnitte übrig bleiben, statt der fünf des allgemeinen Falles.*

§ 7.

Allgemeine Beziehungen zwischen den oskulierenden Kegelschnitten dreier durch Laplacesche Transformation zusammenhängender ebener Kurvennetze.

Es seien vorgelegt die Differentialgleichungen eines ebenen Kurvennetzes in ihrer kanonischen Form

$$(56)\qquad \begin{aligned} y_{uu} &= Ay_u + By_v + Cy, \\ y_{uv} &= A'y_u + B'y_v + C'y, \\ y_{vv} &= A''y_u + B''y_v + C''y, \end{aligned}$$

wo

$$(57)\qquad A + B' = 0, \quad A' + B'' = 0.$$

Um die Differentialgleichungen des ersten Laplaceschen transformierten Netzes, gleichfalls in der kanonischen Form zu erhalten, setzt man

$$y_1 = \frac{y_v - A'y}{\sqrt[3]{A''H}} = \frac{\sigma}{\sqrt[3]{A''H}},$$

wo H die Laplace-Darbouxsche Invariante

$$H = C' + A'B' - A'_u$$

bedeutet. Man findet dann für y_1 ein System von Differentialgleichungen von der Form (56), dessen Koeffizienten A_1, B_1, C_1 usw. sich durch die Koeffizienten von (56) ausdrücken lassen.*)

Bezeichnet man die fundamentalen Kovarianten dieses Systems mit ϱ_1 und σ_1, setzt also

$$\varrho_1 = \frac{\partial y_1}{\partial u} - B_1'y_1, \quad \sigma_1 = \frac{\partial y_1}{\partial v} - A_1'y_1,$$

so ergibt sich

$$(58)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{\sigma}{\sqrt[3]{A''H}}, \quad \varrho_1 = \frac{Hy}{\sqrt[3]{A''H}}, \\ \sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{A''H}}\left[\mathfrak{C}''y + \mathfrak{A}''\varrho - \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}_1}{H}\sigma\right]. \end{aligned}$$

Es seien x_1, x_2, x_3 die Koordinaten eines Punktes bezogen auf das Dreieck $P_y P_\varrho P_\sigma$ und $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$ die Koordinaten desselben Punktes bezogen auf das Dreieck $P_{y_1} P_{\varrho_1} P_{\sigma_1}$. Dann unterscheiden sich die beiden Ausdrücke

$$x_1 y + x_2 \varrho + x_3 \sigma \quad \text{und} \quad x_1^{(1)} y_1 + x_2^{(1)} \varrho_1 + x_3^{(1)} \sigma_1,$$

*) One parameter families, Gleichungen (45).

nur durch einen Faktor, und es wird

$$
(59)\qquad \begin{aligned}
\omega x_1^{(1)} &= \mathfrak{A}''\mathfrak{C}_1 x_2 + \mathfrak{A}'' H x_3,\\
\omega x_2^{(1)} &= \mathfrak{A}'' x_1 - \mathfrak{C}'' x_2,\\
\omega x_3^{(1)} &= H x_2.
\end{aligned}
$$

Nun sind die Gleichungen der beiden Kegelschnitte M und N, welche die Kurven $v =$ const. und $u =$ const. des ursprünglichen y-Netzes im Punkte (u, v) oskulieren,

$$
(60)\qquad \begin{aligned}
M &\equiv \mathfrak{B}^2 x_2^2 + 4\mathfrak{B}\mathfrak{B}' x_2 x_3 - 2\mathfrak{B} x_1 x_3 + \Phi x_3^2 = 0,\\
N &\equiv \Psi x_2^2 + 4\mathfrak{A}'\mathfrak{A}'' x_2 x_3 - 2\mathfrak{A}'' x_1 x_2 + \mathfrak{A}''^2 x_3^2 = 0,
\end{aligned}
$$

wo

$$
(61)\qquad \begin{aligned}
\Phi &= \mathfrak{C} \;\; - 4\mathfrak{B}'^2 + 2\mathfrak{B}'_u + 6\mathfrak{B}' B',\\
\Psi &= \mathfrak{C}'' - 4\mathfrak{A}'^2 + 2\mathfrak{A}'_v + 6\mathfrak{A}' A',
\end{aligned}
$$

und wo $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ usw. Invarianten des y-Netzes bedeuten.*)

Um die oskulierenden Kegelschnitte des y_1-Netzes in dem entsprechenden Punkte zu erhalten, hat man in (60) alle Größen durch die entsprechenden des transformierten Netzes zu ersetzen. Führt man dann noch die Koordinatentransformation (59) aus, um diese Kegelschnitte auf dasselbe Koordinatensystem zu beziehen, wie die Kegelschnitte M und N, so erhält man

$$
(62)\qquad M_1 \equiv x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 - 2H x_2 x_3 = 0,
$$

wo

$$
(63)\qquad \begin{aligned}
a_{12} &= 2\mathfrak{B}_1' - \frac{\mathfrak{C}''}{\mathfrak{A}''},\\
a_{22} &= \Phi_1 - 2\mathfrak{C}_1 - 4\,\frac{\mathfrak{B}_1'\mathfrak{C}''}{\mathfrak{A}''} + \frac{\mathfrak{C}''^2}{\mathfrak{A}''^2}.
\end{aligned}
$$

In ganz entsprechender Weise erhält man für die -1^{te} Laplacesche Transformation

$$
(64)\qquad \begin{aligned}
y_{-1} &= \frac{\varrho}{\sqrt[3]{BK}}, \quad \sigma_{-1} = \frac{Ky}{\sqrt[3]{BK}},\\
\varrho_{-1} &= \frac{1}{\sqrt[3]{BK}}\left[\mathfrak{C}y - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}''_{-1}}{K}\varrho + \mathfrak{B}\sigma\right],
\end{aligned}
$$

die Gleichung des Kegelschnitts N_{-1}, nämlich

$$
(65)\qquad N_{-1} \equiv x_1^2 + 2b_{13} x_1 x_3 + b_{33} x_3^2 - 2K x_2 x_3 = 0,
$$

wo

$$
\begin{aligned}
b_{13} &= 2\mathfrak{A}'_{-1} - \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}},\\
b_{33} &= \Psi_{-1} - 2\mathfrak{C}''_{-1} + \frac{\mathfrak{A}'_{-1}\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} + 4\,\frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{B}^2}.
\end{aligned}
$$

*) One parameter families, Gleichungen (83)—(88); die Invarianten werden dort definiert durch die Formeln (21).

Man betrachte den durch M_1 und N_{-1} bestimmten Kegelschnittbüschel. Der einzige Kegelschnitt dieses Büschels welcher durch P_y $(x_2 = x_3 = 0)$ hindurchgeht, ist

$$(66) \quad M_1 - N_{-1} \equiv 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 - 2b_{13}x_1x_3 - b_{33}x_3^2 + 2(K-H)x_2x_3 = 0.$$

Derselbe schneidet die Gerade $P_{y_1}P_{y_{-1}}$ $(x_1 = 0)$ in zwei Punkten, welche die Strecke $P_{y_1}P_{y_{-1}}$ harmonisch teilen, wenn

$$H = K$$

und nicht zugleich

$$a_{22} = b_{33} = 0.$$

Ist aber

$$H = K, \quad a_{22} = b_{33} = 0,$$

so zerfällt entweder der Kegelschnitt $M_1 - N_{-1}$ in ein Linienpaar, oder die Kegelschnitte M_1 und N_{-1} sind identisch.

Man erhält also das folgende Theorem, in welchem die geometrische Bedeutung der Beziehung $H = K$ zwischen den Laplace-Darbouxschen Invarianten einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = A' \frac{\partial y}{\partial u} + B' \frac{\partial y}{\partial v} + C' y$$

enthalten ist.

Es sei P ein beliebiger Punkt eines ebenen Kurvennetzes mit gleichen Laplace-Darbouxschen Invarianten, und es seien P_1 und P_{-1} die entsprechenden Punkte des ersten und des minus ersten Laplaceschen transformierten Netzes. Es gibt dann eine Kurve des ersteren Netzes, welche die Gerade P_1P in P_1, und eine Kurve des letzteren Netzes, welche $P_{-1}P$ in P_{-1} berührt. Es seien M_1 und N_{-1} die Kegelschnitte, welche diese beiden Kurven in P_1 und P_{-1} oskulieren. Entweder teilt dann der durch P gehende Kegelschnitt des durch M_1 und N_{-1} bestimmten Büschels die Strecke P_1P_{-1} harmonisch, oder dieser Kegelschnitt zerfällt in ein Linienpaar, dessen einer Bestandteil mit P_1P_{-1} identisch ist, oder endlich die Kegelschnitte M_1 und N_{-1} fallen zusammen.

Da es uns vor allen Dingen darauf ankommt, die am Schluß des § 6 ausgesprochene Umkehrung zu beweisen, nehmen wir jetzt an, daß die beiden Kegelschnitte M_1 und N_{-1} zusammenfallen. Dann ist

$$H = K, \quad a_{12} = a_{22} = b_{13} = b_{33} = 0.$$

Aus der Bedingung $H = K$ ergibt sich zunächst

$$A'_u = B'_v,$$

sodaß man setzen darf

$$(67) \qquad A' = \frac{\lambda_v}{\lambda}, \quad B' = \frac{\lambda_u}{\lambda}.$$

Aus den Bedingungen $a_{12} = b_{12} = 0$ folgt dann

$$(68)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{C} &= 2\mathfrak{B}\mathfrak{A}'_{-1} = -\mathfrak{B}_v + 2\frac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{B} - \frac{1}{3}\frac{H_v}{H}\mathfrak{B}, \\ \mathfrak{C}'' &= 2\mathfrak{A}''\mathfrak{B}'_1 = -\mathfrak{A}''_u + 2\frac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{A}'' - \frac{1}{3}\frac{H_u}{H}\mathfrak{A}''. \end{aligned}$$

Andererseits ergibt sich aus den Integrabilitätsbedingungen des Netzes

$$(69)\qquad \mathfrak{C} = -\mathfrak{B}_v + 3\frac{\lambda_v}{\lambda}\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}'' = -\mathfrak{A}''_u + 3\frac{\lambda_u}{\lambda}\mathfrak{A}'',$$

sodaß man durch Elimination von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}''$ die Gleichungen

$$\mathfrak{B}\left(\frac{\lambda_v}{\lambda} + \frac{1}{3}\frac{H_v}{H}\right) = 0, \quad \mathfrak{A}''\left(\frac{\lambda_u}{\lambda} + \frac{1}{3}\frac{H_u}{H}\right) = 0$$

erhält. Wir dürfen voraussetzen, daß

$$\mathfrak{A}'' \neq 0, \quad \mathfrak{B} \neq 0.$$

Im entgegengesetzten Falle würden nämlich entweder die Kurven $u = \text{const.}$ oder $v = \text{const.}$ gerade Linien werden, sodaß mindestens eine der beiden hier betrachteten Laplaceschen Transformationen versagen würde. Es muß also

$$(70)\qquad H\lambda^3 = c$$

sein, wo c eine Konstante bedeutet.

Man findet mit diesen Werten

$$\mathfrak{C}_1 = 0, \quad \mathfrak{B}'_1 = \frac{1}{2}\left(3\frac{\lambda_u}{\lambda} - \frac{\mathfrak{A}''_u}{\mathfrak{A}''}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{C}''}{\mathfrak{A}''}, \quad B'_1 = \frac{1}{3}\left(6\frac{\lambda_u}{\lambda} - \frac{\mathfrak{A}''_u}{\mathfrak{A}''}\right),$$

sodaß die Gleichung $a_{22} = 0$ sich reduziert auf

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathfrak{C}''}{\mathfrak{A}''}\right) + \frac{\mathfrak{A}''_u}{\mathfrak{A}''}\frac{\mathfrak{C}''}{\mathfrak{A}''} = 0,$$

woraus folgt

$$\mathfrak{C}'' = V$$

wo V eine Funktion von v allein bedeutet. In ganz entsprechender Weise findet man

$$\mathfrak{C} = U$$

wo U eine Funktion von u allein bedeutet.

Setzt man diese Werte von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}''$ in die beiden Integrabilitätsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_v - H_u - 3B'H + \mathfrak{B}\mathfrak{C}'' &= 0, \\ \mathfrak{C}''_u - H_v - 3A'H - \mathfrak{A}''\mathfrak{C} &= 0 \end{aligned}$$

ein, so findet man, daß

$$(71)\qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'' = 0$$

sein muß.

Aus (69) ergibt sich nun

$$\mathfrak{B} = \lambda^3 U, \qquad \mathfrak{A}'' = \lambda^3 V,$$

wo wir wieder mit U und V Funktionen von u und v allein bezeichnen. Nun sind aber $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}$ relative Invarianten des Kurvennetzes, welche bei der Transformation

$$\bar{u} = \alpha(u), \qquad \bar{v} = \beta(v)$$

übergehen in

$$\overline{\mathfrak{B}} = \frac{\beta'(v)}{\alpha'(u)^2}\mathfrak{B}, \qquad \overline{\mathfrak{A}}'' = \frac{\alpha'(u)}{\beta'(v)^2}\mathfrak{A}'',$$

sodaß

$$\left(\frac{\overline{\mathfrak{A}''}}{\overline{\mathfrak{B}}}\right) = \frac{\alpha'(u)^3}{\beta'(v)^3}\,\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{B}} = \frac{\alpha'(u)^3}{\beta'(v)^3}\,\frac{V}{U}.$$

Man kann also durch passende Wahl von $\alpha(u)$ und $\beta(v)$ erreichen, daß $\overline{\mathfrak{A}}''$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ einander gleich werden. Wir setzen voraus, daß die unabhängigen Veränderlichen von Anfang an so gewählt worden sind, und bezeichnen den gemeinsamen Wert von $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}$ mit -2φ, setzen also

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{B} = -2\varphi(u, v).$$

Zufolge (68) wird dann

$$\frac{1}{3}\,\frac{H_u}{H} = -\frac{\varphi_u}{\varphi} + 2\,\frac{\lambda_u}{\lambda}, \qquad \frac{1}{3}\,\frac{H_v}{H} = -\frac{\varphi_v}{\varphi} + 2\,\frac{\lambda_v}{\lambda},$$

oder, wegen (67) und (70),

$$B' = \frac{\lambda_u}{\lambda} = \frac{1}{3}\,\frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad A' = \frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{1}{3}\,\frac{\varphi_v}{\varphi}, \quad H = K = \frac{c}{\varphi}.$$

Aus der noch nicht benutzten Integrabilitätsbedingung

$$3\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}''\mathfrak{B} - H - K = 0$$

ergibt sich noch

$$\mathfrak{C}' = \frac{1}{3}\left(4\varphi^2 + \frac{2c}{\varphi}\right).$$

Berücksichtigt man die Ausdrücke der Invarianten als Funktionen der Semiinvarianten, so erhält man

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{3}\,\frac{\varphi_u}{\varphi}, & B &= -2\varphi, & C &= \frac{1}{3}\,\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - \frac{1}{9}\,\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2} + \frac{2}{3}\,\varphi_v,\\
A' &= \frac{1}{3}\,\frac{\varphi_v}{\varphi}, & B' &= \frac{1}{3}\,\frac{\varphi_u}{\varphi}, & C' &= \frac{4}{3}\,\varphi^2 + \frac{2c}{3\varphi} - \frac{1}{9}\,\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2},\\
A'' &= -2\varphi, & B'' &= -\frac{1}{3}\,\frac{\varphi_v}{\varphi}, & C'' &= \frac{1}{3}\,\frac{\varphi_{vv}}{\varphi} - \frac{1}{9}\,\frac{\varphi_v^2}{\varphi^2} + \frac{2}{3}\,\varphi_u.
\end{aligned}$$

Nun ist aber auch

$$\mathfrak{C}' = H + A'_u = H + \frac{1}{3}\,\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial u\,\partial v},$$

sodaß

$$\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial u\,\partial v} = 4\varphi^2 - \frac{c}{\varphi}$$

sein muß. Setzt man noch $c = -k$, so erhält man genau das System der Semiinvarianten (35). Wir haben also bewiesen, daß *ein jedes ebenes Kurvennetz, für dessen sämtliche Punkte die Kegelschnitte M_1 und N_{-1} zusammenfallen, sich auffassen läßt als stereographische Projektion der Haupttangentenkurven einer Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven.*

§ 8.

Bestimmung des t-Netzes durch Grenzbedingungen.

Aus einem bekannten Theorem von Picard folgt der folgende Satz: Es existiert eine analytische Funktion $\varphi(u, v)$, welche eindeutig bestimmt wird durch die folgenden Bedingungen. Sie soll der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \log \varphi}{\partial u \, \partial v} = \varphi^2 + \frac{k}{\varphi}$$

genügen; sie soll sich für $u = u_0$ auf eine vorgeschriebene analytische Funktion $V(v)$ von v allein, und für $v = v_0$ auf eine willkürliche analytische Funktion $U(u)$ von u allein reduzieren, wobei die beiden Funktionen $U(u)$ und $V(v)$ nur der Bedingung unterworfen sind, daß $\varphi^2 + \frac{k}{\varphi}$ für $u = u_0$ und $v = v_0$ endlich bleibt, und daß

$$U(u_0) = V(v_0).$$

Von diesem Satz machen wir jetzt eine Anwendung. Wir werden zeigen, daß eine Kurve $u = \text{const.}$ und eine Kurve $v = \text{const.}$ des t-Netzes willkürlich vorgeschrieben werden kann und daß das Netz dann bis auf drei willkürliche Konstanten eindeutig bestimmt ist. Dabei ist die Beschränkung auf analytische Funktionen nicht wesentlich, da der Picardsche Satz im reellen Falle auch für nicht analytische Funktionen gilt. Um aber auch den Fall komplexer Haupttangentenkurven in unserer Untersuchung zu umfassen, scheint es uns bequemer, diese Einschränkung einzuführen.

Aus den Gleichungen (33) und (34) des t-Netzes findet man zunächst

$$t_{uuu} + 3p_1 t_{uu} + 3p_2 t_u + p_3 t = 0,$$

wo

$$p_1 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}, \quad p_2 = \frac{5}{6}\frac{\varphi_{uu}}{\varphi} - \frac{11}{12}\frac{\varphi_u^2}{\varphi^2},$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\frac{\varphi_{uuu}}{\varphi} - \frac{1}{4}\frac{\varphi_{uu}\varphi_u}{\varphi^2} - \frac{5}{8}\frac{\varphi_u^3}{\varphi^3} - 2k,$$

als Differentialgleichung einer einzelnen Kurve $v = \text{const.}$ des t-Netzes. Reduziert sich $\varphi(u, v)$ für $v = v_0$ auf $U(u)$, so ergibt sich insbesondere die Differentialgleichung

$$\frac{d^3 t}{du^3} + 3p_1 \frac{d^2 t}{du^2} + 3p_2 \frac{dt}{du} + p_3 t = 0, \tag{72}$$

wo

$$p_1 = \frac{1}{2}\frac{U'}{U}, \quad p_2 = \frac{5}{6}\frac{U''}{U} - \frac{11}{12}\frac{U'^2}{U^2},$$

(73)

$$p_3 = \frac{1}{2}\frac{U'''}{U} - \frac{1}{4}\frac{U''U'}{U^2} - \frac{5}{8}\frac{U'^3}{U^3} - 2k$$

für die Kurve $v = v_0$ des Netzes, und es kommt uns darauf an zu beweisen, daß die nach dem Picardschen Satz willkürliche Funktion $U(u)$ so gewählt werden kann, daß diese Kurve $v = v_0$ mit einer beliebig vorgegebenen nicht geradlinigen analytischen Kurve zusammenfällt.

Wir stützen uns dabei auf die folgenden Sätze aus der projektiven Differentialgeometrie der ebenen Kurven.*) Es seien $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ die homogenen Koordinaten eines veränderlichen Punktes P_y einer ebenen nicht geradlinigen analytischen Kurve C_y. Dann sind y_1, y_2, y_3 linear unabhängige Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung

(74) $$\frac{d^3y}{dx^3} + 3q_1\frac{d^2y}{dx^2} + 3q_2\frac{dy}{dx} + q_3 y = 0,$$

dessen Semiinvarianten

(75) $$Q_2 = q_2 - q_1^2 - q_1', \quad Q_3 = q_3 - 3q_1q_2 + 2q_1^3 - q_1''$$

und Invarianten

(76) $$\theta_3 = Q_3 - \frac{3}{2}Q_2', \quad \theta_8 = 6\theta_3\theta_3'' - 7(\theta_3')^2 - 27Q_2\theta_3^2$$

sich leicht als Funktionen von x berechnen lassen.

Sind umgekehrt θ_3 und θ_8 als willkürliche Funktionen von x gegeben, so existiert eine analytische Kurve, deren Invarianten die gegebenen Werte besitzen und welche bis auf projektive Transformation eindeutig bestimmt ist. Insbesondere ist diese Kurve ein Kegelschnitt, wenn θ_3 und also auch θ_8 identisch verschwindet.

Es sei jetzt C eine beliebig vorgeschriebene analytische nicht geradlinige Kurve und es sei (74) ihre Differentialgleichung bezogen auf eine irgendwie gewählte unabhängige Veränderliche x. Es seien ferner

$$\theta_3 = \varphi_3(x), \quad \theta_8 = \varphi_8(x)$$

die Werte ihrer Invarianten als Funktionen von x, wo also $\varphi_3(x)$ und $\varphi_8(x)$ als beliebig vorgeschriebene Funktionen anzusehen sind.

Die Invarianten der Kurve $v = v_0$ ergeben sich leicht durch Anwendung der zu (75) und (76) analogen Formeln. Man findet

$$\theta_3(u) = -\frac{1}{2}\left(\frac{U'''}{U} - 5\frac{U''U'}{U^2} + 4\frac{U'^3}{U^3} + 4k\right),$$

(77)

$$\theta_8(u) = 6\theta_3\theta_3'' - 7(\theta_3')^2 - 27P_2\theta_3^2,$$

---

*) E. J. Wilczynski: *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces.* B. G. Teubner, Leipzig 1906, S. 58—61.

wo U', U'' usw. Ableitungen nach u bedeuten. Damit die Kurve $v = v_0$ mit C zusammenfallen möge, muß es möglich sein, u derart als Funktion von x zu bestimmen, daß identisch

$$\theta_3(u) = \varphi_3(x), \quad \theta_8(u) = \varphi_8(x) \tag{78}$$

wird. Umgekehrt folgt aus dem identischen Bestehen der Gleichungen (78) allerdings zunächst nur, daß die beiden Kurven zueinander projektiv sind. Durch passende Wahl des Fundamentalsystems der Lösungen von (72) kann man dann aber auch erreichen, daß die beiden Kurven zusammenfallen, und zwar nur in einer Weise, wenn überdies die Kurve C nicht eine selbstprojektive ist.

Wegen (73) kann man auch schreiben

$$p_2 = \frac{1}{3}(5p_1' - p_1^2), \quad p_3 = p_1'' + 5p_1p_1' - 3p_1^3 - 2k,$$

$$P_2 = \frac{2}{3}(p_1' - 2p_1^2), \quad P_3 = -2k,$$

und schließlich

$$\theta_3(u) = -2k - p_1'' + 4p_1p_1',$$
$$\theta_8(u) = 6\theta_3\theta_3'' - 7(\theta_3')^2 - 18(p_1' - 2p_1^2)\theta_3^2.$$

Es kommt also darauf an zu zeigen, daß man p_1 und u als Funktionen von x derart bestimmen kann, daß die Gleichungen (78) oder

$$-2k - \frac{d^2p_1}{du^2} + 4p_1\frac{dp_1}{du} = \varphi_3(x),$$

$$6\varphi_3\frac{d^2\varphi_3}{du^2} - 7\left(\frac{d\varphi_3}{du}\right)^2 - 18\left(\frac{dp_1}{du} - 2p_1^2\right)\varphi_3^2 = \varphi_8(x)$$

befriedigt werden, bei willkürlich vorgeschriebenen $\varphi_3(x)$ und $\varphi_8(x)$.

Führen wir überall x als unabhängige Veränderliche ein, so erhalten diese beiden Gleichungen die Form

$$\begin{gathered} -2k + 4p_1\frac{\frac{dp_1}{dx}}{\frac{du}{dx}} - \frac{\frac{du}{dx}\frac{d^2p_1}{dx^2} - \frac{dp_1}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}}{\left(\frac{du}{dx}\right)^3} = \varphi_3(x), \\ 6\varphi_3\frac{\frac{du}{dx}\frac{d^2\varphi_3}{dx^2} - \frac{d\varphi_3}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}}{\left(\frac{du}{dx}\right)^3} - 7\frac{\left(\frac{d\varphi_3}{dx}\right)^2}{\left(\frac{du}{dx}\right)^2} - 18\left(\frac{\frac{dp_1}{dx}}{\frac{du}{dx}} - 2p_1^2\right)\varphi_3^2(x) = \varphi_8(x). \end{gathered} \tag{79}$$

Wenn die gegebene Kurve C kein Kegelschnitt ist, so ist

$$\varphi_3(x) \not\equiv 0$$

und man kann durch eine passend gewählte Transformation der unabhängigen Veränderlichen x stets erreichen, daß φ_3 identisch gleich der

Einheit wird.*) Wir nehmen an, daß man diese Transformation ausgeführt hat, so daß wird

$$\varphi_8(x) \equiv 1.$$

Aus (79) ergibt sich dann

$$\frac{dp_1}{dx} = \left[2p_1^2 - \frac{1}{18}\varphi_8(x)\right]\frac{du}{dx},$$

$$-2k + 4p_1\left[2p_1^2 - \frac{1}{18}\varphi_8(x)\right] - \frac{d}{dx}\left[2p_1^2 - \frac{1}{18}\varphi_8(x)\right]\frac{1}{\frac{du}{dx}} = 1.$$

Führt man die angedeutete Differentiation in der letzten Gleichung aus, unter Beachtung der ersten, so findet man schließlich

$$(80)\qquad \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{18(2k+1)}\frac{d\varphi_8(x)}{dx}, \\ \frac{dp_1}{dx} &= \frac{1}{18(2k+1)}\frac{d\varphi_8(x)}{dx}\left[2p_1^2 - \frac{1}{18}\varphi_8(x)\right]. \end{aligned}$$

Da wir $k = 4$ voraussetzen dürfen, ist $2k+1$ von Null verschieden und man erhält zunächst

$$(81)\qquad u - u_0 = \frac{1}{18(2k+1)}\left[\varphi_8(x) - \varphi_8(x_0)\right],$$

wenn wir mit u_0 den Wert von u bezeichnen, welcher $x = x_0$ entsprechen soll, und wo man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u_0 = 0$ setzen kann, da man ja den Anfangspunkt der u-Skala willkürlich wählen darf. Man erhält dann p_1 als Funktion von x oder auch von u durch Integration einer Riccatischen Differentialgleichung und somit von einer Integrationskonstante linear abhängig. Da zufolge (73)

$$\frac{U'}{U} = 2p_1$$

ist, ergibt sich schließlich

$$(82)\qquad U(u) = Ce^{2\int p_1\,du},$$

so daß $U(u)$ durch die vorgegebene Kurve $v = v_0$ bis auf zwei willkürliche Konstanten bestimmt worden ist. In ganz entsprechender Weise wird die Funktion $V(v)$ durch die vorgegebene Kurve $u = u_0$ bis auf zwei willkürliche Konstanten bestimmt. Da überdies

$$U(u_0) = V(v_0)$$

sein muß, reduziert sich die Zahl der in $U(u)$ und $V(v)$ noch übrig bleibenden Konstanten auf drei.

Man erkennt leicht, daß die in p_1 auftretende Konstante bestimmt werden kann durch Fixierung des dem Punkte (u_0, v_0) des t-Netzes ent-

---

*) l. c. S. 61.

sprechenden Punktes des -1^{ten} Laplaceschen transformierten Netzes. In ähnlicher Weise entspricht die zweite Konstante der Lage des entsprechenden Punktes des ersten Laplaceschen transformierten Netzes. Die dann noch übrig bleibende Konstante tritt in $\varphi(u, v)$ als Faktor auf und wird bestimmt, sobald man den Kegelschnitt (54) innerhalb des Büschels

$$\lambda\varphi x_1^2 + 2kx_2x_3 = 0$$

bestimmt ausgewählt hat.

Wir erhalten schließlich das folgende Theorem: *Man wähle zwei nicht geradlinige, aber sonst beliebige analytische Kurven C' und C'' in derselben Ebene, welche sich in einem Punkte P schneiden und in diesem Punkte nicht zusammenfallende Tangenten t' und t'' besitzen. Auf t' und t'' wähle man zwei Punkte P' und P'', von P verschieden, aber sonst beliebig. Endlich wähle man K einen beliebigen der Kegelschnitte, welche t' in P' und t'' in P'' berühren. Es existiert ein und nur ein Netz der von uns betrachteten Art, welches die gegebenen Kurven C' und C'' enthält, für welches überdies die bei der 1^{ten} und -1^{ten} Laplaceschen Transformation dem Punkte P entsprechenden Punkte mit P' und P'' zusammenfallen und für welches der dem Punkte P entsprechende Hauptkegelschnitt mit K übereinstimmt.*

Beim Beweis dieses Theorems haben wir vorausgesetzt, daß $\varphi_3(x)$ nicht identisch verschwindet, daß also die gegebenen Kurven des Netzes keine Kegelschnitte sind. Um den Beweis zu vervollständigen, setzen wir jetzt voraus:

$$\varphi_3(x) \equiv 0.$$

Dann muß

$$\theta_3(u) = \theta_8(u) \equiv 0$$

sein, so daß p_1 als Funktion von u der Bedingung

$$-2k - p_1'' + 4p_1p_1' = 0$$

genügen muß, woraus sich ergibt

$$p_1' = 2p_1^2 - 2ku + C. \tag{83}$$

Die Konstante C läßt sich aber, wie oben die Konstante u_0, auf Null reduzieren durch passende Wahl des Anfangspunktes der u-Skala. Folglich erhält man aus (83) für p_1 eine Funktion, welche eine wesentliche Konstante enthält. Im übrigen ist dann die Schlußweise genau dieselbe wie im allgemeinen Fall. Man sieht also, daß das obige Theorem auch in diesem Falle gültig bleibt.

Wir können unser Theorem noch etwas vervollständigen. Die Differentialgleichung, aus welcher sich p_1 bestimmt, ist eine Riccatische, und der Ausdruck

$$\frac{dt}{du} + p_1t$$

bestimmt für jeden Wert von u den dem Punkte (u, v_0) der gegebenen Kurve $v = v_0$ entsprechenden Punkt des -1^{ten} Laplaceschen transformierten Netzes (des r-Netzes in unserer früheren Bezeichnung). Gibt man also der in p_1 auftretenden Integrationskonstante hintereinander vier verschiedene Werte, so werden die der Kurve $v = v_0$ des t-Netzes bei diesen verschiedenen Werten der Konstanten entsprechenden Kurven $v = v_0$ des r-Netzes die Tangenten der ursprünglichen Kurve in konstantem Doppelverhältnis schneiden. Man erhält also noch den folgenden Satz:

Ein Kurvennetz der hier betrachteten Art ist durch eine seiner Kurven $u = \text{const.}$ und eine seiner Kurven $v = \text{const.}$ nur bis auf drei willkürliche Konstanten bestimmt. Die Gesamtheit der Kurven, welche in einem solchen Netze, bei gegebener Kurve $v = v_0$, dieser Kurve als Laplacesche transformierte noch entsprechen können, bilden eine eingliedrige Schar von der besonderen Art, daß je vier Kurven der Schar die Tangenten der gegebenen Kurve $v = v_0$ in konstantem Doppelverhältnis schneiden.

§ 9.

Bestimmung der Fläche bei gegebener stereographischer Projektion ihrer Haupttangentenkurven.

Es ist geometrisch evident, daß einer gegebenen Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven ein eindeutig bestimmtes t-Netz entspricht. Andererseits ist es aber auch klar, daß es unendlich viele solche Flächen gibt, welche bei gegebenem Leitpunkt und gegebener Leitebene einem gegebenen t-Netz entsprechen. Hat man nämlich eine einzige solche Fläche, so erhält man aus ihr ohne weiteres einfach unendlich viele andere, indem man auf sie die allgemeinste projektive Transformation anwendet, welche den Leitpunkt und jeden Punkt der Leitebene invariant läßt. Wir wollen noch zeigen, daß die Flächen der so erhaltenen Schar die einzigen sind, welche dem gegebenen Leitpunkt und dem gegebenen t-Netz entsprechen.

Durch das t-Netz und die Wahl der unabhängigen Veränderlichen u, v werden zunächst die Funktion $\varphi(u, v)$ und die Konstante k eindeutig bestimmt. Hat man nun zwei Flächen S_y und S_Y, welche bei gemeinsamem Leitpunkt dasselbe t-Netz als stereographische Projektion ihrer Haupttangentenkurven besitzen, so müssen offenbar P_Y, P_y und P_t kollinear sein, wenn P_Y der Punkt der Fläche S_Y ist, welcher dem Punkte P_y von S_y entspricht. Man hat also jedenfalls

$$Y = \lambda t + \mu y, \qquad \mu \neq 0. \tag{84}$$

Da die Veränderlichen u, v, die Funktion $\varphi(u, v)$ und die Konstante k, bestimmt durch das t-Netz und die Wahl der unabhängigen Veränderlichen dieses Netzes, den Differentialgleichungen der beiden Flächen ge-

meinsam sind, müssen diese beiden Systeme von Differentialgleichungen (bis auf die Bezeichnung der abhängigen Veränderlichen) entweder miteinander genau übereinstimmen oder wenigstens durch eine Transformation von der Form

$$Y = v(uv)\overline{Y}$$

zur Übereinstimmung gebracht werden können. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so hätten die beiden Flächen nicht dieselben Invarianten und auch kein gemeinsames t-Netz. Wir dürfen also ohne weiteres annehmen, daß Y in (84) so ausgewählt worden ist, daß Y genau denselben Differentialgleichungen genügt wie y.

Nun ist aber für die erste Fläche

$$t = \left(\frac{1}{4}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2} - 2\varphi^2 - \frac{k}{2\varphi}\right)y - \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}y_u - \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}y_v + y_{uv}, \tag{85}$$

und es kommt nur noch darauf an die Frage zu beantworten, wie muß man λ und μ in (84) bestimmen, damit, wenn man

$$T = \left(\frac{1}{4}\frac{\varphi_u\varphi_v}{\varphi^2} - 2\varphi^2 - \frac{k}{2\varphi}\right)Y - \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}Y_u - \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}Y_v + Y_{uv}$$

setzt, die Punkte P_t und P_T für jedes u und v zusammenfallen. Man findet leicht

$$T = \omega t + \left[\frac{k\lambda}{\varphi}\left(\frac{\varphi_v}{\varphi} - \frac{\lambda_v}{\lambda}\right) + \mu_v\right]r + \left[\frac{k\lambda}{\varphi}\left(\frac{\varphi_u}{\varphi} - \frac{\lambda_u}{\lambda}\right) + \mu_u\right]s,$$

wo es auf den Wert von ω nicht ankommt. Damit die Punkte P_t und P_T zusammenfallen, muß also

$$\frac{k\lambda}{\varphi}\left(\frac{\varphi_u}{\varphi} - \frac{\lambda_u}{\lambda}\right) + \mu_u = 0, \quad \frac{k\lambda}{\varphi}\left(\frac{\varphi_v}{\varphi} - \frac{\lambda_v}{\lambda}\right) + \mu_v = 0 \tag{86}$$

sein. Wir haben aber auch vorausgesetzt, daß λ und μ in (84) so gewählt worden sind, daß Y und y genau denselben Differentialgleichungen genügen. Man findet, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn

$$\mu_u = \mu_v = 0,$$

und somit μ eine Konstante ist. Man kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu = 1$ setzen, so daß man aus (86)

$$\lambda = c\varphi$$

erhält, wo c eine Konstante bedeutet. Es wird also schließlich

$$Y = y + c\varphi t.$$

Man erhält also eine einfach unendliche Schar von Flächen, welche alle mit der ursprünglichen projektiv äquivalent sind.

Es gibt also genau ∞^1 Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven, deren Haupttangentenkurven nicht sämtlich linearen Komplexen angehören, welche

einem gegebenen Leitpunkt, einer gegebenen Leitebene und einem gegebenen t-Netz entsprechen. Dieselben sind alle zueinander projektiv. Eine bestimmte Fläche der Schar erhält man durch Angabe eines ihrer Punkte, welcher nicht in der Leitebene liegt und nicht mit dem Leitpunkt zusammenfällt. Die homogenen Koordinaten der Punkte der allgemeinsten derartigen Fläche werden durch die Gleichungen

$$Y^{(k)} = y^{(k)} + c\varphi t^{(k)} \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

bestimmt.

§ 10.

Die endlichen Gleichungen der Fläche im Falle $k = 0$.

Da das t-Netz sich im Falle $k = 0$ auf einen Punkt reduziert und also verschwindende Laplace-Darbouxsche Invarianten besitzt, muß es möglich sein, die Gleichungen des r-Netzes, des s-Netzes und der Fläche S mittels Quadraturen auf eine Form zu bringen, in welcher die unbekannten Funktionen nur noch von den einzelnen Veränderlichen u und v getrennt abhängen. Wir werden jetzt die betreffenden Formeln explizit aufstellen, wobei sich überdies ergeben wird, daß auch diese unbekannten Funktionen sich in einfacher Weise durch Quadraturen berechnen lassen.

Wir erhalten zunächst aus (23), (27) und (30), im Falle $k = 0$,

(87) $$t = \varkappa = \frac{c_1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \varphi = \frac{\sqrt{U'V'}}{2(U+V)},$$

wo U und V willkürliche Funktionen von u allein und von v allein bedeuten. Zufolge (31) hat man

$$r_v - \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi} r = t, \quad s_u - \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi} s = t,$$

so daß sich ergibt

(88) $$r = \sqrt{\varphi}\left[c_1 \int \frac{dv}{\varphi} + U_1\right], \quad s = \sqrt{\varphi}\left[c_1 \int \frac{du}{\varphi} + V_1\right],$$

wo wir mit U_1 und V_1 wiederum willkürliche Funktionen von u und v allein bezeichnen.

Setzt man

(89) $$\int \frac{U\,du}{\sqrt{U'}} = U_2, \quad \int \frac{du}{\sqrt{U'}} = U_3,$$
$$\int \frac{V\,dv}{\sqrt{V'}} = V_2, \quad \int \frac{dv}{\sqrt{V'}} = V_3,$$

so daß U_2 und U_3 von u allein und V_2, V_3 von v allein abhängen, so wird

(90) $$\int \frac{du}{\varphi} = 2(U_2 V_3' + U_3 V_2'), \quad \int \frac{dv}{\varphi} = 2(U_2' V_3 + U_3' V_2),$$

wenn wir $U_2' = \frac{dU_2}{du}$ setzen usw.

Aus (88) und (90) ergibt sich

$$
(91)\qquad
\begin{aligned}
r &= \sqrt{\varphi}\,[U_1 + 2c_1(U_2'V_3 + U_3'V_2)],\\
s &= \sqrt{\varphi}\,[V_1 + 2c_1(U_2V_3' + U_3V_2')].
\end{aligned}
$$

Nun müssen aber r und s auch den beiden noch nicht benutzten Gleichungen des Systems (31),

$$
(92)\qquad r_u + \frac{1}{2}\frac{\varphi_u}{\varphi}r = -2\varphi s,\quad s_v + \frac{1}{2}\frac{\varphi_v}{\varphi}s = -2\varphi r
$$

genügen. Führt man die Werte (91) für r und s und den Ausdruck (87) für φ in die erste Gleichung (92) ein, so ergibt sich, daß

$$
\begin{aligned}
U_1' + 2c_1(U_2''V_3 + U_3''V_2) + \left(\frac{1}{2}\frac{U''}{U'} - \frac{U'}{U+V}\right)[U_1 + 2c_1(U_2'V_3 + U_3'V_2)]&\\
+ \frac{\sqrt{U'V'}}{U+V}[V_1 + 2c_1(U_2V_3' + U_3V_2')] = 0&
\end{aligned}
$$

sein muß. Diese Gleichung läßt sich leicht auf die Form

$$
(93)\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{U'}}\Big[\Big(U_1' + \frac{1}{2}\frac{U''}{U'}U_1\Big)U - U'U_1 + 2c_1\sqrt{U'}U_2\Big]&\\
+ V_1\sqrt{V'} + 2c_1VV_3 - 2c_1V_2&\\
+ \frac{1}{\sqrt{U'}}\Big[U_1' + \frac{1}{2}\frac{U''}{U'}U_1 + 2c_1\sqrt{U'}U_3\Big]V = 0&
\end{aligned}
$$

reduzieren, d. h. auf die Form

$$
\lambda(u) + \mu(v) + \varrho(u)\sigma(v) = 0,
$$

wo die Funktionen λ, μ, ϱ, σ nur von den angedeuteten Argumenten abhängen. Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Differentiation

$$
\lambda'(u) + \varrho'(u)\sigma(v) = 0,\quad \mu'(v) + \varrho(u)\sigma'(v) = 0,
$$

so daß mindestens eine der Funktionen $\varrho(u)$ oder $\sigma(v)$ konstant sein muß. Im vorliegenden Falle ist $\sigma(v) = V$, und die Möglichkeit $V' = 0$ ist ausgeschlossen, da sonst die Fläche S eine Linienfläche sein würde. Folglich ergibt sich aus (93)

$$
(94)\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{U'}}\Big[U_1' + \frac{1}{2}\frac{U''}{U'}U_1 + 2c_1U_3\sqrt{U'}\Big] &= c_2,\\
c_2U - U_1\sqrt{U'} + 2c_1(U_2 - UU_3) + V_1\sqrt{V'} - 2c_1(V_2 - VV_3) + c_2V &= 0,
\end{aligned}
$$

wo c_2 eine willkürliche Konstante bedeutet. Aus der letzten Gleichung folgt weiter

$$
(95)\qquad
\begin{aligned}
c_2U - U_1\sqrt{U'} + 2c_1(U_2 - UU_3) &= -c_3,\\
c_2V + V_1\sqrt{V'} - 2c_1(V_2 - VV_3) &= +c_3,
\end{aligned}
$$

wo auch c_3 eine willkürliche Konstante bedeuten soll. Die erste Glei-

chung (94) ist dann als Konsequenz von (95) von selbst erfüllt. Aus (95) findet man nun

$$
(96)\qquad
\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{\sqrt{U'}}[2c_1(U_2 - UU_3) + c_2 U + c_3],\\
V_1 &= \frac{1}{\sqrt{V'}}[2c_1(V_2 - VV_3) - c_2 V + c_3].
\end{aligned}
$$

Führt man diese Ausdrücke in (88) ein, so findet man leicht, daß die sich ergebenden Werte von r und s, nämlich

$$
(97)\qquad
\begin{aligned}
r &= \sqrt[4]{\frac{V'}{U'}}\,\frac{1}{\sqrt{2(U+V)}}[2c_1\{U_2 + V_2 - (U_3 - V_3)U\} + c_2 U + c_3],\\
s &= \sqrt[4]{\frac{U'}{V'}}\,\frac{1}{\sqrt{2(U+V)}}[2c_1\{U_2 + V_2 + (U_3 - V_3)V\} - c_2 V + c_3],
\end{aligned}
$$

den Gleichungen (92) genügen.

Die Gleichungen (28), welche mit

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y}{\sqrt{\varphi}}\right) = \frac{r}{\sqrt{\varphi}},\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{y}{\sqrt{\varphi}}\right) = \frac{s}{\sqrt{\varphi}}
$$

gleichbedeutend sind, ergeben dann schließlich

$$
\frac{y}{\sqrt{\varphi}} = \int U_1\,du + \int V_1\,dv + 2c_1(U_2V_3 + U_3V_2) + c_4,
$$

wo c_4 die vierte, im allgemeinen Ausdruck von y auftretende Integrationskonstante bedeutet.

Wir erhalten endlich das folgende Resultat: *Die Gleichungen*

$$
(98)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{y^{(1)}}{2\sqrt{\varphi}} = U_2V_3 + U_3V_2 + \int \frac{U_2 - UU_3}{\sqrt{U'}}\,du + \int \frac{V_2 - VV_3}{\sqrt{V'}}\,dv,\\
&\frac{y^{(2)}}{\sqrt{\varphi}} = U_2 - V_2,\quad \frac{y^{(3)}}{\sqrt{\varphi}} = U_3 + V_3,\quad \frac{y^{(4)}}{\sqrt{\varphi}} = 1,
\end{aligned}
$$

wo $U(u)$ und $V(v)$ willkürliche Funktionen von u und v allein bedeuten und wo

$$
(99)\qquad
\begin{aligned}
&\varphi = \frac{\sqrt{U'V'}}{2(U+V)},\qquad U' \not\equiv 0,\ V' \not\equiv 0,\\
&U_2 = \int \frac{U\,du}{\sqrt{U'}},\quad U_3 = \int \frac{du}{\sqrt{U'}},\\
&V_2 = \int \frac{V\,dv}{\sqrt{V'}},\quad V_3 = \int \frac{dv}{\sqrt{V'}},
\end{aligned}
$$

bestimmen $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}$ als die homogenen Punktkoordinaten der allgemeinsten nicht geradlinigen Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven, deren Haupttangentenkurven sämtlich linearen Komplexen angehören, bezogen auf

ihre Haupttangentenkurven. Eine jede solche Fläche ist also einer der in Cartesischen Koordinaten definierten Flächen

$$x = 2\left[U_2V_3 + U_3V_2 + \int \frac{U_2 - UU_3}{\sqrt{U'}}\,du + \int \frac{V_2 - VV_3}{\sqrt{V'}}\,dv\right], \tag{100}$$
$$y = U_2 - V_2, \quad z = U_3 + V_3,$$

*projektiv äquivalent.**)

Die Gleichungen (98) bestimmen demnach ein Fundamentalsystem von Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (21) im Falle $k = 0$. Die Gleichungen (97) erlauben entsprechend die allgemeine Integration der Differentialgleichungen des r-Netzes und des s-Netzes auszuführen.

Es ist auffallend, daß in diesem Problem die Formeln (100) für die Cartesischen Koordinaten einfacher sind als die entsprechenden homogenen Formeln (98). Merkwürdigerweise trifft dasselbe auch im Falle $k \neq 0$ zu. Die Gleichungen (21) haben nämlich nicht nur im Falle $k = 0$, sondern im allgemeinen die spezielle Lösung $y = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$. Das Schlußtheorem des dritten Abschnittes läßt also die folgende vereinfachte Formulierung zu:

Jede nicht geradlinige Fläche mit unbestimmten Direktrixkurven ist projektiv zu einer Fläche, deren Cartesische Punktkoordinaten den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\varphi_u}{\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial u} + 2\varphi\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + 2\varphi\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\varphi_v}{\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0 \tag{101}$$

genügen, wo φ eine nicht verschwindende Konstante oder eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \log\varphi}{\partial u\,\partial v} = 4\varphi^2 + \frac{k}{\varphi}, \qquad k = 0 \text{ oder } k = 4,$$

bedeutet.

Mit diesem Theorem, welches sich ganz besonders bequem zur Erforschung auch der metrischen Eigenschaften unserer Flächenklasse anwenden läßt, und mit den Folgerungen, welche man aus den Gleichungen (100) im Falle $k = 0$ noch ziehen kann, gedenke ich mich in einer zukünftigen Mitteilung noch weiter zu beschäftigen. Die vorliegende Arbeit sollte nur dazu dienen, die wesentlichsten Eigenschaften dieser interessanten Flächen festzustellen.

The University of Chicago, den 16. August 1913.

---

*) Diese Gleichungen kann man weit einfacher folgendermaßen schreiben:

$$x = 4(U + V) - 2(U' - V')(u - v), \quad y = U' - V', \quad z = u + v.$$

Dabei bedeuten U und V Funktionen von u und v allein, deren dritte Ableitungen nicht verschwinden. (Hinzugefügt bei der Korrektur, Mai 1914.)

Körper und Systeme rationaler Funktionen.

Von

Emmy Noether in Erlangen.

Die vorliegende Arbeit behandelt *Basisfragen bei beliebigen Systemen rationaler und ganzer rationaler Funktionen*; und zwar lassen die angewandten Methoden der Körpertheorie die Erledigung dieser Fragen bei *Körpern* aus rationalen Funktionen — rationalen Funktionenkörpern*) — als das Wesentliche erscheinen, während die Verallgemeinerung der Resultate auf beliebige Systeme sich als Folgerung ergibt.

Von Basisfragen bei allgemeinen Systemen ist bis jetzt nur die durch das Hilbertsche Theorem (Math. Ann. 36) gewährleistete Existenz der *Modulbasis* bekannt. Im folgenden wird die *Frage der rationalen Darstellbarkeit mit der Existenz der Rationalbasis für jedes beliebige System vollständig beantwortet* (§ 7); die Rationalbasis der *Körper* ergibt sich schon in § 4. Diese Existenz der Rationalbasis erlaubt es, durchweg von dem abstrakt definierten Körper oder System auszugehen und dadurch solche Schwierigkeiten zu vermeiden, die nur durch die spezielle Wahl der Rationalbasis und nicht durch das System an sich bedingt sind, wie etwa Auftreten von speziellen Nennern oder von Fundamentalpunkten der Basisfunktionen.

Für Körper wird noch die Frage der *Minimalbasis*, d. h. einer Rationalbasis aus algebraisch unabhängigen Funktionen, behandelt (§ 6). Die Methoden der Körpertheorie führen ferner zu einer ausgezeichneten Rationalbasis, der *Involutionsbasis***) (§ 5), die insbesondere bei Integritätsbereichen aus Polynomen wesentlich wird (§ 8). Sie gibt hier eine Darstellung mit festem Nenner (Potenz einer durch den Integritätsbereich bestimmten

---

*) Vgl. eine vorläufige Mitteilung gelegentlich der Wiener Naturforscherversammlung: Rationale Funktionenkörper — Jahresber. d. D. Math.-Ver. 22 (1913) —, wo ein Überblick über die Fragestellungen und die die Funktionenkörper betreffenden Resultate gegeben ist.

**) Der Name wurde gewählt, weil der rationale Funktionenkörper in geometrischer Deutung die allgemeinste Involution in einem linearen Raum darstellt.

Funktion), wie sie etwa im Spezialfall der typischen Darstelluug der Invarianten bekannt ist.

Aus der rationalen Darstellbarkeit werden nun möglichst weitgehende Folgerungen für *ganze rationale Darstellbarkeit*, d. h. für die Frage der Endlichkeit im engeren Sinn, gezogen.

Die bis jetzt bekannten Endlichkeitssätze beruhen alle auf der Tatsache, daß das Hilbertsche Theorem von der Modulbasis die Endlichkeit für alle solchen Systeme garantiert, bei denen eine Darstellung

$$F = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_k f_k$$

eine zweite Darstellung

$$F = B_1 f_1 + B_2 f_2 + \cdots + B_k f_k$$

nach sich zieht, wo die B_i dem System angehören und von niedrigerem Grad als F sind.

Der Satz von der Rationalbasis und die Methoden der Körpertheorie erlauben es dagegen, bei Voraussetzungen ganz anderer Art auf die Endlichkeit zu schließen.

So ergibt sich in teilweiser Beantwortung eines Hilbertschen Problems (Math. Probleme 14) eine Klasse von relativ-ganzen Funktionen (relativganze Bereiche erster Art), die endliche Integritätsbereiche sind und deren Integritätsbasis durch die vorerwähnte Involutionsbasis gegeben ist (§ 10). In Analogie mit dem Hilbertschen Beweis des Kroneckerschen Satzes vom Fundamentalsystem der algebraisch-ganzen Größen (Volle Invariantensysteme, § 2; Math. Ann. 42) läßt sich ferner zeigen, daß alle *regulären Systeme aus Polynomen* — d. h. alle Systeme, die sich auf fundamentalpunktlose abbilden lassen — eine Integritätsbasis besitzen (§ 12), während sich leicht nichtreguläre Systeme ohne Integritätsbasis angeben lassen. Als einfaches Beispiel zu dieser Tatsache sei der Satz erwähnt: „In jedem beliebigen System von unendlich vielen Polynomen *einer* Unbestimmten existiert eine endliche Anzahl dieser Polynome derart, daß jedes Polynom des Systems sich als ganze rationale Verbindung dieser endlichen Anzahl darstellen läßt.“ Weitere Beispiele finden sich in § 13.

Die letzten Paragraphen (§§ 14 und 15) bringen endlich eine Verschärfung der Basissätze in bezug auf Ganzzahligkeit.

Ein wesentliches Hilfsmittel der Untersuchung bietet das *Übertragungsprinzip* des § 3, wonach es genügt, alle hier aufgeworfenen Basisfragen bei solchen Systemen zu betrachten, bei denen die Zahl der Unbestimmten mit der Zahl der algebraisch unabhängigen Funktionen des Systems übereinstimmt.

Den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gaben Gespräche mit Herrn E. Fischer, insbesondere eine Frage des letzteren nach der Minimalbasis der Lagrangeschen Gattungsbereiche. Die diesbezüglichen Untersuchungen,

die auf die *Konstruktion von Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe* führten (vgl. die zitierte Mitteilung über „Rationale Funktionenkörper“, Teil 2), sind einer weiteren Veröffentlichung vorbehalten.

Die wesentliche Erweiterung der jetzigen Arbeit gegenüber der ursprünglichen Mitteilung liegt darin, daß die dort nur für Körper oder spezielle Integritätsbereiche ausgesprochenen Basissätze auf beliebige Systeme übertragen sind. Diese Übertragung gelingt auf einfache Art vermöge des Begriffs des *kleinsten enthaltenden Körpers eines beliebigen Systems* als Verallgemeinerung des Quotientenkörpers eines Integritätsbereichs (§ 7). Ich wurde zur Bildung dieses Begriffs dadurch veranlaßt, daß Herr K. Hentzelt nach Kenntnis der Rationalbasis der Körper auf dem Umweg über die Hilbertsche Modulbasis die Existenz der Rationalbasis für beliebige Systeme beweisen konnte. Auch zu dem Satz über die Integritätsbasis der regulären Systeme führte mich die Bemerkung von K. Hentzelt, daß die von mir auf Integritätsbereiche angewandten Schlüsse für beliebige Systeme, die denselben Voraussetzungen unterliegen, gültig seien; und ebenso verdanke ich noch vereinzelte kleinere Bemerkungen Herrn Hentzelt.

Schließlich sei erwähnt, daß im Fall *einer* Unbestimmten Rationalbasis und Minimalbasis der Körper bei E. Steinitz in seiner „Algebraischen Theorie der Körper“, § 24 (Crelles Journ. 137) sich finden; und zwar ist dort der Koeffizientenbereich als Körper im allgemeinsten Sinn angenommen. Die Frage, wie weit bei diesen allgemeineren Voraussetzungen die hier gegebenen Sätze erhalten bleiben, ist im folgenden nicht berührt; die Beweise verlangen jedenfalls eine Modifikation, da z. B schon die Hilfsmittel aus der Theorie der Funktionaldeterminanten bei Körpern von der Charakteristik p versagen.

§ 1.

Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ und Systeme $\mathfrak{S}_{n\varrho}$.

Es handelt sich im folgenden um die Untersuchung von *Systemen* rationaler Funktionen von n Unbestimmten, speziell um Körper rationaler Funktionen.

Unter $f(x_1 \cdots x_n)$, $g(x_1 \cdots x_n)$, $\cdots$ oder abkürzend $f(x)$, $g(x)$, $\cdots$ sind daher stets *rationale* Funktionen von $x_1 \cdots x_n$ zu verstehen; diese sind in *reduzierter Darstellung* — d. h. Zähler und Nenner teilerfremd — vorausgesetzt. *Ganze* rationale Funktionen (Polynome) sollen mit großen Buchstaben, $F(x)$, $G(x)$, $\cdots$ bezeichnet werden. Der *Koeffizientenbereich* Ω ist als irgendein Zahlkörper vorausgesetzt, kann also insbesondere auch alle komplexen Zahlen umfassen; Ω kann auch noch eine endliche Anzahl von Parametern enthalten.

Die Größen aus Ω, also alle Funktionen nullten Grades, sind stets mit zum System gehörig gerechnet.

Nach diesen Festsetzungen läßt sich der *Körper aus rationalen Funktionen* — der rationale Funktionenkörper — abstrakt definieren.

Definition I: *Ein System rationaler Funktionen heißt Körper, wenn es die Bedingungen erfüllt:*

1. *Es enthält neben $f(x)$ und für jede Größe c aus Ω auch $c \cdot f(x)$.*
2. *Es enthält neben $f(x)$ und $g(x)$ stets auch $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ und — für $g(x) \neq 0$ — den Quotienten $f(x) : g(x)$.**)

Spezielle Körper sind diejenigen, die durch Adjunktion einer *endlichen* Anzahl rationaler Funktionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_k(x)$$

zu Ω entstehen; sie sollen mit

$$\Omega(f_1(x) \cdots f_k(x)) \quad \text{oder} \quad \Omega(f_1 \cdots f_k)$$

bezeichnet werden.**) Unter diesen speziellen Körpern sei noch der durch Adjunktion von $x_1 \cdots x_n$ zu Ω entstehende Körper

$$\Omega(x_1 \cdots x_n)$$

erwähnt, der identisch ist mit der *Gesamtheit* der rationalen Funktionen von $x_1 \cdots x_n$, mit Koeffizienten aus Ω.

Wir führen noch (nach E. Steinitz) den Begriff des *Zwischenkörpers* ein:

„Ein Körper $\mathfrak{M}$ liegt *zwischen* $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$, wenn er $\mathfrak{L}_1$ enthält und in $\mathfrak{L}_2$ enthalten ist";

dann läßt die Definition I auch die Fassung zu:

Der Körper rationaler Funktionen von n Unbestimmten ist ein Zwischenkörper von Ω und $\Omega(x_1 \cdots x_n)$, der in *mindestens einer* Funktion die n Unbestimmten wirklich enthält.

Neben der Zahl der Unbestimmten ergibt sich für Systeme rationaler Funktionen eine weitere charakteristische Zahl, die Zahl der algebraisch unabhängigen Funktionen oder der *algebraische Rang* durch die

Definition II: *Ein System rationaler Funktionen hat den algebraischen Rang ϱ, wenn sich ϱ Funktionen des Systems angeben lassen, die algebraisch unabhängig sind; wenn aber je $(\varrho + 1)$ Funktionen des Systems algebraisch abhängig sind.****)

---

*) Dabei können $f(x)$ und $g(x)$ auch nullten Grades, d. Größen aus Ω sein.

**) Daß mit diesen „speziellen Körpern" schon die Gesamtheit aller erschöpft ist, ergibt sich in § 4.

***) ϱ Funktionen $f_1(x) \cdots f_\varrho(x)$ heißen algebraisch unabhängig, wenn aus *jeder* Relation

$$F(f_1(x) \cdots f_\varrho(x)) = 0 \text{ identisch in } x_1 \cdots x_n$$

folgt:

$$F(\lambda_1 \cdots \lambda_\varrho) = 0 \text{ identisch in } \lambda_1 \cdots \lambda_\varrho.$$

Im entgegengesetzten Fall heißen sie algebraisch abhängig.

Systeme von (endlich oder unendlich vielen) rationalen Funktionen von n Unbestimmten und vom algebraischen Rang ϱ sollen durch Doppelindex

$$\mathfrak{S}_{n\varrho}$$

bezeichnet werden. Speziell ist unter

$$\mathfrak{K}_{n\varrho}$$

ein Körper von n Unbestimmten und vom algebraischen Rang ϱ zu verstehen. Es gilt die Ungleichung:

$$1 \leqq \varrho \leqq n.$$

Wir geben noch einige Beispiele von Körpern $\mathfrak{K}_{nn}$ und $\mathfrak{K}_{n\varrho}$:

1. Körper $\mathfrak{K}_{nn}$ sind die *Lagrangeschen Gattungsbereiche*, die sich definieren lassen als

„die Gesamtheit der rationalen (und ganzen rationalen) Funktionen von $x_1 \cdots x_n$, die die Permutationen einer Permutationsgruppe G von $x_1 \cdots x_n$ gestatten."

Sie enthalten stets den Körper der symmetrischen Funktionen, also auch die n algebraisch unabhängigen symmetrischen Elementarfunktionen.

2. Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ sind die projektiven *Invariantenkörper*, die gebildet sind aus der Gesamtheit der rationalen (und ganzen rationalen) Invarianten einer oder mehrerer Grundformen.*) Es ist $\varrho < n$, da die Anzahl der algebraisch unabhängigen Invarianten stets kleiner ist als die Anzahl der Koeffizienten.

Entsprechendes gilt für die Invariantenkörper gegenüber Untergruppen der projektiven Gruppe.

§ 2.

Hilfssatz über algebraisch abhängige Funktionen.

Durch den Hilfssatz dieses Paragraphen wird sich in § 3 *der algebraische Rang* eines Systems als die eigentlich charakteristische Zahl ergeben. Der Hilfssatz zeigt nämlich, daß durch *solche sukzessive* zahlenmäßige Spezialisierung einiger Unbestimmten, durch welche ϱ algebraisch unabhängige Funktionen algebraisch unabhängig bleiben, eine beliebige von diesen ϱ Funktionen algebraisch abhängige Funktion weder identisch verschwinden noch unbestimmt werden kann.

---

*) Es ist zweckmäßig, nur Transformationen von der Determinante 1 zu betrachten; dann gestattet jede rationale Verbindung von beliebig vielen Invarianten wieder die Transformation, und man erhält in der Tat einen Körper. Die homogenen, isobaren Invarianten für sich allein genommen bilden keinen Körper, wohl aber ein System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$.

Sei also das System

(1) $$g_1(x),\ g_2(x),\ \cdots,\ g_\varrho(x)$$

vom *algebraischen Rang* ϱ — wo $\varrho < n$ — und $h(x)$ eine von den Funktionen (1) algebraisch abhängige rationale Funktion. Nach bekannten Sätzen ist der Rang der Funktionalmatrix von (1) gleich ϱ. Die Unbestimmten seien daher etwa so bezeichnet, daß

(2) $$\frac{\partial(g_1\, g_2 \cdots g_\varrho)}{\partial(x_1\, x_2 \cdots x_\varrho)} = \frac{\Gamma(x)}{G(x)^{\varrho+1}} \neq 0,$$

wobei $G(x)$ bekanntlich den gemeinsamen Nenner der Funktionen (1) bedeutet.

Die Zahl a *sei nun so gewählt, daß das Produkt* $G(x)\cdot\Gamma(x)$ *nicht durch* $(x_i - a)$ *teilbar,* unter i eine der Zahlen $\varrho+1, \varrho+2, \cdots, n$ verstanden. Es kann also für $x_i = a$ der gemeinsame Nenner der Funktionen (1) nicht verschwinden, und die ϱ Funktionen

(3) $$[g_1(x)]_{x_i=a},\ \cdots,\ [g_\varrho(x)]_{x_i=a}$$

sind ebenfalls algebraisch unabhängig. Der algebraische Rang des Systems (1) bleibt, wie wir sagen wollen, durch die Substitution $x_i = a$ erhalten.

Die irreduzible Gleichung, der $h(x)$ in bezug auf die Funktionen (1) genügt, sei gegeben durch

(4) $$A_0(g_1 \cdots g_\varrho)\cdot h(x)^r + A_1(g_1 \cdots g_\varrho)\cdot h(x)^{r-1} + \cdots + A_r(g_1 \cdots g_\varrho) = 0,$$

wobei $A_0(g_1 \cdots g_\varrho)$ und $A_r(g_1 \cdots g_\varrho)$ nicht identisch verschwinden. Um daraus zu einer Identität zwischen Polynomen zu gelangen, setzen wir:

(5) $$g_i(x) = G_i(x) : G(x);\quad h(x) = H_1(x) : H_2(x),$$

und bemerken, daß — wegen der vorausgesetzten reduzierten Darstellung von $h(x)$ — $H_1(x)$ und $H_2(x)$ teilerfremd sind. Vermöge (5) geht (4) über in:

(6) $$B_0(G\, G_1 \cdots G_\varrho)\cdot G(x)^{\sigma_0}\cdot H_1(x)^r + B_1(G\, G_1 \cdots G_\varrho)\cdot G(x)^{\sigma_1}\cdot H_1(x)^{r-1} H_2(x) + \cdots + B_r(G\, G_1 \cdots G_\varrho)\cdot G(x)^{\sigma_r}\cdot H_2(x)^r = 0,$$

wo die B_k homogene Formen von G, G_i sind und mindestens einer der nichtnegativen Exponenten σ_k gleich Null sein muß.

Angenommen nun, $H_1(x)$ wäre durch $(x_i - a)$ teilbar, so wäre nach (6) auch

$$B_r(G\, G_1 \cdots G_\varrho)\cdot G(x)^{\sigma_r}\cdot H_2(x)^r$$

durch $(x_i - a)$ teilbar. Das ist nach Voraussetzung für $G(x)$ ausgeschlossen; aus der Teilbarkeit von B_r würde also auch die Teilbarkeit von

$$A_r = B_r : G^\lambda$$

folgen und es bestände zwischen den Funktionen (3) die Beziehung $A_r = 0$, entgegen der vorausgesetzten algebraischen Unabhängigkeit. Schließlich

kann auch $H_2(x)$, als teilerfremd zu $H_1(x)$, nicht durch $(x_i - a)$ teilbar sein*); und die Annahme, daß $H_1(x)$ durch $(x_i - a)$ teilbar, führt also zu einem Widerspruch. Ebenso zeigt man, daß auch $H_2(x)$ nicht durch $(x_i - a)$ teilbar sein kann. Die Funktion $[h(x)]_{x_i = a} = k(x)$ kann also weder identisch verschwinden, noch unbestimmt werden.

Auf das System (3) und die Funktion $k(x)$, die wieder in reduzierter Darstellung vorausgesetzt wird, läßt sich der obige Schluß wieder anwenden, und die Fortsetzung des Verfahrens führt schließlich zu dem

Hilfssatz: *Die beiden Systeme*

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \cdots,\ g_\varrho(x),$$
$$g_1(x),\ g_2(x),\ \cdots,\ g_\varrho(x),\ h(x)$$

seien je vom algebraischen Rang ϱ — *wo* $\varrho < n$ — *und es sei etwa*

$$\frac{\partial(g_1 \cdots g_\varrho)}{\partial(x_1 \cdots x_\varrho)} = \frac{\Gamma(x)}{G(x)^{\varrho+1}} \neq 0.$$

Die Zahlen

$$a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_{\varrho+1}$$

seien so gewählt, daß durch die Substitution

$$x_n = a_n,\ x_{n-1} = a_{n-1},\ \cdots,\ x_{\varrho+1} = a_{\varrho+1}$$

das Produkt $G(x) \cdot \Gamma(x)$ *nicht verschwindet — d. h. daß der algebraische Rang des Systems* (1) *erhalten bleibt. In den sukzessiven Substitutionen*

$$[h(x)]_{x_n = a_n} = h^{(n-1)}(x);\ [h^{(n-1)}(x)]_{x_{n-1} = a_{n-1}} = h^{(n-2)}(x);\ \cdots;$$
$$[h^{(\varrho+1)}(x)]_{x_{\varrho+1} = a_{\varrho+1}} = h^*(x_1, x_2, \cdots, x_\varrho)$$

seien die Funktionen $h(x),\ h^{(n-1)}(x),\ \cdots,\ h^{(\varrho+1)}(x)$ *je in reduzierte Darstellung gebracht.* ***Unter diesen Voraussetzungen kann in der Funktion*** $h^*(x_1 \cdots x_\varrho)$ ***weder Zähler noch Nenner identisch verschwinden, und die Funktion kann auch nicht*** $\frac{0}{0}$ ***werden.****)

---

*) Dieser letzte, auf der reduzierten Darstellung beruhende Schluß wäre nicht mehr möglich bei einer Substitution: $x_i = a$, $x_k = b$ unter Wahrung der übrigen Voraussetzungen. Es könnten dann $H_1(x)$ und $H_2(x)$ *gleichzeitig* verschwinden, der Quotient würde durch die Substitution unbestimmt $= \frac{0}{0}$; wie z. B.

$$h(x) = \frac{x_3(\alpha x_1 + \beta x_2) + x_4(\gamma x_1 + \delta x_2)}{x_3(\alpha' x_1 + \beta' x_2) + x_4(\gamma' x_1 + \delta' x_2)}$$

bei der Substitution $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

**) Die *sukzessive* Substitution gibt z. B. in der Funktion $h(x)$ der vorigen Anmerkung:

$$[h(x)]_{x_4 = 0} = h^{(3)}(x) = \frac{(\alpha x_1 + \beta x_2)}{(\alpha' x_1 + \beta' x_2)} \cdot h^*(x_1 x_2) = \frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha' x_1 + \beta' x_2}.$$

§ 3.

Ein-eindeutige Abbildung von Systemen $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ auf Systeme $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$.

Aus dem Hilfssatz werden wir unmittelbar eine Abbildung der Systeme $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ auf Systeme $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ erhalten dadurch, daß einige der Unbestimmten durch Zahlen ersetzt werden; der algebraische Rang ϱ ergibt sich so als eigentlich charakteristische Zahl.

Da $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ vom algebraischen Rang ϱ, existieren ϱ Funktionen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$

(1) $$g_1(x)\cdots g_\varrho(x),$$

die algebraisch-unabhängig sind. Bedeutet ferner $f(x)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, so hat das System

(2) $$g_1(x)\cdots g_\varrho(x),\ f(x)$$

ebenfalls den algebraischen Rang ϱ; und die Systeme (1) und (2) erfüllen die Bedingungen des Hilfssatzes.*)

Bestimmt man daher die Zahlen

$$a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_{\varrho+1}$$

nach dem Hilfssatz derart, daß der algebraische Rang ϱ des Systems (1) durch die Substitution erhalten bleibt — was auf beliebig viele Arten möglich — so kann in der durch

$$[f(x)]_{(x_n=a_n)}=f^{(n-1)}(x);\quad [f^{(n-1)}(x)]_{(x_{n-1}=a_{n-1})}=f^{(n-2)}(x);$$
$$[f^{(\varrho+1)}(x)]_{(x_{\varrho+1}=a_{\varrho+1})}=f^*(x_1\cdots x_\varrho)$$

definierten Funktion

(3) $$f^*(x_1\cdots x_\varrho)$$

weder Zähler noch Nenner identisch verschwinden.

Es durchlaufe nun $f(x)$ *alle* (endlich oder unendlich vielen) *Funktionen aus* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$. Wir betrachten das aus der *Gesamtheit aller Funktionen* (3) bestehende System, das folgende Eigenschaften hat:

1. Es hat den *algebraischen Rang* ϱ; denn es enthält die aus (1) entstehenden Funktionen

$$g_1{}^*(x_1\cdots x_\varrho)\cdots g_\varrho{}^*(x_1\cdots x_\varrho),$$

die wegen der Wahl von $a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_{\varrho+1}$ algebraisch-unabhängig sind. Das System soll deshalb mit

$$\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$$

bezeichnet werden.**)

---

*) Wenn nötig, sind die Unbestimmten umzunumerieren.

**) Unter $f^*(x)$, $g^*(x)$, $\cdots$ sollen entsprechend durchweg Abbildungsfunktionen, also Funktionen von $x_1\cdots x_\varrho$ zu verstehen sein.

2. Die Zuordnung der Funktionen $f(x)$ und $f^*(x)$ ist *ausnahmslos ein-eindeutig.*

Denn gehören $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, so ist auch die Differenz

$$d(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

algebraisch-abhängig von dem System (1); es gilt ferner:

$$d^*(x) = f_1^*(x) - f_2^*(x).$$

Da $d(x)$ zusammen mit System (1) die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt, so folgt aus

$$d(x) \neq 0$$

notwendig:

$$d^*(x) \neq 0;$$

d. h. *verschiedenen* Funktionen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ entsprechen *verschiedene* Funktionen aus $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$.

3. *Aus jeder Relation zwischen Funktionen aus* $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$:

$$F(f_1^*(x), f_2^*(x), \cdots, f_k^*(x)) = 0 \text{ identisch in } x_1 \cdots x_\varrho$$

folgt für die eindeutig entsprechenden Funktionen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$:

$$F(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)) = 0 \text{ identisch in } x_1 \cdots x_n.$$

Denn mit $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)$ ist auch jede rationale Verbindung dieser Funktionen algebraisch-abhängig von dem System (1).

Es folgt ferner aus

$$(4) \qquad \begin{aligned} h(x) &= F(f_1(x) \cdots f_k(x)): \\ h^*(x) &= F(f_1^*(x) \cdots f_k^*(x)). \end{aligned}$$

Nach dem Hilfssatz folgt also aus:

$$h(x) \neq 0 \text{ auch } h^*(x) \neq 0; \text{ q. e. d.}$$

Zusammenfassend erhalten wir den

Satz I: *Jedem System* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ *von (endlich oder unendlich vielen) rationalen Funktionen läßt sich — auf beliebig viele Arten — ein-eindeutig ein System* $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ *zuordnen derart, daß alle zwischen Funktionen aus* $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ *bestehenden Relationen auch in* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ *erhalten bleiben und umgekehrt. Einem Körper* $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ *entspricht dabei nach* (4) *speziell wieder ein Körper* $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$.

Aus Satz I ziehen wir noch die alle weiteren Beweise vereinfachende

Folgerung: *Eigenschaften von Systemen* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, *die charakterisiert sind durch endlich oder unendlich viele Relationen zwischen Funktionen des Systems, gelten für die Systeme* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, *sobald sie für ein Abbildungssystem* $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ *gelten.*

Wir bezeichnen diese Folgerung kurz als *„Übertragungsprinzip"*.

Das einfachste *Beispiel* dieser Abbildung bildet die Theorie der algebraischen Invarianten. In der Tat kann man stets durch lineare Transformation einige Koeffizienten der Grundform derart zahlenmäßig festlegen, daß *alle* für die spezielle Form geltenden Relationen auch allgemein erhalten bleiben.

§ 4.

Rationalbasis der Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$.

In den folgenden, um Basisbegriffe sich gruppierenden Untersuchungen machen wir durchweg von dem „Übertragungsprinzip" des § 3 Gebrauch. Wir beweisen die Existenz der Basis vorerst für Körper, geben aber die Definitionen allgemein:

Definition III: *Eine endliche Anzahl von Funktionen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ heißt Rationalbasis, wenn jede Funktion aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ sich als rationale Verbindung dieser endlichen Anzahl darstellen läßt, mit Koeffizienten aus Ω.*

Die Rationalbasis muß ϱ algebraisch-unabhängige Funktionen enthalten, da der algebraische Rang eines aus einer Rationalbasis abgeleiteten Systems gleich ist dem algebraischen Rang der Rationalbasis.

Wir zeigen zuerst, daß der Existenzbeweis der Rationalbasis das *Übertragungsprinzip* zuläßt. Die Definition III läßt nämlich die Fassung zu:

Die Funktionen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \cdots,\ g_k(x)$$

bilden dann und nur dann eine Rationalbasis, wenn die unendlich vielen Relationen erfüllt sind:

$$f(x) = \gamma(g_1(x) \cdots g_k(x)), \tag{1}$$

wo $f(x)$ alle Funktionen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ durchläuft und γ eine — mit f sich ändernde — rationale Funktion von k Argumenten bedeutet.

Ist daher in dem Abbildungssystem $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ eine Rationalbasis gegeben durch

$$g_1^*(x),\ g_2^*(x),\ \cdots,\ g_k^*(x),$$

was die Relationen

$$f^*(x) = \gamma(g_1^*(x) \cdots g_k^*(x))$$

zur Folge hat, so sind nach Satz I für $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ die Relationen (1) erfüllt; d. h. das *Übertragungsprinzip für die Rationalbasis* lautet:

Aus der Existenz der Rationalbasis für ein Abbildungssystem $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ folgt die Rationalbasis für das ursprüngliche System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$.*)

Um die Existenz der Rationalbasis aller *Körper* $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ zu beweisen, können wir uns also auf Körper $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ beschränken; hier führt eine direkte

*) Entsprechend formuliert sich das Übertragungsprinzip für jede hier behandelte Basisfrage.

Verallgemeinerung einer von E. Steinitz angewandten Schlußweise zum Ziel.*)

Es sei

$$(2) \qquad g_1^*(x_1 \cdots x_\varrho), \cdots, g_\varrho^*(x_1 \cdots x_\varrho)$$

ein System von ϱ algebraisch unabhängigen Funktionen aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$. Durch Elimination von $x_1 \cdots x_\varrho$ ergeben sich ϱ Relationen:

$$(3) \qquad F_1(g_1^*(x) \cdots g_\varrho^*(x), x_1) = 0, \cdots, F_\varrho(g_1^*(x) \cdots g_\varrho^*(x), x_\varrho) = 0,$$

wobei in jeder Relation $F_i = 0$ die Unbestimmte x_i wirklich auftritt, da sonst entgegen der Annahme eine algebraische Abhängigkeit zwischen den Funktionen (2) statt hätte. Die Relationen (3) sagen aus, daß

$$x_1, x_2, \cdots, x_\varrho$$

algebraische Elemente in bezug auf

$$\Omega(g_1^*(x) \cdots g_\varrho^*(x))$$

sind; der durch die Adjunktion von $x_1 \cdots x_\varrho$ entstehende Körper:

$$\Omega(g_1^* \cdots g_\varrho^*;\ x_1 \cdots x_\varrho) = \Omega(x_1 \cdots x_\varrho)$$

ist also (endlicher) algebraischer Körper über $\Omega(g_1^* \cdots g_\varrho^*)$. Nach einem bekannten Satze**) ist $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ als Zwischenkörper von $\Omega(g_1^* \cdots g_\varrho^*)$ und $\Omega(x_1 \cdots x_\varrho)$ selbst algebraischer Körper über $\Omega(g_1^* \cdots g_\varrho^*)$, während $\Omega(x_1 \cdots x_\varrho)$ algebraischer Körper über $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ ist. $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ entsteht also aus $\Omega(g_1^* \cdots g_\varrho^*)$ durch Adjunktion einer *endlichen* Anzahl von Elementen aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$, oder auch durch Adjunktion *einer* geeignet gewählten Funktion; d. h. es gilt

$$\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho} = \Omega(g_1^* \cdots g_\varrho^* g_{\varrho+1}^* \cdots g_k^*) = \Omega(g_1^* \cdots g_\varrho^* g_0^*).$$

Nach dem Übertragungsprinzip haben wir somit

Satz II: *Jeder Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ besitzt eine Rationalbasis vom algebraischen Rang ϱ; die Rationalbasis läßt sich speziell so wählen, daß sie höchstens $\varrho + 1$ Funktionen enthält.*

Es sei ein beliebiges System von ϱ algebraisch unabhängigen Funktionen aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ gegeben durch $h_1(x) \cdots h_\varrho(x)$, das sich nach der obigen Methode zu einer Rationalbasis:

$$h_1(x) \cdots h_\varrho(x);\ h_{\varrho+1}(x) \cdots h_\sigma(x)$$

erweitern läßt.

Nach der Definitionseigenschaft existieren Relationen:

$$h_i(x) = \chi_i(g_1(x) \cdots g_k(x)) \qquad (i = 1, 2, \cdots, \sigma),$$
$$g_j(x) = \psi_j(h_1(x) \cdots h_\sigma(x)) \qquad (j = 1, 2, \cdots, k),$$

*) E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, § 24, Crelles Journ. 137 (1909).

**) Vgl. etwa Weber, Lehrbuch d. Algebra 1, § 144 (1. Aufl.) oder § 55 (kleine Ausgabe).

wobei χ_i, ψ_i rationale Funktionen ihrer Argumente bedeuten; d. h.:

Aus einer beliebigen Rationalbasis ergibt sich jede weitere durch birationale Transformation;

und

Ist

$$h_1(x) \cdots h_\varrho(x)$$

ein beliebiges System von ϱ algebraisch unabhängigen Funktionen aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$, so ist $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ (endlicher) algebraischer Körper über

$$\Omega(h_1(x) \cdots h_\varrho(x)).$$

§ 5.

Involutionsform und Involutionsbasis der Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$.

Während jede in § 4 konstruierte Rationalbasis den Nachteil hatte, von den *willkürlich* gewählten Ausgangsfunktionen abhängig zu sein, zeigen wir jetzt die Existenz einer *durch den Körper eindeutig bestimmten Rationalbasis.*

Nach § 4 ist $\Omega(x_1 \cdots x_\varrho)$ algebraischer Körper — etwa vom Grade i — über $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ und entsteht wegen

$$\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}(x_1 \cdots x_\varrho) = \Omega(x_1 \cdots x_\varrho)$$

durch Adjunktion der in bezug auf $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ algebraischen Elemente $x_1 \cdots x_\varrho$. Wir betrachten daher die in bezug auf $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ irreduzible ganze Funktion $\Phi^*(z, u)$ mit der Nullstelle

$$z = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_\varrho x_\varrho = u(x),$$

die vom i^{ten} Grade in z ist. $\Phi^*(z, u)$ ist ferner als Produkt der mit $[z - u(x)]$ konjugierten Größen eine *homogene Form i^{ter} Dimension in* $z, u_1 \cdots u_\varrho$; enthält also als Koeffizient von z^i eine von u freie Funktion aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$. Machen wir diesen höchsten Koeffizienten durch Division zu 1, so ist die irreduzible Funktion $\Phi^*(z, u)$ eindeutig bestimmt. Diese so definierte *homogene Form*

$$\Phi^*(z, u) = z^i + \Sigma' g^*_{\alpha\alpha_1 \cdots \alpha_\varrho}(x_1 \cdots x_p) \cdot z^\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_\varrho^{\alpha_\varrho} \qquad (\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\varrho = i) \tag{1}$$

soll als *Involutionsform*) von* $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ bezeichnet werden; aus (1) ergibt sich

$$\Phi(z, u) = z^i + \Sigma' g_{\alpha\alpha_1 \cdots \alpha_\varrho}(x) \cdot z^\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_\varrho^{\alpha_\varrho} \qquad (\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\varrho = i) \tag{2}$$

als eine *Involutionsform von* $\mathfrak{K}_{n\varrho}$.

*) Der Grund für die Bezeichnung ergibt sich am Schluß des Paragraphen; Σ' bedeutet, daß die Summation über alle Glieder mit Ausnahme von z^i zu erstrecken ist.

Die Koeffizienten der Involutionsform $\Phi^*(z, u)$ werden sich als Rationalbasis von $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ ergeben; d. h. es besteht die Beziehung

$$\Omega(g^*_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}(x_1\cdots x_\varrho)) = \mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho} \qquad (\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_\varrho = i). \tag{3}$$

Zum Beweise bemerken wir, daß $\Phi^*(z, u)$ Koeffizienten aus $\Omega(g^*_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x))$ besitzt und wegen der Irreduzibilität in bezug auf $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ um so mehr irreduzibel in bezug auf diesen Teilkörper ist. $\Phi^*(z, u)$ stellt also die irreduzible Gleichung von $u(x)$ in bezug auf $\Omega(g^*_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x))$ dar. Daraus folgt, daß $\Omega(x_1\cdots x_\varrho)$ algebraischer Körper — vom Grade i — über $\Omega(g^*_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}(x))$ ist. Da $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ zwischen $\Omega(g^*_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x))$ und $\Omega(x_1\cdots x_\varrho)$ liegt, folgt bekanntlich aus der Identität der Grade die Identität der Körper, also die Beziehung (3). Nach dem Übertragungsprinzip ergeben entsprechend die Koeffizienten von $\Phi(z, u)$ eine Rationalbasis von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$; d. h. wir haben den

Satz III: *Die Koeffizienten der Involutionsform bilden eine durch den Körper bestimmte Rationalbasis, die Involutionsbasis; für Körper $\mathfrak{K}_{\varrho\varrho}$ ist diese Basis eindeutig bestimmt.**)

Wir geben noch eine *irrationale Deutung* dieser Tatsache, die den Zusammenhang mit der *geometrischen Theorie der Involution* herstellt.

Die Zerlegung von $\Phi^*(z, u)$ in Linearfaktoren sei in einem Erweiterungskörper gegeben durch:

$$\begin{aligned}\Phi^*(z, u) = (z - u_1x_1 - \cdots - u_\varrho x_\varrho)(z - u_1x_1^{(1)} - \cdots - u_\varrho x_\varrho^{(1)})\cdots\\ (z - u_1x_1^{(i-1)} - \cdots - u_\varrho x_\varrho^{(i-1)}).\end{aligned} \tag{4}$$

Der Vergleich mit (1) zeigt, daß die Funktionen

$$g^*_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x_1\cdots x_\varrho) \qquad (\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_\varrho = i)$$

identisch sind mit den symmetrischen Elementarfunktionen der Größenreihen:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots x_\varrho \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots x_\varrho^{(1)} \\ \vdots & & \\ x_1^{(i-1)} & x_2^{(i-1)} & \cdots x_\varrho^{(i-1)}. \end{matrix} \tag{5}$$

Es ist also jede Funktion aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$, als rationale Verbindung dieser Elementarfunktionen, symmetrisch in den Größenreihen (5), und umgekehrt gehört jede symmetrische Funktion der Größenreihen (5) zu $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$.

*) Für Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ kann die Involutionsform von der Abbildung abhängig sein; Eindeutigkeit läßt sich durch Abbildung mit unbestimmten Koeffizienten erzielen.

Durchläuft somit

$$f^*(x) = \frac{F^*(x)}{H^*(x)}$$

alle Funktionen aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$, so besteht das System von unendlich vielen Relationen:

$$(6) \qquad \frac{F^*(x)}{H^*(x)} = \frac{F^*(x^{(1)})}{H^*(x^{(1)})} = \cdots = \frac{F^*(x^{(i-1)})}{H^*(x^{(i-1)})};$$

oder zusammenfassend:

$$F^*(x^{(k)})H^*(x^{(l)}) - F^*(x^{(l)})H^*(x^{(k)}) = 0 \quad \left(\begin{matrix}k\\l\end{matrix} = 0, 1, \cdots, (i-1)\right);$$

wobei weder $F^*(x^{(k)})$, noch $H^*(x^{(k)})$ — als konjugiert zu $F^*(x)$, $H^*(x)$ und formal symmetrisch — identisch verschwinden.

Umgekehrt ergibt sich für jede Größenreihe ξ, die den unendlich vielen Relationen

$$(7) \qquad F^*(x)H^*(\xi) - H^*(x)F^*(\xi) = 0, \quad H^*(\xi) \neq 0$$

genügt, die Zugehörigkeit zu den Größenreihen (5).

Denn bedeutet $G^*(x)$ den gemeinsamen Nenner der Koeffizienten von $\Phi^*(z, u)$, so verschwindet nach Voraussetzung (7) die auch in ξ ganze Funktion

$$G^*(\xi) \cdot \Phi^*(z, u; \xi)$$

nicht identisch — d. h. die Koeffizienten von $\Phi^*(z, u; \xi)$ werden nicht unbestimmt — und besitzt die Nullstelle

$$z = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \cdots + u_\varrho\xi_\varrho$$

Wegen (7) hat daher auch $\Phi^*(z, u; x)$ die Nullstelle $z = u(\xi)$; d. h. ξ gehört zu den Größenreihen (5). Entsprechendes gilt nach (6), wenn ξ einem Gleichungssystem in bezug auf eine konjugierte Größenreihe genügt:

$$F^*(x^{(k)})H^*(\xi) - H^*(x^{(k)})F^*(\xi) = 0; \quad H(\xi) \neq 0,$$

d. h.: die Größenreihen (5) sind definiert als die Lösungen ξ des Gleichungssystems

$$F^*(x)H^*(\xi) - H^*(x)F^*(\xi) = 0; \quad H(\xi) \neq 0,$$

wobei $\frac{F^*(x)}{H^*(x)}$ alle Funktionen aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ durchläuft; dabei läßt sich die Reihe x auch durch irgendeine konjugierte Reihe ersetzen.

Geometrisch besagt das, indem man jede Reihe x als Punkt deutet:

Die Lösungen von (7) stellen in einem ϱ dimensionalen linearen Raum ∞^ϱ Gruppen von je i Punkten dar derart, daß durch *irgendeinen* Punkt der Gruppe die einzelne Gruppe eindeutig bestimmt ist. Ein solches System von Punktgruppen wird als „*Involution in einem linearen Raum*" bezeichnet.*)

*) Die ausgeschlossenen Lösungen von (7), für die $F^*(\xi) = 0$, $H^*(\xi) = 0$ wird, — und ebenso die ausgeschlossenen Lösungen des Gleichungssystems, das der Involutionsbasis entspricht — bezeichnet man als *Fundamentalpunkte* der Involution, und zwar sind dabei auch die durch Homogenisierung sich ergebenden, „im Unendlichen liegenden", mitzuzählen.

Entsprechend ist durch einen Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ eine aus Kurven, Flächen usw. bestehende Involution in einem linearen Raum charakterisiert.

Da nach dem Obigen der Grad i von $\Omega(x_1 \cdots x_\varrho)$ in bezug auf $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ gleich der Anzahl der Lösungssysteme von (7) mit der Nebenbedingung $H^*(\xi) \neq 0$ ist — die wir als Lösungssysteme von $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ bezeichnen können —, so läßt der zum Existenzbeweis der Involutionsbasis benutzte Schluß auch die irrationale Fassung zu:

„Ist $\mathfrak{L}^*$ ein Teiler von $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ und ist jedes Lösungssystem des Körpers $\mathfrak{L}^*$ auch Lösungssystem von $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$, so sind $\mathfrak{L}^*$ und $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ identisch."

Das Entsprechende gilt nach dem Übertragungsprinzip für Teiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$.

§ 6.

Minimalbasis der Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$.

Dieser Paragraph bringt eine Übersicht über bekannte Sätze, aber in einer erweiterten Fassung, die durch das Übertragungsprinzip und die Existenz der Rationalbasis ermöglicht ist.

Definition IV: *Eine Rationalbasis von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ heißt Minimalbasis, wenn sie nur die Mindestzahl ϱ von Funktionen enthält, die dann algebraisch unabhängig sein müssen.*

Aus Sätzen von Lüroth, Castelnuovo und Enriques*) ergeben sich die Tatsachen:

I. Jeder Körper $\mathfrak{K}_{n1}$ besitzt eine Minimalbasis, die bis auf lineargebrochene Transformation eindeutig bestimmte Lürothsche Funktion des Körpers.

II. Für Körper $\mathfrak{K}_{n2}$ existiert eine Minimalbasis stets dann und im allgemeinen nur dann, wenn man algebraische Erweiterung des Koeffizientenbereichs Ω zuläßt.

III. Für Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ $(\varrho \geqq 3)$ existiert im allgemeinen keine Minimalbasis. Eine Charakterisierung der speziellen Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ mit Minimalbasis ist noch nicht versucht.

Wir deuten kurz den von E. Steinitz**) gegebenen Beweis des Lürothschen Satzes für Körper $\mathfrak{K}^*_{11}$ an:

Sei $\Phi^*(z, u)$ die Involutionsform von $\mathfrak{K}^*_{11}$ und $\psi^*(x)$ irgendein die Unbestimmte x wirklich enthaltender Koeffizient von $\Phi^*(z, u)$. Es zeigt sich,

*) J. Lüroth: Beweis eines Satzes über rationale Kurven, Math. Ann. 9 (1875). — G. Castelnuovo: Sulla razionalità delle involuzioni piane, Math. Ann. 44 (1893). — F. Enriques: Sopra una involuzione non razionale dello spazio, Rend. Acc. Linc., Vol. 21, 21. Jan. 1912.

**) A. a. O § 24.

daß der Grad von $\Omega(x)$ in bezug auf $\Omega(\psi^*(x))$ gleich ist dem Grad von $\Omega(x)$ in bezug auf $\mathfrak{K}_{11}^*$, woraus die Identität der Körper folgt. Sei ferner $\Omega(\chi^*(x))$ gleich $\Omega(\psi^*(x))$, so folgt wegen der gegenseitig rationalen Abhängigkeit von $\chi^*(x)$ und $\psi^*(x)$ die lineargebrochene Abhängigkeit der beiden Funktionen.

Nach dem Übertragungsprinzip läßt der Lürothsche Satz also auch die Fassung zu:

Die Minimalbasis der Körper $\mathfrak{K}_{n1}$ besteht aus irgendeiner Funktion der Involutionsbasis; und je zwei Funktionen der Involutionsbasis von $\mathfrak{K}_{n1}$ hängen linear gebrochen voneinander ab.

Den Beweis der Tatsache II führt G. Castelnuovo mittels der geometrischen Theorie der Involution für Körper $\mathfrak{K}_{22}^*$, die aus einer Rationalbasis von drei Funktionen abgeleitet sind. Da das Übertragungsprinzip auch bei endlicher algebraischer Erweiterung des Koeffizientenbereichs Ω erhalten bleibt, ist wegen der Existenz der Rationalbasis der Beweis damit für alle Körper $\mathfrak{K}_{n2}$ erbracht.

Zu III ist zu bemerken, daß Enriques eine nichtrationale Involution im dreidimensionalen Raum konstruiert; d. h. einen Körper $\mathfrak{K}_{33}$, der keine Minimalbasis besitzt.

§ 7.

Beliebiges System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, lineare Schar $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ und Integritätsbereich $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ rationaler Funktionen. Existenz der Rationalbasis.

Aus der Existenz der Rationalbasis der Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ wird sich jetzt die Rationalbasis für beliebige Systeme rationaler und ganzer rationaler Funktionen ergeben. Wir ordnen diese Systeme so an, wie sie sukzessive durch die elementaren Operationen der Addition, Multiplikation und Division auseinander hervorgehen.

I. Es bezeichne, wie immer, $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ ein *beliebiges System* rationaler (oder ganzer rationaler) Funktionen von n Unbestimmten, vom algebraischen Rang ϱ. Die Größen aus Ω sind mit zum System gehörig gerechnet.

II. Das System $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ heißt *lineare Schar*, wenn es die Bedingungen erfüllt:

1. $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ enthält neben $f(x)$ stets auch $c\cdot f(x)$, wo c eine beliebige Größe aus Ω;

2. $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ enthält neben $f(x)$ und $g(x)$ stets auch $f(x)+g(x)$.

III. Die lineare Schar $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ heißt *Integritätsbereich* unter der weiteren Bedingung:

3. $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ enthält neben $f(x)$ und $g(x)$ stets auch $f(x)\cdot g(x)$.

IV. Der Integritätsbereich $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ heißt *Körper* unter der weiteren Bedingung:

4. $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ enthält neben $f(x)$ und $g(x)$ — wo $g(x) \neq 0$ — stets auch den Quotienten $f(x):g(x)$.

Die Bedingungen 1 bis 4 sind die in § 1 für den Körper angegebenen.*)

Diese Bereiche sollen nun sukzessive auseinander hergeleitet werden.

a) Ein beliebiges System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ wird zu einer linearen Schar $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ erweitert durch die Forderung:

$\mathfrak{L}_{n\varrho}$ enthält neben $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ *alle Funktionen* $h(x)$ *und nur diese*, die sich linear mit Koeffizienten aus Ω durch eine *endliche* Anzahl von Funktionen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ darstellen lassen:

$$h(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_k f_k(x),$$

wobei $f_1(x) \cdots f_k(x)$ alle Funktionen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, $c_1 \cdots c_k$ alle Größen aus Ω durchlaufen.

Denn durch Hinzufügung rationaler Verbindungen von Funktionen des Systems bleibt der algebraische Rang eines Systems erhalten. $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ erfüllt die Bedingungen 1 und 2, ist also eine lineare Schar. Da ferner *jede* lineare Schar, die $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ enthält, nach 1 und 2 auch $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ enthält, ist $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ *die kleinste* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ *enthaltende lineare Schar.*

b) Entsprechend entsteht aus einer linearen Schar $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ *der kleinste enthaltende Integritätsbereich* $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ durch die Forderung:

$\mathfrak{J}_{n\varrho}$ enthält neben $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ alle Funktionen $h(x)$ und nur diese, die sich als *ganze rationale Verbindung* — mit Koeffizienten aus Ω — einer endlichen Anzahl von Funktionen aus $\mathfrak{L}_{n\varrho}$, $f_1(x) \cdots f_k(x)$ darstellen lassen, wobei $f_1(x) \cdots f_k(x)$ alle Funktionen aus $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ durchlaufen.

c) Endlich entsteht aus einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ *der kleinste enthaltende Körper* $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ durch die Forderung: $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ enthält neben $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ alle Funktionen $h(x)$ und nur diese, die sich als Quotienten zweier Funktionen aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ darstellen lassen.

Faßt man die drei Erweiterungen in einen Schritt zusammen, so kommt:

Jedes System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ *läßt sich zu einem kleinsten enthaltenden Körper* $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ *erweitern durch die Forderung:*

$\mathfrak{K}_{n\varrho}$ *enthält neben* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ *alle Funktionen* $h(x)$ *und nur diese, die sich als rationale Verbindung — mit Koeffizienten aus* Ω *— einer endlichen Anzahl von Funktionen aus* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, $f_1(x) \cdots f_k(x)$ *darstellen lassen, wobei* $f_1(x) \cdots f_k(x)$ *alle Funktionen aus* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ *durchlaufen.*

---

*) $f(x)$ und $g(x)$ können auch nullten Grades, d. h. Größen aus Ω sein.

Aus der letzteren Tatsache ergibt sich unmittelbar die Existenz der Rationalbasis für beliebige Bereiche:

Es sei $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ der kleinste $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ enthaltende Körper und eine Rationalbasis von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ gegeben durch

$$(1) \qquad h_1(x), h_2(x), \cdots, h_\sigma(x).$$

Nach der Definition von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ existieren Relationen:

$$(2) \qquad h_1(x) = \gamma_1(g_1(x)\cdots g_\lambda(x)); \cdots; h_\sigma(x) = \gamma_\sigma(g_\mu(x)\cdots g_\nu(x)),$$

wobei $\gamma_1 \cdots \gamma_\sigma$ rationale Funktionen ihrer Argumente sind, und

$$(3) \qquad g_1(x)\cdots g_\lambda(x), \cdots, g_\mu(x)\cdots g_\nu(x)$$

sämtlich zu $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ gehören. Wegen der Relationen (2) stellt neben (1) auch (3) eine Rationalbasis von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ dar; wegen der Zugehörigkeit der Funktionen (3) zu $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ ist diese zugleich Rationalbasis von $\mathfrak{S}_{n\varrho}$; wir haben also

Satz IV: *Ein beliebiges System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ von rationalen (oder ganzen rationalen) Funktionen besitzt eine aus einer endlichen Anzahl von Funktionen des Systems bestehende Rationalbasis vom algebraischen Rang ϱ.*

Es sei nun speziell $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ eine lineare Schar und

$$(4) \qquad g_1(x)\cdots g_\varrho(x), g_{\varrho+1}(x)\cdots g_\nu(x)$$

eine Rationalbasis von $\mathfrak{L}_{n\varrho}$. Seien etwa

$$g_1(x)\cdots g_\varrho(x)$$

algebraisch unabhängig. Setzt man dann

$$g(x) = c_1 g_{\varrho+1}(x) + c_2 g_{\varrho+2}(x) + \cdots + c_{\nu-\varrho} g_\nu(x),$$

so lassen sich die c_i so als Zahlen aus Ω wählen, daß

$$(5) \qquad g_1(x)\cdots g_\varrho(x), g(x)$$

eine Rationalbasis des kleinsten enthaltenden Körpers $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ wird. Da aber $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ eine lineare Schar, gehört $g(x)$ zu $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ und (5) stellt eine Rationalbasis von $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ dar; d. h.

Satz V: *Die Rationalbasis jeder linearen Schar $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ von rationalen (oder ganzen rationalen) Funktionen, also insonderheit die Rationalbasis jedes Integritätsbereich $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ und jeden Körpers $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ läßt sich speziell so wählen, daß sie höchstens $\varrho + 1$ Funktionen enthält (und mindestens ϱ).*

Die in § 4 für den Körper gefundene Anzahlbeschränkung der Funktionen der Rationalbasis beruht also auf der Eigenschaft des Körpers, eine lineare Schar zu sein; während die Beschränkung auf ϱ Funktionen im Falle der Existenz der Minimalbasis alle Voraussetzungen des Körpers benutzt.

Es sei noch bemerkt, daß nach § 3 (4) alle charakteristischen Eigenschaften der Systeme und kleinsten enthaltenden Systeme bei der Abbildung erhalten bleiben.

§ 8.

Involutionsbasis der Integritätsbereiche $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ aus Polynomen.

In den folgenden Paragraphen handelt es sich um Systeme $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, deren Elemente *ganze rationale Funktionen (Polynome)* sind; zunächst um Integritätsbereiche $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ aus Polynomen. Für diese Bereiche $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ sollen vorerst Teilbarkeitsbegriffe festgelegt werden.

Es seien $F(x)$, $G(x)$ zwei Polynome aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ und $L(x)$ ein gemeinsamer Teiler dieser Polynome, so daß man hat:

$$F(x) = L(x) \cdot F_1(x); \quad G(x) = L(x) \cdot G_1(x).$$

$L(x)$ heißt dann und nur dann *gemeinsamer Teiler in* $\mathfrak{J}_{n\varrho}$, wenn die drei Polynome $L(x)$, $F_1(x)$, $G_1(x)$ zu $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ gehören.

Zwei Polynome aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ heißen *teilerfremd in* $\mathfrak{J}_{n\varrho}$, wenn sie *keinen gemeinsamen Teiler in* $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ besitzen.

Sei $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ der kleinste $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ enthaltende Körper. Dann ergibt sich aus der Definition für jede Funktion aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ eine Darstellung:

$$f(x) = F_1(x) : F_2(x),$$

wobei $F_1(x)$, $F_2(x)$ zu $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ gehören und in $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ teilerfremd sind. Entsprechend lassen sich mehrere Funktionen aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ auf gemeinsamen Nenner in $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ bringen:

$$f_1(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)} \cdots f_k(x) = \frac{F_k(x)}{F(x)}.$$

$F(x)$ heißt dann und nur dann *ein kleinster gemeinsamer Nenner in* $\mathfrak{J}_{n\varrho}$, wenn die Polynome aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$: $F(x), F_1(x), \cdots, F_k(x)$ *teilerfremd in* $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ sind.

Eine solche Darstellung kann auf verschiedene Weise möglich sein, da in $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ im allgemeinen *nicht* die Gesetze der eindeutigen Zerlegbarkeit in irreduzible Funktionen gelten.

Wir untersuchen jetzt die Bedeutung der Involutionsbasis von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ für $\mathfrak{J}_{n\varrho}$, indem wir die Begriffe der Involutionsform und Involutionsbasis auf Integritätsbereiche übertragen. Es sei

$$\Phi(z, u) = z^i + \Sigma' g_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x) z^\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_\varrho^{\alpha_\varrho}$$
$$(\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\varrho = i)$$

eine Involutionsform von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ und $G(x)$ ein kleinster gemeinsamer Nenner in $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ der Koeffizienten von $\Phi(z, u)$. Durch Multiplikation mit $G(x)$ geht $\Phi(z, u)$ in eine Form $\Psi(z, u)$ über, deren Koeffizienten Polynome aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ und in $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ teilerfremd sind:

$$G(x) \cdot \Phi(z, u) = \Psi(z, u) = G(x) z^i + \Sigma' G_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x) z^\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_\varrho^{\alpha_\varrho}$$
$$(\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\varrho = i).$$

Jede Form $\Psi(z, u)$, die aus einer Involutionsform $\Phi(z, u)$ von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ durch Multiplikation mit einem Polynom aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ hervorgeht derart, daß die Koeffizienten von $\Psi(z, u)$ Polynome aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ und in $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ teilerfremd sind, soll als eine ***Involutionsform*** *von $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ und die Koeffizienten von $\Psi(z, u)$ sollen als eine zugehörige* ***Involutionsbasis*** *bezeichnet werden.*

Zunächst ist aus der Bedeutung der Involutionsbasis von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ klar, daß jede Involutionsbasis von $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ zugleich Rationalbasis ist. Zur weiteren Untersuchung betrachten wir einen Abbildungsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$, für dessen kleinsten enthaltenden Körper $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ die irreduzible Gleichung mit der Nullstelle $z = u_1 x_1 + \cdots + u_\varrho x_\varrho$ durch $\Phi^*(z, u) = 0$ gegeben ist.

Nach § 5 stellen die Koeffizienten von

$$\Phi^*(z, u) = z^i + \Sigma' g^*_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x) z^\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_\varrho^{\alpha_\varrho}$$
$$(\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\varrho = i)$$

die symmetrischen Elementarfunktionen der in bezug auf $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ konjugierten *Größenreihen*

$$x, x^{(1)} \cdots x^{(i-1)}$$

dar. Sei $F^*(x)$ ein beliebiges Polynom aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$, so folgt wegen

$$F^*(x) = \frac{1}{i}\left(F^*(x) + F^*(x^{(1)}) + \cdots + F^*(x^{(i-1)})\right),$$

daß $F^*(x)$ eine *ganze* symmetrische Funktion dieser Größenreihen ist; und sich folglich als *ganze* rationale Verbindung der symmetrischen Elementarfunktionen, d. h. der Funktionen

$$g^*_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x)$$

ausdrücken läßt. Ist nun

$$G^*(x) \cdot \Phi^*(z, u) = \Psi^*(z, u) = G^*(x) z^i + \Sigma' G^*_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x) z^\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_\varrho^{\alpha_\varrho}$$
$$(\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_\varrho = i)$$

eine Involutionsform von $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$, so wird demnach jedes Polynom aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$, also insbesondere jedes Polynom aus $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$, eine *ganze* rationale Verbindung der Quotienten

$$G^*_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_\varrho}(x) : G^*(x).$$

Unter Berücksichtigung des Übertragungsprinzips ergibt sich so

Satz VI: *Zu jedem Integritätsbereich aus Polynomen $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ existiert mindestens eine ausgezeichnete Rationalbasis, die Involutionsbasis derart, daß in der rationalen Darstellung aller Polynome aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ durch die Funktionen der Involutionsbasis nur die* **Potenz einer festen** *Funktion (des höchsten Koeffizienten der zugehörigen Involutionsform) im Nenner auftritt.*

§ 9.

Relativ-ganze Bereiche $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ aus Polynomen.

Wir betrachten im folgenden spezielle Integritätsbereiche aus Polynomen, die eine Zwischenstufe zwischen Integritätsbereich und Körper bilden.

Ein *Integritätsbereich* aus Polynomen $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ heißt *„relativ-ganzer Bereich“* unter der Bedingung:

4a) *$\mathfrak{G}_{n\varrho}$ enthält neben $F(x)$ und $G(x)$ — wo $G(x) \neq 0$ — stets dann und nur dann den Quotienten $F(x):G(x)$, wenn dieser Quotient ganz in den Unbestimmten, also ein Polynom ist.*

Es ist zunächst die Identität der relativ-ganzen Bereiche mit der *Gesamtheit der Polynome eines Körpers $\mathfrak{K}_{n\sigma}$ ($\sigma \geqq \varrho$)* rationaler Funktionen nachzuweisen.

Sei $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ der kleinste $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ enthaltende Körper. Für jede Funktion $f(x)$ aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ gilt eine Darstellung als Quotient zweier Polynome aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$:

$$f(x) = F_1(x) : F_2(x),$$

wobei auch Polynome nullten Grades zugelassen sind. Sobald $f(x)$ ein Polynom wird, gehört es nach Bedingung 4a) zu $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ und da $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ auch keine weiteren Polynome enthalten kann, ist *jeder relativ-ganze Bereich $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ identisch mit der Gesamtheit der Polynome des kleinsten enthaltenden Körpers.*

Sei umgekehrt $\mathfrak{K}_{n\sigma}$ ein beliebiger Körper rationaler Funktionen (also nicht kleinster enthaltender eines gegebenen Systems) und sei $\mathfrak{J}$ die *Gesamtheit der in $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ enthaltenen Polynome.* $\mathfrak{J}$ erfüllt die Bedingungen 1, 2, 3 des Integritätsbereichs und Bedingung 4a), ist also relativ-ganzer Bereich; d. h. *die Gesamtheit der in einem Körper $\mathfrak{K}_{n\sigma}$ enthaltenen Polynome bildet einen relativ-ganzen Bereich $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ ($\varrho \leqq \sigma$).**)

Wir zeigen ferner die Identität der relativ-ganzen Bereiche mit den von Hilbert eingeführten „Integritätsbereichen aus relativ-ganzen Funktionen.“**)

Es sei

$$G_1(x) \cdots G_k(x) \tag{1}$$

eine Rationalbasis von $\mathfrak{G}_{n\varrho}$; nach den Bedingungen 1, 2, 3, 4a gehört *jede* rationale Verbindung der Polynome (1), die ganz in den Unbestimmten, also ein Polynom wird, zu $\mathfrak{G}_{n\varrho}$. Da umgekehrt auch jedes Polynom aus

*) Es kann auch $\varrho = 0$ sein; d. h. die Gesamtheit der Polynome aus $\mathfrak{K}_{n\sigma}$ aus dem Koeffizientenbereich Ω bestehen.

**) D. Hilbert: Mathematische Probleme. Vortrag Paris 1900. Problem 14 (Göttinger Nachrichten 1900).

$\mathfrak{G}_{n\varrho}$ sich nach dem Begriff der Rationalbasis rational durch die Polynome (1) ausdrücken läßt, ist $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ *identisch mit der Gesamtheit derjenigen rationalen Verbindungen der Polynome* (1), *die ganz in den Unbestimmten, also Polynome sind.* Wir haben die von der *speziellen Rationalbasis* ausgehende Definition Hilberts, während unsere Definition nur abstrakte Eigenschaften des Bereichs benutzt.

Für relativ-ganze Bereiche vereinfacht sich die in § 8 für allgemeine Integritätsbereiche gegebene Definition eines gemeinsamen Teilers:

Seien $F(x)$, $G(x)$ zwei Polynome aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ und $L(x)$ ein gemeinsamer Teiler dieser Polynome. $L(x)$ heißt dann und nur dann ein *gemeinsamer Teiler in* $\mathfrak{G}_{n\varrho}$, wenn $L(x)$ zu $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ gehört.

Denn die Zugehörigkeit der Quotienten $F(x):L(x)$, $G(x):L(x)$ folgt dann aus der Bedingung 4a).

Eine wesentliche Eigenschaft der relativ-ganzen Bereiche ist ferner, daß sich der Begriff des „Algebraisch-ganzen in bezug auf $\mathfrak{G}_{n\varrho}$“ genau so an einer beliebigen Gleichung definieren läßt, wie dies in bezug auf algebraische Zahlkörper oder auf den Körper $\Omega(x_1 \cdots x_n)$ bekannt ist.

Definition V: *Eine Größe ξ heißt algebraisch-ganz in bezug auf $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ — oder auch relativ-algebraisch-ganz —, wenn sie irgendeiner Gleichung genügt, deren höchster Koeffizient die Einheit, deren übrige Polynome aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ sind.*

Es möge nämlich die relativ-algebraisch-ganze Größe ξ etwa der Gleichung

$$L(z) = z^{\lambda} + G_1(x) z^{\lambda-1} + \cdots + G_{\lambda}(x) = 0$$

genügen. $L(z)$ ist durch die in bezug auf den kleinsten enthaltenden Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ irreduzible ganze Funktion

$$M(z) = z^{\mu} + H_1(x) z^{\mu-1} + \cdots + H_{\mu}(x)$$

teilbar. Aus dieser Teilbarkeit folgt aber nach der bekannten Erweiterung des Gaußschen Satzes*), daß die rationalen Funktionen $H_1(x) \cdots H_{\mu}(x)$ *Polynome* aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ sind, und *also zu* $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ *gehören.* Damit ist die Definition der relativ-algebraisch-ganzen Größe ξ an der irreduziblen Gleichung gewonnen. Insbesondere ist jedes Polynom $F(x)$ aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ auch algebraisch-ganz in bezug auf $\mathfrak{G}_{n\varrho}$, da es der Gleichung $z - F(x) = 0$ genügt.

Weiter sei erwähnt, daß zu einem Integritätsbereich $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ aus Polynomen analog wie der kleinste enthaltende Körper auch *der kleinste enthaltende relativ-ganze Bereich* $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ definiert ist durch die Forderung:

$\mathfrak{G}_{n\varrho}$ enthält neben $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ alle Polynome $H(x)$ und nur diese, die sich als Quotienten zweier Polynome aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ darstellen lassen.

---

*) Vgl. etwa J. König: Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen (Leipzig, B. G. Teubner, 1903), Kap. IX, § 2 oder Weber (kleine Ausgabe), § 20.

Aus dieser Definition folgt weiter: Aus jeder Involutionsform und Involutionsbasis von $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ entsteht eine zugehörige von $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ dadurch, daß höchstens ein gemeinsamer Teiler in $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ aller Polynome der Basis abzuspalten ist.

Denn $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ und $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ besitzen denselben kleinsten enthaltenden Körper $\mathfrak{K}_{n\varrho}$; und jede Involutionsform von $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ entsteht aus einer Involutionsform von $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ durch Multiplikation mit einem Polynom aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$; besitzt also Koeffizienten aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$, die aber in $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ einen gemeinsamen Teiler haben können.*)

Schließlich sei bemerkt, daß der *Abbildungsbereich* eines relativ-ganzen Bereichs $\mathfrak{G}_{n\varrho}$, der nach § 7 wieder ein Integritätsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ aus Polynomen ist, *nicht notwendig relativ-ganzer Bereich* zu sein braucht. Denn sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei Polynome aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$, deren Quotient kein Polynom ist und folglich nicht zu $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ gehört, so gehört auch der Quotient $F^*(x):G^*(x)$ nicht zu $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$. Dieser durch Spezialisierung einiger Unbestimmten entstehende Quotient kann aber sehr wohl ein Polynom sein, und für $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ ist dann Bedingung 4a) nicht erfüllt.**)

§ 10.

Relativ-ganze Bereiche erster Art und ihre Integritätsbasis.

Der in § 9 (Definition V) eingeführte Begriff des „Relativ-algebraisch-Ganzen" gestattet es, eine Klasse von relativ-ganzen Bereichen anzugeben, die endliche Integritätsbereiche sind; und damit eine von D. Hilbert aufgeworfene Frage (Math. Probleme, Probl. 14) wenigstens für diese Klasse positiv zu beantworten. Wir geben die

Definition VI: *Eine endliche Anzahl von Polynomen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ heißt Integritätsbasis, wenn sich jedes Polynom aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ als ganze rationale Verbindung dieser endlichen Anzahl darstellen läßt, mit Koeffizienten aus Ω. Ein Integritätsbereich aus Polynomen, der eine Integritätsbasis besitzt, heißt endlicher Integritätsbereich.*

---

*) Z. B. ergibt sich für den aus allen ganzen rationalen Verbindungen von x_1^2 und $x_1 x_2$ bestehenden Integritätsbereich $\mathfrak{J}_{22}$ als Involutionsform:

$$\Psi(z, u) = x_1^2 \cdot z^2 - x_1^4 u_1^2 - 2 x_1^3 x_2 u_1 u_2 - x_1^2 x_2^2 u_2^2.$$

Da x_1^2 zu $\mathfrak{J}_{22}$, also umsomehr zu dem kleinsten enthaltenden relativ-ganzen Bereiche $\mathfrak{G}_{22}$ gehört und folglich gemeinsamer Teiler in $\mathfrak{G}_{22}$ ist, ergibt sich als Involutionsform von $\mathfrak{G}_{22}$:

$$\Psi(z, u) = z^2 - x_1^2 u_1^2 - 2 x_1 x_2 u_1 u_2 - x_2^2 u_2^2.$$

**) Bestehe $\mathfrak{G}_{32}$ z. B. aus allen Polynomen, die rationale Verbindungen von $F = x_1^2 x_2$, $G = x_1^2(1 + x_3)$ sind. Die zulässige Spezialisierung $x_3 = 0$ gibt $F^* : G^* = x_2$, während $F : G$ kein Polynom ist. $\mathfrak{J}^*_{22}$ ist also kein relativ-ganzer Bereich.

Die zu betrachtende Klasse von relativ-ganzen Bereichen, für die sich die Involutionsbasis als Integritätsbasis erweisen wird, bezeichnen wir als relativ-ganze Bereiche erster Art nach der

Definition VII: *Ein relativ-ganzer Bereich $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ heißt erster Art, wenn er als Abbildungsbereich einen relativ-ganzen Bereich $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ besitzt derart, daß jedes beliebige Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$ (mit Koeffizienten aus Ω) algebraisch ganz von $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ abhängt.*

Nach dieser Definition hängen nämlich die Unbestimmten $x_1 \cdots x_\varrho$ und folglich auch die Linearform $u(x) = u_1 x_1 + \cdots + u_\varrho x_\varrho$ algebraisch ganz von $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ ab. Die irreduzible ganze Funktion mit der Nullstelle $z = u(x)$ — die Involutionsform des kleinsten enthaltenden Körper $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ — besitzt also als höchsten Koeffizienten die Einheit, als weitere Koeffizienten Polynome aus $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$, ist daher gleichzeitig Involutionsform von $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ und es kann in $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ keine weitere Involutionsform existieren. Nach dem Übertragungsprinzip besitzt also auch $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ eine Involutionsform, deren höchster Koeffizient die Einheit ist; und da nach Satz VI in der rationalen Darstellung aller Polynome aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ durch die zugehörige Involutionsbasis nur dieser höchste Koeffizient in den Nenner tritt, wird die Involutionsbasis Integritätsbasis; d. h.

Satz VII. *Jeder relativ-ganze Bereich erster Art ist endlicher Integritätsbereich; die Integritätsbasis ist gegeben durch die aus dem charakterisierenden Abbildungsbereich gewonnene Involutionsbasis. Insbesondere ist die Integritätsbasis der relativ-ganzen Bereiche erster Art $\mathfrak{G}_{\varrho\varrho}$ durch die eindeutig definierte Involutionsbasis von $\mathfrak{G}_{\varrho\varrho}$ gegeben.*

Wir geben noch ein Kriterium für relativ-ganze Bereiche erster Art. Sei $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ erster Art und eine Integritätsbasis von $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ gegeben durch

(1) $$F_1(x),\ F_2(x), \cdots, F_k(x).$$

Dann existieren nach einem Hilbertschen Hilfssatz*) ϱ algebraisch unabhängige Polynome aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$:

(2) $$G_1(x),\ G_2(x), \cdots, G_\varrho(x)$$

derart, daß die Polynome (1) und mithin jedes Polynom aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ algebraisch ganz von den Polynomen (2) abhängt. Das Gleiche gilt für jedes Polynom des Abbildungsbereichs $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ in bezug auf die entsprechenden Polynome:

(3) $$G_1^*(x),\ G_2^*(x), \cdots, G_\varrho^*(x).$$

*) D. Hilbert: Über die vollen Invariantensysteme, Math. Ann. 42 (1893), § 1. (Der dort nur für *homogene* Polynome ausgesprochene Hilfssatz gilt ebenso für *inhomogene*.)

Nach Definition VII hängt also auch *jedes beliebige Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$ algebraisch ganz von den Polynomen* (3) *ab.*

Es enthalte nun umgekehrt ein Abbildungsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ eines beliebigen relativ-ganzen Bereichs $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ ϱ Polynome (3), von denen jedes Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$ algebraisch ganz abhängt. Dann zeigen wir, daß daraus $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ sich als relativ-ganzer Bereich $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ ergibt, und weiter, daß $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ und folglich $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ erster Art sind.

In der Tat sei $F^*(x)$ ein Polynom aus dem kleinsten $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ enthaltenden Körper $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$, das also nach Voraussetzung algebraisch-ganz von den Polynomen (3) abhängt. Da die entsprechende Funktion aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ dann algebraisch-ganz von ϱ Polynomen aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ abhängt, ist sie ein Polynom $F(x)$ und gehört folglich zu $\mathfrak{G}_{n\varrho}$; somit gehört $F^*(x)$ zu $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$. Der Abbildungsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ enthält also *alle* Polynome von $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$, ist relativ-ganzer Bereich $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$. Für $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ und daher auch für $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ folgt aber nach Definition V und VII aus der Voraussetzung unmittelbar, daß sie erster Art sind, d. h.

*Die relativ-ganzen Bereiche erster Art $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ sind dadurch charakterisiert, daß in einem Abbildungsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ ϱ Polynome existieren, von denen jedes beliebige Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$ algebraisch ganz abhängt. Der Abbildungsbereich ergibt sich aus dieser Voraussetzung als relativ-ganzer Bereich.**)

§ 11.

Hilfssatz über algebraisch-ganze Abhängigkeit.

Wir geben nunmehr ein Kriterium dafür, daß jedes beliebige Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$ algebraisch ganz von ϱ Polynomen von $x_1 \cdots x_\varrho$

(1) $$G_1^*(x) \cdots G_\varrho^*(x)$$

abhängt.

Sind die Polynome (1) speziell *homogene* Formen, so verschwinden für jedes spezielle Wertsystem, das (1) zum Verschwinden bringt, gleichzeitig auch alle algebraisch-ganz abhängigen Formen; also insbesondere auch $x_1 \cdots x_\varrho$.

Die Formen (1) können also für kein Wertsystem außer

$$x_1 = 0, \cdots, x_\varrho = 0$$

verschwinden; ihre *Resultante* muß *von Null verschieden* sein.

---

*) Z. B. ergibt in dem in der Schlußanmerkung zu § 9 erwähnten Bereich $\mathfrak{G}_{32}$ die zulässige Spezialisierung $x_1 = 1$ die beiden Polynome $F^* = x_2$, $G^* = 1 + x_3$, von denen jedes beliebige Polynom von x_2, x_3 algebraisch-ganz abhängt. $\mathfrak{G}_{32}$ ist somit erster Art und zwar mit $F(x)$ und $G(x)$ als Integritätsbasis.

Umgekehrt ist diese Bedingung auch hinreichend und läßt eine Erweiterung auf inhomogene Polynome zu nach dem

Hilfssatz: ***Eine hinreichende Bedingung dafür, daß jedes beliebige Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$ algebraisch-ganz von ϱ Polynomen von $x_1 \cdots x_\varrho$***

$$(1) \qquad G_1^*(x) \cdots G_\varrho^*(x)$$

abhängt, ist das Nichtverschwinden der nach $x_1 \cdots x_\varrho$ genommenen Resultante der Glieder höchster Dimension

$$H_1^*(x) \cdots H_\varrho^*(x)$$

der Polynome (1):

$$(2) \qquad R_0 = \begin{bmatrix} H_1^* \cdots H_\varrho^* \\ x_1 \cdots x_\varrho \end{bmatrix} \neq 0.$$

Für homogene Formen (1) ***ist die Bedingung*** (2) ***notwendig.****)

Zum Beweise bilden wir die Polynome

$$(3) \qquad \overline{G}_1^*(x) = G_1^*(x) - \lambda_1, \cdots, \overline{G}_\varrho^*(x) = G_\varrho^*(x) - \lambda_\varrho,$$
$$\overline{\Phi}^*(x) = \Phi^*(x) - \mu,$$

wo $\lambda_1 \cdots \lambda_\varrho$, μ Unbestimmte, $\Phi^*(x)$ ein beliebiges Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$ bedeuten. Die Resultante der Polynome (3) nach $x_1 \cdots x_\varrho$, 1 **) sei gegeben durch

$$(4) \qquad R(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} \overline{G}_1^* \cdots \overline{G}_\varrho^* \; \overline{\Phi}^* \\ x_1 \cdots x_\varrho \quad 1 \end{bmatrix};$$

sie ist eine ganze rationale Funktion von $\lambda_1 \cdots \lambda_\varrho$, μ. Nun läßt sich nach F. Mertens in der Entwicklung von (4) nach Potenzen von μ der höchste Koeffizient explizit angeben***); es wird

$$(5) \qquad (-1)^\tau \cdot R(\lambda, \mu) = R_0^\sigma \cdot \mu^\tau + A_1(\lambda)\mu^{\tau-1} + \cdots + A_\tau(\lambda),$$

wo $A_1(\lambda) \cdots A_\tau(\lambda)$ ganze ganzzahlige Funktionen von $\lambda_1 \cdots \lambda_\varrho$ und den Koeffizienten der Polynome (3) bedeuten. Diese Entwicklung zeigt vorerst, daß unter der Annahme (2) $R_0 \neq 0$ auch $R(\lambda, \mu)$ nicht identisch verschwinden kann. Die Identität in $x_1 \cdots x_\varrho$, $\lambda_1 \cdots \lambda_\varrho \mu$:

$$R(\lambda, \mu) \equiv 0 \ (\text{mod. } \overline{G}_1^*(x), \cdots, \overline{G}_\varrho^*(x), \overline{\Phi}^*(x))$$

*) Zur Resultantentheorie vgl. F. Mertens, Zur Theorie der Elimination (I. u. II. Teil), Sitzungsber. d. k. Ak. d. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl. Abt. IIa, Bd. 108 (1899). (Teilweise wiedergegeben bei J. König, Theorie d. algebr. Größen, Kap. VI).

**) D. h. die homogene Resultante nach $x_1 \cdots x_\varrho x_0$, wenn man die Polynome (3) mittels einer weiteren Unbestimmten x_0 homogenisiert, so daß der Grad in den x erhalten bleibt.

***) A. a. O. § 3 (Beweis von Satz I) und explizit § 6 (Bestimmung des Inbegriffs aller Glieder der Resultante R, welche ein gegebenes Potenzprodukt $a_{\lambda\lambda}^{p_\lambda} a_{\mu\mu}^{p_\mu} \cdots a_{\sigma\sigma}^{p_\sigma}$ als Faktor enthalten). In unserem Fall ist $p_\lambda = 0$, $p_\mu = 0, \cdots, p_\sigma = \tau$, $a_{\sigma\sigma} = (-\mu)$ gesetzt. Wiedergegeben bei König, Kap. VI, § 9.

geht ferner durch die Substitution:

$$\lambda_i = G_i^*(x), \quad \mu = \Phi^*(x)$$

über in:

$$R(G_i^*(x), \Phi^*(x)) = R_0^{\sigma} \cdot \Phi^{*\tau}(x) + A_1(G_i^*(x))\Phi^{*\tau-1}(x) + \cdots + A_\tau(G_i(x)) = 0, \tag{6}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist, da R_0 nach Annahme eine Zahl aus Ω.

§ 12.

Die Integritätsbasis der regulären Systeme $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ aus Polynomen.

Der Hilfssatz des § 11 liefert zusammen mit dem Schluß von § 10 unmittelbar die Tatsache:

Existieren in einem Abbildungsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ von $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ ϱ Polynome derart, daß die homogene Resultante der Glieder höchster Dimension nicht identisch verschwindet — $R_0 \neq 0$ — so ist $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ erster Art und folglich endlicher Integritätsbereich, mit der Involutionsbasis als Integritätsbasis.

Die Bedingung $R_0 \neq 0$ läßt nun vermöge des Hilfssatzes einen zweiten, wesentlich von D. Hilbert angegebenen Existensbeweis der Integritätsbasis zu*), der zwar *nicht* die Involutionsbasis als solche erkennen läßt, dafür aber gleichmäßig für alle Systeme $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ mit der angegebenen Eigenschaft gilt.

Seien nämlich die ϱ Polynome aus $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$, für die $R_0 \neq 0$ und die folglich algebraisch unabhängig sind, gegeben durch

$$G_1^*(x) \cdots G_\varrho^*(x). \tag{1}$$

Nach dem Hilfssatz ist jedes beliebige Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$, also insbesondere auch jedes Polynom des kleinsten $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ enthaltenden Körpers $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ *algebraisch-ganz* von den Polynomen (1) abhängig. Entsprechen diesen daher in $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ die Polynome:

$$G_1(x) \cdots G_\varrho(x), \tag{2}$$

so ist nach dem Übertragungsprinzip jedes Polynom des kleinsten $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ enthaltenden Körpers $\mathfrak{K}_{n\varrho}$, mithin insonderheit jedes Polynom aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, *algebraisch-ganz* von den Polynomen (2) abhängig. Umgekehrt ist auch jede Funktion aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$, die algebraisch-ganz von den Polynomen (2) abhängt, ein Polynom. Betrachtet man daher (nach § 4) $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ als algebraischen

*) Über die vollen Invariantensysteme, § 2. Bei Hilbert handelt es sich unter *Voraussetzung der anderweitig gewonnenen Existenz* der Integritätsbasis des Invariantenkörpers nur um eine *Deutung* dieser Basis durch das Kroneckersche Fundamentalsystem der algebraisch-ganzen Größen eines Körpers.

Körper über $\Omega(G_1 \cdots G_\varrho)$, so ist die Gesamtheit der Polynome aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$ — der relativ-ganze Bereich $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ — identisch mit den *algebraisch-ganzen Größen* dieses Körpers. Es sei $G(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$, das (2) zu einer Rationalbasis ergänzt, und $D(x)$ die Diskriminante der irreduzibeln Gleichung k^{ten} Grades, der $G(x)$ in bezug auf $\Omega(G_1 \cdots G_\varrho)$ genügt. Dann läßt jedes Polynom aus $\mathfrak{K}_{n\varrho}$, insonderheit jedes Polynom $F(x)$ aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$, als algebraisch-ganze Größe die Darstellung zu:

$$(3) \qquad F(x) = \frac{\Gamma_1(G_i) \cdot G(x)^{k-1} + \Gamma_2(G_i) \cdot G(x)^{k-2} + \cdots + \Gamma_k(G_i)}{D(x)}.$$

Es durchlaufe nun $F(x)$ alle Polynome aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$; dann zeigt die Anwendung des Hilbertschen Theorems I von der Modulbasis (Math. Ann. 36) auf das aus den zugehörigen Funktionen $v_1 \Gamma_1(G_i) + v_2 \Gamma_2(G_i) + \cdots + v_k \Gamma_k(G_i)$ zu bildende System die Existenz einer endlichen Anzahl von Polynomen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$:

$$(4) \qquad F_1(x),\ F_2(x),\ \cdots,\ F_\lambda(x)$$

derart, daß jedes Polynom aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ eine Darstellung zuläßt:

$$(5) \qquad F(x) = A_1(G_i) F_1(x) + A_2(G_i) \cdot F_2(x) + \cdots + A_\lambda(G_i) F_\lambda(x),$$

wo $A_1 \cdots A_\lambda$ Polynome der $G_i(x)$ bedeuten. Die Polynome (2) und (4) bilden somit eine Integritätsbasis von $\mathfrak{S}_{n\varrho}$; d. h.

Satz VIII: *Existieren in einem Abbildungssystem $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ des Systems aus Polynomen $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ ϱ Polynome derart, daß die Resultante der Glieder höchster Dimension nicht identisch verschwindet — $R_0 \neq 0$ —, so besitzt $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ eine Integritätsbasis.*

Dieser Satz läßt noch eine leichte Verallgemeinerung zu. Es genügt, daß die ϱ Polynome (1), für die $R_0 \neq 0$, dem kleinsten $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ enthaltenden Integritätsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ angehören. In der Tat zeigen die zu Satz VIII führenden Schlüsse, daß auch dann noch die Darstellung (5) gilt. Nun läßt aber nach der Definition sich jedes Polynom $L(x)$ des kleinsten enthaltenden Integritätsbereichs $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ ganz und rational durch eine endliche Anzahl von — mit $L(x)$ sich ändernden — Polynomen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ darstellen, und es existieren somit σ Polynome aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$

$$(6) \qquad K_1(x),\ K_2(x),\ \cdots,\ K_\sigma(x)$$

derart, daß die Polynome $G_i(x)$ ganze rationale Verbindungen von (6) werden. Durch (6) und (4) ist somit eine Integritätsbasis gegeben. Unter Einführung von:

Definition VIII: *Ein System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ von Polynomen heißt regulär, wenn in einem Abbildungsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ des kleinsten enthaltenden Integritätsbereichs ϱ Polynome existieren derart, daß die Resultante der Glieder höchster Dimension nicht identisch verschwindet* — $R_0 \neq 0$ —

gilt somit:

Satz IX: *Jedes reguläre System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ aus Polynomen besitzt eine Integritätsbasis.**)

Wir geben noch, analog wie in § 5 für die Involution, eine geometrische Deutung der regulären Systeme. Dazu betrachten wir, wie dort in (7), das Gleichungssystem

$$(7) \qquad L^*(x) - L^*(\xi) = 0,$$

wobei $L^*(x)$ alle Polynome aus $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ durchlaufe. Homogenisiert man mittelst x_0, ξ_0, so möge (7) in das Gleichungssystem zwischen homogenen Formen übergehen:

$$(8) \qquad \xi_0^{\,m} \cdot M^*(x) - x_0^{\,m} \cdot M^*(\xi) = 0,$$

wobei, wenn $H^*(x)$ die Glieder höchster Dimension von $L^*(x)$ bezeichnet, die Beziehung besteht:

$$(9) \qquad H^*(x) \equiv M^*(x) \text{ mod. } x_0.$$

Als *Fundamentalpunkte* von $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ bezeichnen wir (vgl. § 5, Anmerkung) die von x unabhängigen — also von den zu x konjugierten Reihen verschiedenen — Lösungen von (8). Fundamentalpunkte sind also die von $\xi_1 = 0, \cdots, \xi_\varrho = 0$ verschiedenen Wertesysteme, für die gleichzeitig gilt:

$$\xi_0^{\,m} = 0, \quad M^*(\xi) = 0$$

oder wegen (9):

$$\xi_0 = 0, \quad H^*(\xi) = 0.$$

Existieren nun ϱ Formen $H^*(\xi)$, für die $R_0 \neq 0$, die also kein gemeinsames Lösungssystem besitzen, so kann $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ keinen Fundamentalpunkt besitzen. Besteht speziell $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ aus *homogenen* Formen, so kann bei $R_0 \neq 0$ auch $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ keinen Fundamentalpunkt besitzen, da dieser zugleich Funda-

---

*) Daß es *nichtreguläre* Systeme *ohne* Integritätsbasis gibt, hat Hilbert an einem Beispiel gezeigt (Gött. Nachr. 1891, S. 233). Noch etwas einfacher ist das folgende:

$$\mathfrak{S}_{22} = x_1,\ x_1 x_2,\ x_1 x_2^{\,2}, \cdots, x_1 x_2^{\,\nu} \cdots \text{ in inf.}$$

Die Existenz der Integritätsbasis wäre hier gleichbedeutend mit der Existenz einer ganzen positiven Zahl ν, so daß die Identitäten bestehen:

$$x_1 x_2^{\,\nu+\sigma} = \Sigma c \cdot x_1^{\,i_0} (x_1 x_2)^{i_1} (x_1 x_2)^{i_2} \cdots (x_1 x_2^{\,\nu})^{i_\nu}. \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots)$$

Das Vergleichen der Dimension in x_1, x_2 führt aber schon für $\sigma = 1$ zu den beiden Bedingungsgleichungen für die Exponenten:

$$\begin{aligned} 1 &= i_0 + i_1 + \ \ i_2 + \cdots + i_\nu, \\ \nu + 1 &= \qquad i_1 + 2 i_2 + \cdots + \nu \cdot i_\nu, \end{aligned}$$

die ersichtlich *keine* Lösung in nichtnegativen ganzen Zahlen haben. $\mathfrak{S}_{22}$ besitzt also keine Integritätsbasis.

mentalpunkt von $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ wäre. Es gilt aber auch das Umgekehrte. Dazu betrachten wir das aus der Gesamtheit der Formen $H^*(x)$ gebildete System $\mathfrak{J}(H^*)$, das wieder einen Integritätsbereich bildet.

Aus dem Hilbertschen Theorem I von der Modulbasis und dem Hilbertschen Hilfssatz (vgl. § 10, Zitat) folgt deshalb die Existenz von ϱ Formen aus $\mathfrak{J}(H^*)$, deren Verschwinden das Verschwinden aller Formen aus $\mathfrak{J}(H^*)$ zur Folge hat. Besitzt nun $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ keinen Fundamentalpunkt, so können diese ϱ Formen nicht gleichzeitig verschwinden, ihre Resultante $R_0 \neq 0$.

Es gilt also:

*Die regulären Systeme $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ aus Polynomen sind dadurch charakterisiert, daß ein Abbildungsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ des kleinsten enthaltenden Integritätsbereichs keinen Fundamentalpunkt besitzt. Bei regulären Systemen $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ aus homogenen Formen besitzt schon das System selbst keinen Fundamentalpunkt.**)

§ 13.

Beispiele von relativ-ganzen Bereichen erster Art und von regulären Systemen.

1. Als erstes Beispiel eines relativ-ganzen Bereichs erster Art $\mathfrak{G}_{nn}$ betrachten wir die *Gesamtheit der Polynome von $x_1 \cdots x_n$, die eine gegebene Permutationsgruppe G gestatten* — also die Gesamtheit der Polynome eines Lagrangeschen Gattungsbereiches. Da $x_1 \cdots x_n$ vermöge der Identität

$$(1) \qquad x_k^n - \sigma_1(x)x_k^{n-1} + \sigma_2(x)x_k^{n-2} + \cdots \pm \sigma_n(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

algebraisch ganz von den zu $\mathfrak{G}_{nn}$ gehörigen symmetrischen Elementarfunktionen, also nach Definition V algebraisch ganz von $\mathfrak{G}_{nn}$ abhängen, ist $\mathfrak{G}_{nn}$ *erster Art*. $\mathfrak{G}_{nn}$ bildet ferner als Bereich erster Art, da seine Elemente homogene Formen und $n = \varrho$ ist, (nach § 10 Schluß) ein reguläres System. In der Tat kann wegen (1) die Resultante R_0 der symmetrischen Elementarfunktionen nicht identisch verschwinden; R_0 berechnet sich nach den Rechnungsregeln der Resultantentheorie zu ± 1. Die *Involutionsform von $\mathfrak{G}_{nn}$* ist — da G_{nn} erster Art und $n = \varrho$ ist — eindeutig bestimmt als die *Involutionsform des zugehörigen Lagrangeschen Gattungsbereichs*. Da die zu $x_1 \cdots x_n$ in bezug auf diesen konjugierten

---

*) Das in der vorigen Anmerkung angegebene nichtreguläre System $\mathfrak{S}_{22}$ besitzt den Fundamentalpunkt:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_0 = 0 : 1 : 0.$$

Größen durch die Permutationen der Gruppe G entstehen, ist also diese Involutionsform gegeben durch

$$\Psi(z,u) = \prod_G (z - u_1 x_{i_1} - u_2 x_{i_2} - \cdots - u_n x_{i_n}) = \tag{2}$$
$$z^{\nu} + \Sigma' G_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_n}(x) z^{\alpha} u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}$$

wobei das Produkt über alle Permutationen von G zu erstrecken ist. (2) stellt die „Galoissche Form der Gruppe G“ dar, und es gilt also die Tatsache:

Alle Polynome von $x_1 \cdots x_n$, die eine Permutationsgruppe G gestatten, sind ganze rationale Verbindungen der Koeffizienten $G_{\alpha\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$ der Galoisschen Form der Gruppe.

2. Als Beispiel *regulärer Systeme* seien die *Systeme $\mathfrak{S}_{n1}$ aus Polynomen* betrachtet, also Systeme die nur *ein* algebraisch-unabhängiges Polynom enthalten.

In der Tat sei $\mathfrak{S}_{11}^*$ ein Abbildungssystem von $\mathfrak{S}_{n1}$ und

$$F^*(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k \qquad (a_0 \neq 0),$$

ein Polynom aus $\mathfrak{S}_{11}^*$, so wird

$$R_0 = a_0 \neq 0^*).\tag{3}$$

$\mathfrak{S}_{n1}$ ist also nach Definition VIII regulär und es gilt somit:

*Jedes System $\mathfrak{S}_{n1}$ aus Polynomen, insonderheit jedes System von unendlich vielen Polynomen einer Unbestimmten, besitzt eine Integritätsbasis.***)

3. Wir spezialisieren jetzt die Systeme $\mathfrak{S}_{n1}$ zu *relativ-ganzen Bereichen* $\mathfrak{G}_{n1}$, die als reguläre Systeme nach § 12 *relativ-ganze Bereiche erster Art* sind. Ihre Integritätsbasis ist also gegeben durch eine Involutionsbasis, die zugleich Involutionsbasis des kleinsten enthaltenden Körpers $\mathfrak{K}_{n1}$ ist. Nun ist nach § 6 eine beliebige Funktion der Involutionsbasis von $\mathfrak{K}_{n1}$ zugleich Minimalbasis — wir bezeichneten sie als Lürothsche Funktion des Körpers — und jede Funktion der Involutionsbasis hängt linear gebrochen von dieser Lürothschen Funktion ab. In unserem Fall wird die Lürothsche Funktion, da sie zu $\mathfrak{G}_{n1}$ gehört, ein Polynom; jedes weitere Polynom der Involutionsbasis hängt also *linear gebrochen* und wegen (3) *algebraisch ganz*, also *ganz und linear* von dieser Lürothschen Funktion $L(x)$ ab, die somit Integritätsbasis wird. Die Involutionsform von $\mathfrak{G}_{11}^*$ ergibt sich, noch ($u_1 = 1$) gesetzt, zu:

$$\Psi^*(z) = L^*(z) - L^*(x)$$

woraus wieder $L(x)$ als Integritätsbasis erhellt. Somit gilt:

*) Mertens, a. a. O. § 5.

**) Die einfachsten möglichen nichtregulären Systeme *ohne* Integritätsbasis sind also Systeme $\mathfrak{S}_{22}$. Daß solche tatsächlich existieren, zeigt das Hilbertsche und das in der Anmerkung zu § 12 gegebene Beispiel.

Die relativ-ganzen Bereiche $\mathfrak{G}_{n1}$ sind erster Art; ihre Integritätsbasis besteht aus einem Polynom, der Lürothschen Funktion des kleinsten enthaltenden Körpers.

4. Als Beispiel eines relativ-ganzen Bereichs $\mathfrak{G}_{n1}$ seien noch speziell die *ganzen rationalen projektiven Invarianten einer quadratischen Form von s Veränderlichen* erwähnt. In Übereinstimmung mit dem Vorhergehenden lassen sich dieselben bekanntlich als ganze rationale Verbindung der Determinante $|a_{ik}|$ der Form darstellen; und diese Determinante ist zugleich Lürothsche Funktion des zugehörigen Invariantenkörpers.

§ 14.

Systeme aus ganzzahligen Polynomen.

Die gewonnenen Basissätze sollen nun in bezug auf *Ganzzahligkeit* verschärft werden.

Der Koeffizientenbereich Ω sei daher im folgenden als (endlicher) algebraischer Zahlkörper angenommen; und es bezeichne $[\Omega]$ die Gesamtheit der *algebraisch-ganzen* Zahlen aus Ω, die wir kurz *ganze* Zahlen nennen wollen. Unter einem *ganzzahligen Polynom* sei ein Polynom mit Koeffizienten aus $[\Omega]$ verstanden; $F(x)$, $G(x)$, $\cdots$ sollen von jetzt an nur ganzzahlige Polynome bedeuten.

Wir betrachten in Analogie zu § 7 die verschiedenen Systeme aus ganzzahligen Polynomen:

Ein beliebiges System aus ganzzahligen Polynomen soll als *ganzzahliges System* $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ bezeichnet werden.

Die *ganzzahlige lineare Schar* $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ ist ein ganzzahliges System, das neben $F_1(x)$ und $F_2(x)$ stets auch $c_1F_1(x)+c_2F_2(x)$ enthält, wo c_1, c_2 beliebige ganze Zahlen aus $[\Omega]$.

Der *ganzzahlige Integritätsbereich* $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ ist eine ganzzahlige lineare Schar, die neben $F(x)$ und $G(x)$ stets auch $F(x)\cdot G(x)$ enthält.

Der *ganzzahlige relativ-ganze Bereich* $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ ist ein Integritätsbereich, der neben $F(x)$ und $G(x)$ — wo $G(x)\neq 0$ — stets dann und nur dann den Quotienten $F(x):G(x)$ enthält, wenn dieser Quotient ein ganzzahliges Polynom ist.

Entsprechend wie in § 7 besteht der *kleinste enthaltende ganzzahlige Integritätsbereich* $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ eines ganzzahligen Systems $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ aus allen Polynomen $H(x)$, die ganze rationale, ganzzahlige Verbindungen einer *endlichen* Anzahl von Polynomen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ sind;

der *kleinste enthaltende ganzzahlige relativ-ganze Bereich* $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ aus allen ganzzahligen Polynomen $H(x)$, die rationale Verbindungen einer endlichen Anzahl von Polynomen aus $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ sind.

Wir gehen nun zur Übertragung der Basissätze über. In bezug auf die Rationalbasis ist zu bemerken, daß die nur auf „Rationalem" beruhenden Begriffe des *Körpers, kleinsten enthaltenden Körpers* und der *Rationalbasis* keine Veränderung erfahren. Es läßt sich ferner das *Abbildungssystem* $\mathfrak{S}^*_{\varrho\varrho}$ eines ganzzahligen Systems $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ auf beliebig viele Arten wieder als ganzzahliges System wählen. Da auch bei der ganzzahligen linearen Schar die zur Anzahlbeschränkung führenden Schlüsse erhalten bleiben, so gilt:

Satz V'. *Jedes ganzzahlige System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ besitzt eine Rationalbasis; die Rationalbasis einer ganzzahligen linearen Schar $\mathfrak{L}_{n\varrho}$ läßt sich speziell so wählen, daß sie höchstens $\varrho + 1$ Polynome enthält.*

Wir untersuchen nun das Analogon zu der Involutionsbasis der Integritätsbereiche aus Polynomen (§ 8). Dazu ist der Satz über die *symmetrischen Funktionen von Größenreihen* in bezug auf *Ganzzahligkeit* zu erweitern durch den

Hilfssatz. *Die ganzen ganzzahligen symmetrischen Funktionen von n Größenreihen $(y\, z \cdots t)$:*

$$
(1) \qquad \begin{array}{c} y_1\; z_1 \cdots t_1, \\ y_2\; z_2 \cdots t_2, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ y_n\; z_n \cdots t_n \end{array}
$$

sind ganze ganzzahlige Funktionen einer endlichen Zahl unter ihnen; nämlich der symmetrischen Elementarfunktionen

$$
(2) \qquad \sigma_1(y), \sigma_2(y), \cdots, \sigma_n(y);\ \sigma_1(z), \sigma_2(z), \cdots, \sigma_n(z);\ \cdots;\ \sigma_1(t), \cdots, \sigma_n(t);
$$

und der Funktionen

$$
(3) \qquad \chi_1(y, z, \cdots, t), \cdots, \chi_k(y, z, \cdots, t),
$$

die algebraisch ganz und ganzzahlig von den Funktionen (2) *abhängen.*

In der Tat hängen die n Größen $y_1 \cdots y_n$ algebraisch ganz und ganzzahlig von $\sigma_1(y) \cdots \sigma_n(y)$ ab; entsprechendes gilt für $z_1 \cdots z_n$ in bezug auf $\sigma_1(z) \cdots \sigma_n(z)$ usw. Der Körper der symmetrischen Funktionen der Größenreihen (1) bildet also einen algebraischen Körper über dem durch die Funktionen (2) bestimmten Körper derart daß die algebraisch-ganzen und ganzzahligen Größen dieses Körpers identisch sind mit den ganzen ganzzahligen symmetrischen Funktionen der Größenreihen (1). Bestimmt man daher (3) als Kroneckersches Fundamentalsystem, so ist der Hilfssatz bewiesen.

Es sei nun $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ ein ganzzahliger Integritätsbereich, $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ ein ganzzahliger Abbildungsbereich und

$$
\Psi^*(z, u) = G^*(x) \cdot z^s + \Sigma' G^*_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_\varrho}(x) \cdot z^\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_\varrho^{\alpha_\varrho}
$$

eine Involutionsform von $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$; dabei kann $G^*(x)$ auch nullter Dimension, d. h. eine Zahl aus $[\Omega]$ sein. Die den Funktionen (2) entsprechenden symmetrischen Elementarfunktionen sind dann gegeben durch gewisse unter den Quotienten:

$$(4) \qquad G^*_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}(x) : G^*(x).$$

Da nach dem Hilfssatz die Funktionen (3) algebraisch ganz und ganzzahlig von (2) abhängen, so sind — nach der Erweiterung des Gaußschen Satzes auf Polynome mit algebraisch-ganzzahligen Koeffizienten — die (3) entsprechenden Funktionen aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ gegeben durch

$$(5) \qquad K_\lambda^*(x) : (G^*(x))^\sigma,$$

wo $K_\lambda^*(x)$ *ganzzahlige Polynome* aus $\mathfrak{K}^*_{\varrho\varrho}$ sind. $K_\lambda^*(x)$ gehören also, wenn es sich um relativ-ganze Bereiche handelt, dem Bereich an; sind im allgemeinen Quotienten von Polynomen aus $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$.

Ist nun $F^*(x)$ ein beliebiges ganzzahliges Polynom aus $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$, so hat man

$$F^*(x) = \frac{1}{i}\left(F^*(x) + F^*(x^{(1)}) + \cdots + F^*(x^{(i-1)})\right)$$

und es wird also $i \cdot F^*(x)$ eine ganze, ganzzahlige symmetrische Funktion der Größenreihen $x, x^{(1)}, \cdots, x^{(i-1)}$.

Nach dem Hilfssatz und dem Übertragungsprinzip gilt somit:

Satz VI'. *Für die ganzzahligen Integritätsbereiche $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ ist durch jede Involutionsform eine ausgezeichnete Rationalbasis bestimmt derart daß jedes Polynom $F(x)$ aus $\mathfrak{J}_{n\varrho}$ eine Darstellung zuläßt:*

$$F(x) = \frac{\Gamma(H(x), H_1(x), \cdots H_\alpha(x))}{i \cdot H(x)^k}$$

wo Γ eine ganze, ganzzahlige Funktion bedeutet. Für ganzzahlige relativganze Bereiche $\mathfrak{G}_{n\varrho}$, mit ganzzahligem relativ-ganzen Bereich $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ als Abbildungsbereich, ist der Nenner $H(x)$ durch den höchsten Koeffizienten der zugehörigen Involutionsform gegeben.

§ 15.

Ganzzahlige relativ-ganze Bereiche erster Art und reguläre Systeme.

An Stelle der Integritätsbasis tritt bei ganzzahligen Systemen die *ganzzahlige Integritätsbasis*, d. h. *eine endliche Anzahl von ganzzahligen Polynomen des Systems derart, daß jedes ganzzahlige Polynom des Systems sich als ganze ganzzahlige Verbindung dieser endlichen Anzahl darstellen läßt.*

Die Sätze über die ganzzahlige Integritätsbasis laufen den früheren im wesentlichen parallel, und nur die Beweise verlangen geringe Modifikationen.

Zunächst läßt sich die Definition V (§ 9) direkt übertragen.

Definition V′: *Eine Größe ξ heißt algebraisch-ganz und ganzzahlig in bezug auf den ganzzahligen relativ-ganzen Bereich $\mathfrak{G}_{n\varrho}$, wenn sie irgendeiner Gleichung genügt, deren höchster Koeffizient eine Einheit aus* $[\Omega]$, *deren übrige Polynome aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ sind.*

Die Erweiterung des Gaußschen Satzes auf Polynome mit algebraisch-ganzzahligen Koeffizienten zeigt nämlich wie in § 9, daß sich hieraus die Definition an der irreduzibeln Gleichung gewinnen läßt.

Aus der Definition V′ ergibt sich weiter die Übertragung von Definition VII.

Definition VII′: *Ein ganzzahliger relativ-ganzer Bereich $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ heißt erster Art, wenn er als Abbildungsbereich einen relativ-ganzen Bereich $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ besitzt derart, daß jedes beliebige ganzzahlige Polynom von $x_1 \cdots x_\varrho$ algebraisch-ganz und ganzzahlig von $\mathfrak{G}^*_{\varrho\varrho}$ abhängt.*

Um die Endlichkeit dieser Bereiche erster Art zu zeigen, bedenken wir vorerst, daß wie in § 10 aus der Definition folgt, daß der höchste Koeffizient der Involutionsform eine Einheit aus $[\Omega]$ ist.

Nach Satz VI′ (§ 14) läßt also jedes Polynom $F(x)$ aus $\mathfrak{G}_{n\varrho}$ eine Darstellung zu:

$$F(x) = \frac{\Gamma(H_1(x) \cdots H_\sigma(x))}{i}.$$

Wendet man hier auf das aus den ganzzahligen Polynomen $\Gamma(H_1 \cdots H_\sigma)$ gebildete System das — für ganze *rationale* Zahlkoeffizienten ausgesprochene — Hilbertsche Theorem II von der ganzzahligen Modulbasis (Math. Ann. 36) in seiner Ausdehnung auf algebraisch-ganzzahlige Polynome*) an, so erhellt daraus die Existenz der ganzzahligen Integritätsbasis, d. h.

Satz VII′: *Jeder ganzzahlige relativ-ganze Bereich erster Art besitzt eine ganzzahlige Integritätsbasis.*

Wir übertragen weiter die Definition der regulären Systeme:

Definition VIII′: *Ein ganzzahliges System $\mathfrak{S}_{n\varrho}$ heißt ganzzahlig-regulär, wenn in einem Abbildungsbereich $\mathfrak{J}^*_{\varrho\varrho}$ des kleinsten enthaltenden ganzzahligen Integritätsbereichs ϱ Polynome existieren derart, daß die Resultante der Glieder höchster Dimension eine Einheit aus* $[\Omega]$ *ist* — $R_0 = \varepsilon$.

*) Bezeichnet $w_1 \cdots w_k$ ein Fundamentalsystem der algebraisch-ganzen Zahlen aus Ω, und setzt man

$$\Gamma(H_1 \cdots H_\sigma) = \Gamma_1(H) w_1 + \cdots + \Gamma_k(H) w_k,$$

so haben $\Gamma_1(H) \cdots \Gamma_k(H)$ ganze *rationale* Zahlkoeffizienten. Die Anwendung des Theorems II auf das aus den Formen $v_1 \Gamma_1(H) + \cdots + v_k \Gamma_k(H)$ gebildete System zeigt unmittelbar die Gültigkeit der Ausdehnung.

Um den Existenzbeweis der Integritätsbasis zu übertragen, bemerken wir, daß der Hilfssatz des § 11 die folgende schärfere Fassung zuläßt —, die sich aus Gleichung (5) und (6) in § 11 und dem Umstand ergibt daß $A_1(\lambda)\cdots A_\tau(\lambda)$ ganze *ganzzahlige* Funktionen von $\lambda_1\cdots\lambda_\varrho$ sind:

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß jedes beliebige ganzzahlige Polynom von $x_1\cdots x_\varrho$ algebraisch-ganz und ganzzahlig von ϱ ganzzahligen Polynomen abhängt, ist, daß die Resultante der Glieder höchster Dimension dieser Polynome eine Einheit aus $[\Omega]$ *ist* — $R_0=\varepsilon$.

Aus diesem Hilfssatz folgt genau wie in § 12 für jedes Polynom $F(x)$ eines ganzzahlig-regulären Systems die Darstellung (3), § 12, wo nun $\Gamma_1(G_i)\cdots\Gamma_k(G_i)$ *ganzzahlige* Polynome der G_i sind. Und weiter ergibt wie in § 12 die Anwendung des Hilbertschen Theorems II (Math. Ann. 36) in seiner Ausdehnung auf algebraisch-ganzzahlige Polynome, verbunden mit der Definition des kleinsten enthaltenden ganzzahligen Integritätsbereichs, die Existenz der ganzzahligen Integritätsbasis; d. h.

Satz IX′: *Jedes ganzzahlig-reguläre System besitzt eine ganzzahlige Integritätsbasis.*

Als *Beispiel* eines *ganzzahligen, relativ-ganzen Bereichs erster Art* sei — in Analogie mit Beispiel 1 in § 13 — auf die Gesamtheit $\mathfrak{G}_{nn}$ der ganzzahligen Polynome eines Lagrangeschen Gattungsbereichs verwiesen. Daß $\mathfrak{G}_{nn}$ ganzzahlig-erster Art, ergibt sich aus der Identität:

$$x_k^n - \sigma_1(x)x_k^{n-1} + \cdots \pm \sigma_n(x) = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,n);$$

da die Resultante der symmetrischen Elementarfunktionen den Wert ± 1 hat, ist $\mathfrak{G}_{nn}$ auch ein ganzzahliges reguläres System.

Ein *weiteres Beispiel* ist nach dem Hilfssatz des § 14 durch die Gesamtheit der ganzen ganzzahligen symmetrischen Funktionen von n Größenreihen gegeben.

Erlangen, Mai 1914.

Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null.

Von

A. Wiman in Upsala.

1. Bezeichnet $G(z)$ eine transzendente Funktion endlicher Ordnung ϱ, so ist ϱ bekanntlich die kleinste Zahl, für welche, nach Vorgabe einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$, die Bedingung

$$|G(z)| < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

befriedigt wird, falls nur $|z| = r$ genügend groß gewählt wird. Handelt es sich überdies um ein kanonisches Produkt $G(z)$ von Primfunktionen, so hat diese Zahl ϱ noch die Eigenschaft, daß von den Reihen

$$\sum \frac{1}{r_n^{\varrho-\varepsilon}} \quad \text{bez.} \quad \sum \frac{1}{r_n^{\varrho+\varepsilon}}$$

erstere divergiert und letztere konvergiert, wobei $r_n = |a_n|$ ist, falls $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ die (von Null verschiedenen) Nullstellen nach steigenden absoluten Beträgen bedeuten.

Andererseits hat Herr Hadamard ein fundamentales Theorem bewiesen, nach welchem sich eine unendliche Folge von Zahlen $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_\lambda, \cdots$ bestimmen läßt, so daß $\lim_{\lambda=\infty} \bar{r}_\lambda = \infty$ und

$$|G(z)| > e^{-r^{\varrho+\varepsilon}}$$

für alle z von irgendeinem der Beträge $\bar{r}_\lambda$ ist.

Bei der Betrachtung der Funktion

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}\right) \qquad (0<\varrho<1) \tag{1}$$

bin ich zuerst auf die Vermutung gekommen, daß für $\varrho < \frac{1}{2}$ dieser Hadamardsche Satz durch die schärfere

$$|G(z)| > e^{r^{\varrho-\varepsilon}} \tag{2}$$

ersetzt werden kann*). Erst späterhin gelang es mir durch Benutzung eines inzwischen von Herrn Phragmén gefundenen Resultates diesen Satz zu beweisen**). Nachdem das zugrunde liegende Phragménsche Resultat durch neue schöne Untersuchungen der Herren Phragmén und Lindelöf verbessert worden war, gab sodann Herr Lindelöf einen vereinfachten Beweis***). Einen elementaren Beweis des von mir aufgestellten Satzes hat endlich Herr Wiener gegeben†). Unter den Verfassern, welche sich mit Ergänzungen des Satzes für den Fall $\varrho = 0$ beschäftigt haben, bemerken wir die Herren Littlewood und Valiron††).

Eine noch weitergehende Verschärfung des Hadamardschen Satzes ist aber aus meinen Resultaten bezüglich der asymptotischen Darstellung der Funktion (1) nahegelegt, welche für jede Ordnung $\varrho < 1$ Bedeutung hat. Bezeichnen nämlich $M(r)$ und $m(r)$ den Maximal- bez. Minimalbetrag der Funktion für $|z| = r$, so gibt es beliebig große r, für welche

$$m(r) > M(r)^{\cos \varrho\pi - \varepsilon} \tag{3}$$

ist. Eine Vermutung, daß (3) für jede ganze Funktion von einer Ordnung $\varrho < 1$ Gültigkeit hat, ist auch in der Tat von Herrn Littlewood ausgesprochen†††), wobei er, wie es scheint, eben von den Verhältnissen bei der speziellen Klasse von Funktionen (1) angeregt worden ist. Beweisen konnte jedoch Herr Littlewood nur die weniger weit gehende Ungleichung

$$m(r) > M(r)^{\cos 2\varrho\pi - \varepsilon} \qquad \left(\varrho < \frac{1}{2}\right),$$

welche für $\varrho \geqq \frac{1}{4}$ offenbar in (2) enthalten ist*†).

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns die Aufgabe gestellt, den vollständigen Littlewoodschen Satz zu beweisen. Es ist uns dies jetzt durch Benutzung einer Methode gelungen, vermittelst welcher wir anfänglich vergebens die Richtigkeit von (2) darzulegen versucht haben*††).

*) „Über die angenäherte Darstellung von ganzen Funktionen", Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 1 (1903), S. 105.

**) „Sur une extension d'un théorème de M. Hadamard", Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 2 (1905), Nr. 14.

***) „Sur un théorème de M. Hadamard dans la théorie des fonctions entières", Rend. del Circ. Mat. di Palermo 25 (1908), S. 228.

†) „Elementare Beiträge zur neueren Funktionentheorie", Diss. (Göttingen 1911).

††) Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functions, Lond. Mat. Soc. Proc. (2) V (1907), S. 361; Valiron, Sur les fonctions entières d'ordre nul, Math. Ann. 70 (1911), S. 471.

†††) „A general theorem on integral functions of finite order", Lond. Math. Soc. Proc. (2) VI (1907), S. 139.

*†) Bei irregulär wachsenden Funktionen kann man nicht ohne weiteres aus der etwa bewiesenen Gültigkeit von (3) die Richtigkeit von (2) erschließen.

*††) D. h. in der Hauptsache mit solchen elementaren Hilfsmitteln, welche dem Beweise des Herrn Wiener zugrunde liegen.

Eine fundamentale Rolle als Vergleichsfunktion wird dabei der Funktion (1) zuerteilt.

2. Zunächst ist festzustellen, daß der Satz für die Funktion (1) gilt. Dies ersieht man unmittelbar aus der früher von uns gegebenen asymptotischen Darstellung, wofür wir

$$(4)\qquad \frac{e^{\frac{\pi}{\sin\varrho\pi}z^{\varrho}}}{[2\pi z^{\varrho}]^{\frac{1}{2\varrho}}}$$

mit einem Ergänzungsfaktor von der Größenordnung $\frac{d}{r}$ erhalten haben, wobei d die kleinste Entfernung zwischen der Stelle z und einer Nullstelle $-n^{\frac{1}{\varrho}}$ bedeutet; letzterer Faktor hat sogar für $\lim r = \infty$ den Grenzwert 1, falls für $\frac{d}{r}$ eine endliche untere Grenze angenommen wird.

Wenn hier $z = r$ gesetzt wird, bekommt man offenbar $M(r)$, und ebenso $m(r)$ für $z = -r$. Man hat also

$$(5)\qquad \lim_{r=\infty} \frac{M(r)}{(2\pi)^{-\frac{1}{2\varrho}}\, r^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\pi}{\sin\varrho\pi}r^{\varrho}}} = 1.$$

Beschränkt man sich auf die ins Unendliche steigende Reihe

$$r = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho}},$$

so läßt sich auch $m(r)$ ohne wesentlichen Fehler mit dem Betrag von (4) gleichsetzen. Dies ist ohne Schwierigkeit aus den Entwicklungen in unserer zitierten Arbeit ersichtlich. Da wir aber dort einen solchen Schluß nicht gezogen haben, so möge der Beweis, doch nur für diesen besonderen Fall, hier reproduziert werden.

Es handelt sich um den Betrag von

$$\varphi(r) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{r}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right)$$

für $r = \left(N + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho}}$. Wir schreiben

$$\log|\varphi(r)| = \sum_{1}^{N} \log \frac{r}{n^{\frac{1}{\varrho}}} + \sum_{1}^{N} \log\left(1 - \frac{n^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)$$

$$+ \sum_{N+1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{r}{n^{\frac{1}{\varrho}}}\right) = A + B + C.$$

Sofort ergibt sich

$$A = \frac{N}{\varrho} \log\left(N + \tfrac{1}{2}\right) - \frac{1}{\varrho} \log \Gamma(N+1),$$

oder nach Benutzung der bekannten Annäherungsformel für die Γ-Funktion:

$$A = \frac{1}{\varrho} \log\left(N + \tfrac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\varrho} \log 2\pi N + \left[\frac{1}{N}\right],$$

wo $\left[\frac{1}{N}\right]$ ein Glied von der Größenordnung $\frac{1}{N}$ bedeutet. Dieses Resultat ist mit dem folgenden äquivalent:

(6) $$A = \frac{1}{\varrho} r^{\varrho} - \frac{1}{2\varrho} \log 2\pi r^{\varrho} + \left[\frac{1}{r^{\varrho}}\right].$$

Um nun $B + C$ abzuschätzen, betrachten wir zunächst die Integrale

$$J_1 + J_2 = \int_0^{r^{\varrho}} \log\left(1 - \frac{x^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right) dx + \int_{r^{\varrho}}^{\infty} \log\left(1 - \frac{r}{x^{\frac{1}{\varrho}}}\right) dx.$$

Machen wir hier die Substitution $\frac{x^{\frac{1}{\varrho}}}{r} = u$ bez. $\frac{r}{x^{\frac{1}{\varrho}}} = u$, so erhalten wir

$$J_1 + J_2 = \varrho r^{\varrho} \left[\int_0^1 u^{\varrho-1} \log(1-u)\, du + \int_0^1 u^{-\varrho-1} \log(1-u)\, du\right].$$

Durch Reihenentwicklung bekommen wir alsdann:

$$J_1 + J_2 = -\varrho r^{\varrho} \int_0^1 \sum_1^{\infty} \frac{u^{k+\varrho-1} + u^{k-\varrho-1}}{k}\, du$$

$$= -2\varrho r^{\varrho} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2 - \varrho^2},$$

oder bei Bezugnahme auf die Entwicklung von $\cos \varrho\varphi$ in eine trigonometrische Reihe für $\varphi = \pi$ *):

(7) $$J_1 + J_2 = r^{\varrho}\left[\pi \frac{\cos \varrho\pi}{\sin \varrho\pi} - \frac{1}{\varrho}\right].$$

Es ist leicht nachzuweisen, daß man

$$B + C > J_1 + J_2$$

hat. Man hat in der Tat

*) Oder auf die gewöhnliche Zerlegung von $\cot \varrho\pi$ in Partialbrüche.

$$(8_1)\qquad \int\limits_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{x^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)dx < \log\left(1-\frac{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right) \qquad (\nu \leqq N),$$

sowie auch

$$(8_2)\qquad \int\limits_{\nu-\frac{1}{2}}^{\nu+\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{r}{x^{\frac{1}{\varrho}}}\right)dx < \log\left(1-\frac{r}{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}\right) \qquad (\nu > N).$$

Dies ersieht man daraus, daß erstens für $0 < \delta \leqq \frac{1}{2}$, $\nu \leqq N$:

$$\left(1-\frac{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)^2 = 1 + \frac{\nu^{\frac{2}{\varrho}}}{r^2} - 2\frac{\nu^{\frac{1}{\varrho}}}{r} > \left(1-\frac{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)\left(1-\frac{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}{r}\right)$$

$$= 1 + \frac{(\nu^2-\delta^2)^{\frac{1}{\varrho}}}{r^2} - \frac{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}{r} - \frac{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}{r}.$$

Deriviert man $(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}} + (\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}$ nach δ, so bekommt man

$$\frac{1}{\varrho}\left[(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}-1} - (\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}-1}\right],$$

also eine positive Größe. Hieraus folgt

$$(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}} + (\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}} > 2\nu^{\frac{1}{\varrho}}.$$

Die Evidenz der obigen Ungleichung ist mithin dargelegt. Andererseits erschließt man die Richtigkeit von (8_2), indem man für $0 < \delta \leqq \frac{1}{2}$ den Ausdruck

$$\log\left(1-\frac{r}{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}\right) + \log\left(1-\frac{r}{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}\right)$$

nach δ deriviert. Man bekommt ja dann

$$-\frac{r}{\varrho}\left[\frac{1}{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}+1}\left(1-\frac{r}{(\nu-\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}\right)} - \frac{1}{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}+1}\left(1-\frac{r}{(\nu+\delta)^{\frac{1}{\varrho}}}\right)}\right],$$

welche Größe ja < 0 ist. Hiernach ergibt sich aus (6) und (7)

$$\log m(r) > \frac{\pi}{\sin\varrho\pi} r^{\varrho} \cos\varrho\pi - \frac{1}{2\varrho}\log 2\pi r^{\varrho} - \varepsilon.$$

Der wesentliche Faktor von $m(r)$ ist mithin

$$\frac{e^{\frac{\pi}{\sin\varrho\pi} r^{\varrho}\cos\varrho\pi}}{(2\pi)^{\frac{1}{2\varrho}} r^{\frac{1}{2}}}.$$

Vergleicht man mit (5), so bekommt man für $1 > \varrho_1 > \varrho$, wenn N genügend groß angenommen wird:

$$(9) \qquad m(r) > [M(r)]^{\cos\varrho_1\pi},$$

welche Relation offenbar mit (3) äquivalent ist.

3. Wir betrachten jetzt eine beliebige ganze transzendente Funktion $F(z)$ von einer Ordnung $\varrho < 1$. Es sei $F_1(z)$ die Funktion, welche aus $F(z)$ erhalten wird, wenn die Nullstellen mit gleichbleibenden absoluten Beträgen sämtlich auf die negative reelle Achse verlegt werden. Es bezeichne $M_1(r)$ bez. $m_1(r)$ den Maximal- bez. Minimalbetrag von $F_1(z)$. Dann hat man

$$M(r) \leqq M_1(r); \quad m(r) \geqq m_1(r).$$

Hieraus ist, in Übereinstimmung mit einer früheren Bemerkung von uns, ersichtlich, *daß* (3) *allgemein gilt, wenn der Beweis für solche Funktionen* $F(z)$ *ausgeführt werden kann, deren sämtliche Nullstellen auf der negativen reellen Achse liegen.* Auch ersieht man, daß es für die allgemeine Gültigkeit des Satzes von keiner Bedeutung ist, falls wir beim Beweise etwaige Nullstellen $z = 0$ weglassen, d. h. den Einfluß eines in $m(r)$ und $M(r)$ in gleicher Weise auftretenden Faktors r^k $(k > 0)$ nicht abschätzen. Überdies mag, da ein konstanter Faktor hier ohne Bedeutung ist, $F(0) = 1$ gesetzt werden.

Zunächst wollen wir eine geeignete Vergleichsfunktion $\overline{F}(z)$ konstruieren, für welche die Gültigkeit von (3) sich schon aus den Auseinandersetzungen der vorigen Nummer erschließen läßt. Dabei handelt es sich doch, wenn wir uns genau ausdrücken wollen, in verschiedenen Intervallen um verschiedene Vergleichsfunktionen. Für die Funktion $\overline{F}(z)$ habe $\overline{M}(r)$ bez. $\overline{m}(r)$ dieselbe Bedeutung wie $M(r)$ bez. $m(r)$ für $F(z)$. Die Bedingungen, welche die Hilfsfunktion erfüllen soll, seien die folgenden:

$$(10_1) \qquad m(r)\,M(r) > \overline{m}(r)\,\overline{M}(r);$$

$$(10_2) \qquad \frac{m(r)}{M(r)} > \frac{\overline{m}(r)}{\overline{M}(r)}.$$

Aus diesen folgt nämlich, falls

$$m(r) = [M(r)]^{\varkappa}$$

und

$$\overline{m}(r) = [\overline{M}(r)]^{\overline{\varkappa}}$$

gesetzt werden, bei Berücksichtigung von $\bar{\varkappa} > -1$,

(11) $$\varkappa > \bar{\varkappa}.$$

Betrachten wir nämlich die Möglichkeiten

$$\frac{m(r)}{[M(r)]^{\varkappa}} \gtreqless \frac{m(r)}{[\overline{M}(r)]^{\varkappa}}$$

für die verschiedenen u-Werte, so ist aus (10) ersichtlich, daß das Zeichen $>$ für $u = \pm 1$ gültig ist. Dasselbe muß dann für einen beliebigen Wert $1 > u > -1$ der Fall sein. Für das Zeichen $=$ hat man ja nur eine einzige reelle Lösung $u = u_0$, und dabei muß entweder $u_0 > 1$ oder $u_0 < -1$ sein, da offenbar die Zeichen $>$ und $<$ sich in irgendeiner Weise auf die Fälle $u > u_0$ und $u < u_0$ verteilen. Aus diesem Grunde ist

$$\frac{m(r)}{[M(r)]^{\bar{\varkappa}}} > \frac{\overline{m}(r)}{\overline{M}(r)^{\bar{\varkappa}}} = 1,$$

woraus sofort (11) folgt.

Das Produkt $m(r)$ zerlegen wir in zwei Teilprodukte $m_1(r)$ und $m_2(r)$, so daß in $m_1(r)$ die zu den Nullstellen gehörigen Faktoren auftreten, deren Beträge $< r$ sind, und die übrigen in $m_2(r)$. Nach demselben Grundsatze seien auch $M(r)$, $\overline{m}(r)$ und $\overline{M}(r)$ zerlegt. Wir werden die Vergleichsfunktion jedesmal so wählen, daß $F(z)$ und $\overline{F}(z)$ dieselbe Anzahl von Nullstellen besitzen, deren Beträge $< r$ sind. Überdies wollen wir den Teilprodukten die folgenden Bedingungen auferlegen:

(12₁) $$m_1(r) > \overline{m}_1(r); \quad M_1(r) > \overline{M}_1(r);$$

(12₂) $$m_2(r) > \overline{m}_2(r); \quad M_2(r) < \overline{M}_2(r).$$

Wir versuchen dann (10₁) und (10₂) schon für $m_1(r)$ und $m_2(r)$ usw. besonders zu befriedigen. Es wird dann von selbst je eine Bedingung auf Grund von (12) befriedigt. Was übrig bleibt, ist noch

(13₁) $$\frac{m_1(r)}{M_1(r)} > \frac{\overline{m}_1(r)}{\overline{M}_1(r)}$$

und

(13₂) $$m_2(r)\,M_2(r) > \overline{m}_2(r)\,\overline{M}_2(r)$$

zu erfüllen.

In welcher Weise wir bei der Konstruktion von $\overline{F}(z)$ auf die in (12) und (13) enthaltenen Bedingungen Bezug nehmen wollen, werden wir zunächst darlegen.

4. Wir werden zeigen, daß den weiteren Bedingungen von selbst genügt wird, falls wir nur die auf die Maximalbeträge bezüglichen Ungleichungen

$$M_1(r) > \overline{M}_1(r); \quad M_2(r) < \overline{M}_2(r)$$

in geeigneter Weise befriedigen. Ehe wir noch die Funktion $\overline{F}(z)$ endgültig fixieren, wollen wir nachweisen, von was für Umständen die in Aussicht gestellte Lösung unserer Aufgabe abhängt. Wir schreiben in Produktdarstellung

$$M(r) = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{a_\mu}\right) \qquad (a_\mu \leqq a_{\mu+1});$$

$$\overline{M}(r) = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{b_\mu}\right) \qquad (b_\mu \leqq b_{\mu+1}).$$

Hat man dann

$$a_n < r < a_{n+1}; \quad b_n < r < b_{n+1},$$

so ergibt sich

$$M_1(r) = \prod_{\mu=1}^{n}\left(\frac{r}{a_\mu} + 1\right); \quad M_2(r) = \prod_{\mu=n+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{a_\mu}\right);$$

$$\overline{M}_1(r) = \prod_{\mu=1}^{n}\left(\frac{r}{b_\mu} + 1\right); \quad \overline{M}_2(r) = \prod_{\mu=n+1}^{\infty}\left(1 + \frac{r}{b_\mu}\right).$$

Sämtlichen Anforderungen werden wir nun in der besonderen Weise genügen, daß, falls wir

$$M_1^{(\nu)}(r) = \prod_{\mu=n-\nu}^{n}\left(\frac{r}{a_\mu} + 1\right);$$

$$M_2^{(\nu)}(r) = \prod_{n+1}^{n+\nu}\left(1 + \frac{r}{a_\mu}\right)$$

schreiben, und in ähnlicher Weise die Produkte $\overline{M}_1^{(\nu)}(r)$, $\overline{M}_2^{(\nu)}(r)$ einführen, dafür Sorge getragen wird, daß man stets

$$(14_1) \qquad M_1^{(\nu)}(r) > \overline{M}_1^{(\nu)}(r) \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n);$$

$$(14_2) \qquad M_2^{(\nu)}(r) < \overline{M}_2^{(\nu)}(r) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \infty)$$

hat.

Was in (14_1) und (14_2) verlangt wird, läßt sich auch so formulieren. Setzt man

$$\frac{r}{a_\mu} + 1 = \left(\frac{r}{b_\mu} + 1\right)(1 + \varepsilon_\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n);$$

$$\left(1 + \frac{r}{a_\mu}\right)(1 + \delta_\mu) = \frac{r}{b_\mu} + 1 \qquad (\mu = n+1, \cdots, \infty),$$

so soll

$$(15_1) \qquad \prod_{\mu=0}^{\nu}(1 + \varepsilon_{n-\mu}) > 1 \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n);$$

$$(15_2)\qquad \prod_{\mu=1}^{\nu}(1+\delta_{n+\mu})>1 \qquad (\nu=1,2,\cdots,\infty)$$

sein. Wir bemerken, daß man für die eingeführten Größen

$$\varepsilon_\mu=\frac{r\left(\frac{1}{a_\mu}-\frac{1}{b_\mu}\right)}{\frac{r}{b_\mu}+1};$$

$$\delta_\mu=\frac{r\left(\frac{1}{b_\mu}-\frac{1}{a_\mu}\right)}{1+\frac{r}{a_\mu}}$$

bekommt.

Behufs der weiteren Entwicklungen werden wir auf die leicht zu beweisenden Ungleichungen

$$(16)\qquad \frac{\alpha}{1+\alpha}\leqq\log(1+\alpha)\leqq\alpha \qquad (\alpha>-1)$$

besonders Bezug nehmen. Nach diesem folgt aus den Systemen (15_1) und (15_2), welche wir bereits als erfüllt annehmen:

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\varepsilon_{n-\mu}>0;\quad \sum_{\mu=1}^{\nu}\delta_{n+\mu}>0.$$

Führen wir jetzt die für diese Größen gefundenen Ausdrücke ein, so läßt sich das Resultat in der folgenden Weise darstellen:

$$(17_1)\qquad \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\frac{1}{a_{n-\mu}}-\frac{1}{b_{n-\mu}}}{\frac{r}{b_{n-\mu}}+1}>0 \qquad (\nu=0,1,\cdots,n);$$

$$(17_2)\qquad \sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{\frac{1}{b_{n+\mu}}-\frac{1}{a_{n+\mu}}}{1+\frac{r}{a_{n+\mu}}}>0 \qquad (\nu=1,\cdots,\infty).$$

Was noch übrig bleibt, ist alles erledigt, falls wir nur, mit Benutzung der erhaltenen Ergebnisse, die Richtigkeit der beiden Systeme

$$(18_1)\qquad \frac{m_1^{(\nu)}(r)}{M_1^{(\nu)}(r)}>\frac{\overline{m}_1^{(\nu)}(r)}{\overline{M}_1^{(\nu)}(r)} \qquad (\nu=0,1,\cdots,n);$$

$$(18_2)\qquad m_2^{(\nu)}(r)\,M_2^{(\nu)}(r)>\overline{m}_2^{(\nu)}(r)\,\overline{M}_2^{(\nu)}(r) \qquad (\nu=1,2,\cdots,\infty)$$

nachweisen können. Hier machen wir ebenfalls eine Umformung in der folgenden Weise. Wir schreiben

$$\frac{\frac{r}{a_\mu}-1}{\frac{r}{a_\mu}+1}=\frac{\frac{r}{b_\mu}-1}{\frac{r}{b_\mu}+1}(1+\eta_\mu) \qquad (\mu=0,1,\cdots,n);$$

$$\left(1-\frac{r}{a_\mu}\right)\left(1+\frac{r}{a_\mu}\right)=\left(1-\frac{r}{b_\mu}\right)\left(1+\frac{r}{b_\mu}\right)(1+\vartheta_\mu)$$

$$(\mu=n+1,\cdots,\infty),$$

so daß also (18_1) und (18_2) durch

$$(19_1) \qquad \prod_{\mu=0}^{\nu}(1+\eta_{n-\mu})>1 \qquad (\nu=0,1,\cdots,n);$$

$$(19_2) \qquad \prod_{\mu=1}^{\nu}(1+\vartheta_{n+\mu})>1 \qquad (\nu=1,\cdots,\infty)$$

ersetzt werden. Es gilt zu untersuchen, inwieweit aus (17_1) und (17_2) auf (19_1) und (19_2) sich schließen läßt. Nach (16) weiß man, daß dies tatsächlich der Fall ist, wenn es gelingt, den Beweis für

$$(20) \qquad \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\eta_{n-\mu}}{1+\eta_{n-\mu}}>0; \quad \sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{\vartheta_{n+\mu}}{1+\vartheta_{n+\mu}}>0$$

zu erbringen. Nun hat man

$$\eta_\mu=\frac{2\left(\frac{r}{a_\mu}-\frac{r}{b_\mu}\right)}{\left(\frac{r}{a_\mu}+1\right)\left(\frac{r}{b_\mu}-1\right)};$$

$$\vartheta_\mu=\frac{\frac{r^2}{b_\mu^2}-\frac{r^2}{a_\mu^2}}{1-\frac{r^2}{b_\mu^2}}.$$

Was in (20) verlangt wird, läßt sich also, nach Einführung der zu den Größen η_μ und ϑ_μ gehörigen Ausdrücke, in der folgenden Weise schreiben:

$$(21_1) \qquad \sum_{\mu=0}^{\nu}\frac{\frac{1}{a_{n-\mu}}-\frac{1}{b_{n-\mu}}}{\left(\frac{r}{b_{n-\mu}}+1\right)\left(\frac{r}{a_{n-\mu}}-1\right)}>0 \qquad (\nu=0,1,\cdots,n);$$

$$(21_2) \qquad \sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{\frac{1}{b_{n+\mu}^2}-\frac{1}{a_{n+\mu}^2}}{1-\frac{r^2}{a_{n+\mu}^2}}>0 \qquad (\nu=1,\cdots,\infty).$$

Daß in der Tat die Systeme (21) nichts anderes als Folgerungen aus den Systemen (17) darstellen, läßt sich, wie wir sofort sehen werden, ohne Schwierigkeit nachweisen.

5. Hierbei kommt besonders in Betracht, daß die Glieder in (21_1) je aus den entsprechenden in (17_1) durch Hinzufügung des Faktors

$$\frac{1}{\dfrac{r}{a_{n-\mu}}-1}$$

erhalten werden, und daß man in gleicher Weise je durch Vermittlung des Faktors

$$\frac{\dfrac{1}{b_{n+\mu}}+\dfrac{1}{a_{n+\mu}}}{1-\dfrac{r}{a_{n+\mu}}}$$

von (17_2) nach (21_2) hinüberkommt. In beiden Fällen handelt es sich, wie man leicht sieht, um Faktoren, welche bei steigendem μ jedenfalls nicht zunehmen. Diese Tatsache genügt, wie aus dem folgenden allgemeinen Reihensatze, dessen Beweis sich äußerst einfach ausführen läßt, ersichtlich ist.

Man betrachte die beiden Reihensysteme

$$P_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \alpha_\mu \qquad (\nu = 0, 1, \cdots)$$

und

$$Q_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \lambda_\mu \alpha_\mu,$$

wobei die in Q_ν hinzutretenden Faktoren λ_μ positive mit μ nicht zunehmende Größen, also $\lambda_\mu \geqq \lambda_{\mu+1}$, bedeuten. Hat man dann jedesmal

$$P_\nu > 0,$$

so muß auch stets

$$Q_\nu > 0$$

sein.

Der Beweis folgt ganz einfach daraus, daß man

$$Q_\nu = \lambda_\nu P_\nu + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}) P_\mu$$

schreiben kann.

6. Jetzt haben wir zu zeigen, wie man die Konstruktion von Funktionen $\overline{F}(z)$ wirklich ausführen kann, so daß den fundamentalen Bedingungen (14_1) und (14_2) genügt wird; doch ist es dabei offenbar belanglos,

falls irgendwo das Zeichen $>$ durch $=$ ersetzt wird. Wir setzen voraus, daß $r > a_\lambda$ sein soll, wo λ eine beliebig große Zahl bedeutet. In solcher Weise wird dann auch r beliebig groß.

Wir betrachten für $1 > \varrho_1 > \varrho$ das Verhältnis

$$\frac{a_\mu}{\mu^{\frac{1}{\varrho_1}}} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \lambda).$$

Die zugehörige obere Grenze sei l. Wir fixieren dann die zu $\overline{F}(z)$ gehörigen Nullstellen durch

$$b_\mu = l\mu^{\frac{1}{\varrho_1}} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \infty).$$

Es folgt hieraus

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{b_\mu}{a_\mu} = 0.$$

Es sei n_2 die niedrigste Zahl mit der Eigenschaft, daß für $\mu > n_2$ stets $b_\mu < a_\mu$ ist. Andererseits sei n_1 die größte Zahl, so daß für $\mu \leqq n_1$ man ohne Ausnahme

$$b_\mu \geqq a_\mu$$

hat. Nach den Voraussetzungen ist $n_1 \geqq \lambda$.

Bezüglich der Lage von r ist zu zeigen, daß dieselbe sich zwischen b_{n_1} und b_{n_2+1} feststellen läßt. Um dann (14_1) und (14_2) zu befriedigen, genügt für $\mu \leqq n_1$ und $\mu > n_2$ schon der Vergleich der einzelnen Faktoren, da man ja unmittelbar findet

$$\frac{r}{a_\mu} + 1 \geqq \frac{r}{b_\mu} + 1 \qquad (\mu \leqq n_1);$$

$$1 + \frac{r}{a_\mu} < 1 + \frac{r}{b_\mu} \qquad (\mu > n_2).$$

Wir versuchen zunächst mit der Wahl

$$r = l\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho_1}}.$$

Ist $n_1 = n_2$, so ist die Sache hiermit schon erledigt. Anderenfalls hat man zu untersuchen, wie es sich mit den Möglichkeiten

$$\prod_{\varrho=1}^{\mu}\left(1 + \frac{r}{a_{n_1+\varrho}}\right) \gtreqqless \prod_{\varrho=1}^{\mu}\left(1 + \frac{r}{b_{n_1+\varrho}}\right) \qquad (\mu = 1, \cdots, n_2 - n_1)$$

verhält. Kommt hier nirgends das untere Zeichen vor, so sind sämtliche Grundbedingungen ebenfalls erfüllt. Wir nehmen aber an, daß es sich in so einfacher Weise nicht verhält, daß also das untere Zeichen zum ersten Male für $\mu = n_3 - n_1$ auftritt. Dann hat man offenbar immer

$$(22) \qquad \prod_{\varrho=0}^{\mu}\left(1+\frac{r}{a_{n_3-\varrho}}\right) > \prod_{\varrho=0}^{\mu}\left(1+\frac{r}{b_{n_3-\varrho}}\right)$$
$$(\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1).$$

Wie die Herleitung von (17_1) zeigt, folgt hieraus

$$(23) \qquad \sum_{\varrho=0}^{\mu}\frac{\dfrac{1}{a_{n_3-\varrho}}-\dfrac{1}{b_{n_3-\varrho}}}{1+\dfrac{r}{b_{n_3-\varrho}}} > 0 \qquad (\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1).$$

Wir wollen jetzt nachweisen, daß in den Ungleichungen (22) r durch jede Größe $R > r$ ersetzt werden darf. Bei dem Beweise dieser Tatsache werden wir sogar etwas mehr leisten. Schreiben wir nämlich

$$\frac{1+\dfrac{R}{a_{n_3-\varrho}}}{1+\dfrac{R}{b_{n_3-\varrho}}} = \frac{1+\dfrac{r}{a_{n_3-\varrho}}}{1+\dfrac{r}{b_{n_3-\varrho}}}\,(1+\delta_{n_3-\varrho}),$$

so wird sich herausstellen, daß man

$$(24) \qquad \prod_{\varrho=0}^{\mu}(1+\delta_{n_3-\varrho}) > 1 \qquad (\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1)$$

hat. Man bekommt ja

$$\delta_{n_3-\varrho} = \frac{(R-r)\left(\dfrac{1}{a_{n_3-\varrho}}-\dfrac{1}{b_{n_3-\varrho}}\right)}{\left(1+\dfrac{R}{b_{n_3-\varrho}}\right)\left(1+\dfrac{r}{a_{n_3-\varrho}}\right)},$$

und den Ungleichungen (24) wird genügt, falls sich beweisen läßt, daß

$$\sum_{\varrho=0}^{\mu}\frac{\delta_{n_3-\varrho}}{1+\delta_{n_3-\varrho}} > 0 \qquad (\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1)$$

ist. Nach Einführung der für die Größen $\delta_{n_3-\varrho}$ gegebenen Ausdrücke geht diese hinreichende Bedingung in

$$(25) \qquad \sum_{\varrho=0}^{\mu}\frac{\dfrac{1}{a_{n_3-\varrho}}-\dfrac{1}{b_{n_3-\varrho}}}{\left(1+\dfrac{R}{a_{n_3-\varrho}}\right)\left(1+\dfrac{r}{b_{n_3-\varrho}}\right)} > 0$$
$$(\mu=0,1,\cdots,n_3-n_1-1)$$

über. Vergleicht man jetzt (23) und (25), so entsprechen diese einander in solcher Weise, daß aus je einem Glied im ersteren System das zugehörige im letzteren System durch Hinzufügung eines Faktors

$$\frac{1}{1+\dfrac{R}{a_{n_3-\varrho}}}$$

erhalten wird. Da dieser Faktor mit ϱ nie zunimmt, so läßt sich, nach dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze, (25) als eine Folgerung aus (23) auffassen.

Für $n > n_3$ wird es ein erstes Mal, etwa für $n = n_4 + 1$, vorkommen, daß man $b_n < a_n$ erhält. Offenbar ist $n_4 \leqq n_2$. Wir versuchen dann mit einer neuen Wahl von r, indem wir

$$r = l\left(n_4 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\varrho_1}}$$

setzen. Hierdurch werden ja, wie aus den soeben gemachten Auseinandersetzungen folgt, die Bedingungen (14_1), ebenso wie bei der vorigen Wahl, von selbst erfüllt. Ist dasselbe auch hier nicht mit (14_2) der Fall, so machen wir noch einmal einen Schritt in derselben Weise, wie wir soeben von $n = n_1$ zu $n = n_4$ hinaufstiegen. Da man hier stets $n \leqq n_2$ erhält, so muß zuletzt auch den Bedingungen (14_2) Genüge geleistet werden; wenn nicht früher, so allenfalls für $n = n_2$.

Aus der Tatsache, daß r so gewählt werden kann, daß die Anzahl n der Nullstellen, deren Beträge $< r$ sind, beliebig groß wird, und aus den in der 2. Nummer dargelegten Eigenschaften der Funktion $\overline{F}(z)$ folgt jetzt, da $\varrho_1 - \varrho$ beliebig klein gewählt werden kann, unser Hauptsatz (3).

7. Noch genauere Resultate kann man erhalten, wenn man den von Herrn Lindelöf verallgemeinerten Ordnungsbegriff einführt. Dabei wird es nötig, besondere Abschätzungen von Funktionen wie

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n^{\frac{1}{\varrho}}(\log n)^{\alpha_1}}\right)$$

auszuführen. Im Falle $\varrho = \frac{1}{2}$ und $\alpha_1 > 0$ ergibt sich für diese Vergleichsfunktion, und mithin auch für gewisse allgemeine Funktionenklassen von der Ordnung $\varrho = \frac{1}{2}$, daß der Minimalbetrag für beliebig große r

$$> e^{r^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$$

wird, so daß also Übereinstimmung mit den Funktionen von einer Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ eintritt.

Der Fall der ganzen Funktionen von der Höhe 0 und der Ordnung 1 läßt sich jetzt auch behandeln. Die Resultate, welche sich dann herleiten lassen, erlauben den folgenden allgemeinen Satz aufzustellen:

Es sei eine beliebige ganze Funktion von der Höhe 0 *und der Ordnung* ϱ $(1 \geqq \varrho)$ *gegeben. Dann läßt sich für* r *eine unendliche Folge*

$$r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots \qquad (\lim_{n=\infty} r_n = \infty)$$

aufstellen, so daß die Ungleichung

$$m(r)\, M(r) > e^{r^{\varrho - \varepsilon}}$$

bestätigt wird.

Auf den Beweis der in dieser Nummer mitgeteilten Sätze verzichten wir hier.

Upsala, 11. Februar 1914.

Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellem Teil $\frac{1}{2}$.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Zu den bedeutendsten Fortschritten der Mathematik aus der letzten Zeit gehört die Note von Herrn G. H. Hardy *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann**). Herr Hardy beweist in dieser Note, daß $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Wurzeln besitzt. Vordem war diesbezüglich nur bekannt:

1. Durch Herrn Gram**), daß $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ mindestens sechs Wurzeln besitzt.

2. Durch Herrn de la Vallée Poussin***), daß die sechs ersten (d. h. absolut kleinste Ordinate besitzenden) „nicht-trivialen" (d. h. von -2, -4, $-6, \cdots$ verschiedenen, d. h. dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehörigen) Wurzeln den reellen Teil $\frac{1}{2}$ haben.

3. Durch Herrn Gram†) die Existenz von weiteren 24 Nullstellen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$.

4. Durch Herrn Backlund††), daß die ersten 58 nicht-trivialen

*) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 158 (1914), S. 1012—1014.

**) Gram 4 in der Numerierung meines *Handbuchs der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin (1909).

***) De la Vallée Poussin 9.

†) Gram 6. Auf anderem Wege hatte etwa gleichzeitig Herr Lindelöf (2, 3) die Existenz von insgesamt 20 Nullstellen auf der Geraden bewiesen.

††) *Einige numerische Rechnungen die Nullpunkte der Riemann'schen ζ-Funktion betreffend* [Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar, 54 (1911—1912), Abt. A, Nr. 3, 7 S.].

Wurzeln, nämlich alle mit Ordinate zwischen -100 und $+100$, die Abszisse $\frac{1}{2}$ haben.

Es lag nun natürlich nahe zu fragen, ob bzw. in welchem Umfange die Hardysche Beweismethode geeignet ist, Licht auf die „nicht-trivialen"*) Nullstellen der unendlich vielen Funktionen

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

zu werfen, wo k eine positive ganze Zahl und $\chi(n)$ ein Charakter modulo k ist. Bekanntlich**) hat jedes $L(s)$ die Gestalt

$$L(s) = \prod_{\nu=1}^{c} \left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu^s}\right) \cdot L_0(s),$$

wo für $c = 0$ das Produkt 1 bedeutet, für $c > 0$ die p_ν Primzahlen, die ε_ν Einheitswurzeln sind, und $L_0(s)$ die einem sogenannten eigentlichen Charakter $\chi_0(n)$ modulo eines k_0/k entsprechende Funktion

$$L_0(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n)}{n^s}$$

ist. Hierbei ist beim Hauptcharakter $\chi(n)$ das $L_0(s) = \zeta(s)$, also nichts Neues zu bemerken; bei jedem anderen Charakter $\chi(n)$ entspricht das $L_0(s)$ einem Nicht-Hauptcharakter modulo k_0. Mit anderen Worten: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf das gegebene $\chi(n)$ als eigentlicher Nicht-Hauptcharakter modulo k (und somit dies $k > 2$) angenommen werden. Alsdann hat $L(s)$ bekanntlich***) im Falle $\chi(-1) = 1$ die einfachen Wurzeln $0, -2, -4, \cdots, -2q, \cdots$; im Falle $\chi(-1) = -1$ die einfachen Wurzeln $-1, -3, -5, \cdots, -(2q+1), \cdots$; in beiden Fällen außerdem nur noch unendlich viele†) (die „nicht-trivialen") Wurzeln im Streifen $0 < \sigma < 1$. Herr J. Großmann††) hat für einige dieser L-Funktionen bewiesen, daß ihre ersten nicht-trivialen Nullstellen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen.

Was liefert nun die Hardysche Methode? Es zeigt sich, daß sie nicht allgemein anwendbar ist. Genaueres werde ich, nachdem ich in § 1 den

---

*) Was das heißt, wird sofort erläutert werden.

**) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 482—483.

***) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 498.

†) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 507.

††) *Über die Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion und der Dirichletschen L-Funktionen* [Inauguraldissertation, Göttingen (1913)].

Hardyschen Beweis für $\zeta(s)$ (unter Einfügung der dort mit Recht dem Leser überlassenen Zwischenüberlegungen) reproduziert haben werde, im § 2 ausführen. Übrigens führt der Ansatz im Falle $\chi(-1)=1$ bei ungeradem k und im Falle $\chi(-1)=-1$ ausnahmslos zum Ziele. Ich freue mich aber sehr, daß er im Falle $\chi(-1)=1$ bei geradem k versagte. Denn die Notwendigkeit, die Methode zu modifizieren, ergab mir zugleich eine große Vereinfachung des Hardyschen Beweises für $\zeta(s)$. Zwei wesentliche Stützen seines (indirekten) Beweises wird man in den §§ 3—4 eliminiert sehen. Erstens die $2p$-fache Differentiation des Integrals nach dem Parameter α, welche bei Herrn Hardy nur für große p einen Widerspruch ergab, den ich beim Integral selbst $(p=0)$ konstatiere. Zweitens seine feineren Hilfsbetrachtungen über den Limes der Thetafunktion bei Annäherung an den Rand des Konvergenzgebietes, die ich durch primitivste Majorantenabschätzungen ersetze. Übrigens rede ich im § 3 nur von der erstgenannten Vereinfachung, was zugleich dem Leser schon einen neuen Beweis des Hardyschen Satzes gibt. Im § 4 mache ich die zweitgenannte Vereinfachung gleichzeitig für $\zeta(s)$ und die $L(s)$, so daß dieser § 4 zugleich den Beweis bei $\zeta(s)$ noch vereinfacht und zum ersten Male für jedes $L(s)$ die Existenz unendlich vieler Wurzeln auf der Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$, sogar auf jeder der beiden Halbgeraden liefert.

Im § 5 werde ich bei $\zeta(s)$ und den $L(s)$ zeigen, daß die vorangegangene Beweismethode auch dahin umgearbeitet werden kann, daß sie die Anzahl $M(T)$ der Nullstellen auf der Strecke $\frac{1}{2}$ (exkl.) bis $\frac{1}{2}+Ti$ (inkl.), welche nach § 4 mit T unendlich wird, nach unten durch eine bestimmte Vergleichsfunktion aus der üblichen Skala, nämlich $\log\log T$, abzuschätzen gestattet.

In § 6 werde ich für eine Klasse von Funktionen, bei der man bisher noch nicht einmal die Vermutung auszusprechen wagte, daß die Mittellinie des sogenannten kritischen Streifens unendlich viele Wurzeln enthält, dies als Tatsache beweisen. Z. B. für die durch

$$\sum_{a,b,c=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^s} \qquad (\text{ohne } a=b=c=0)$$

definierte Funktion und die Gerade $\sigma=\frac{3}{4}$.

Ich bemerke noch, daß ich dem, was ich über $\zeta(s)$ zu sagen habe, kein sehr großes Gewicht beilege. Wenn jemand zuerst eine bedeutende Entdeckung gemacht hat, kommen oft andere und machen es einfacher. Ich publiziere eben die Sache hier so ausführlich deshalb, weil die abgeänderte Methode für die $L(s)$ und weitere Funktionen zum Ziele führt.

§ 1.

Der Hardysche Beweis für die Zetafunktion.

1. *Hilfssatz: Es sei* $\varkappa > 0$, $\Re(y) > 0$. *Es bedeute* $\log y$ *den Wert* $\log|y| + i \operatorname{arc} y$ *mit* $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc} y < \frac{\pi}{2}$; *es bedeute* y^{-s} *den Wert* $e^{-s\log y}$. *Dann ist*

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-\infty i}^{\varkappa+\infty i} \Gamma(s) y^{-s}\, ds.$$

Beweis:*) Es sei $q > 0$ und ganz. Bei Integration über das Rechteck mit den Ecken $\frac{1}{2}-q-Ui$, $\varkappa-Ui$, $\varkappa+Ti$, $\frac{1}{2}-q+Ti$ $(T>0,\ U>0)$ ergibt sich, weil $\Gamma(s)$ im Pol erster Ordnung $-\nu(\nu \geqq 0)$ das Residuum $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ hat,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-Ui}^{\varkappa+Ti}\Gamma(s)y^{-s}ds = \sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}y^\nu + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-Ui}^{\frac{1}{2}-q-Ui} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-q-Ui}^{\frac{1}{2}-q+Ti} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-q+Ti}^{\varkappa+Ti}.$$

Ich behaupte, daß jedes der beiden vertikalen Integrale, also das auf der linken Seite und das vorletzte rechts für $T=\infty$, $U=\infty$ einen Limes hat, und daß die beiden horizontalen Integrale hierbei den Limes 0 haben. Bekanntlich**) ist in jedem Streifen endlicher Breite $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmäßig

$$\Gamma(s) = \Gamma(\sigma+ti) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^c\right) \qquad (c=c(\sigma_1,\sigma_2));$$

ebenso ist in jedem solchen Streifen

$$|y^{-s}| = |e^{-(\sigma+ti)(\log|y|+i\operatorname{arc} y)}| = e^{-\sigma\log|y|+t\operatorname{arc} y} < c_1 e^{|t|\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}$$

$$(c_1 = c_1(\sigma_1,\sigma_2,y),\ \varepsilon=\varepsilon(y)>0).$$

Für $\frac{1}{2}-q \leqq \sigma \leqq \varkappa$ ist daher gleichmäßig

$$\Gamma(s)y^{-s} = O(e^{-\varepsilon|t|}|t|^c),$$

*) Dieser Beweis ist nur die Zusammenstellung der Schlüsse auf S. 315—316 (reelle y) und S. 318—319 (Übergang zu komplexen y) der Mellinschen Abhandlung *Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen* [Math. Ann. 68 (1910), S. 305—337].

**) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 770.

woraus das behauptete Verhalten der vier Integrale folgt. Daher ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-\infty i}^{\varkappa+\infty i}\Gamma(s)y^{-s}\,ds-\sum_{\nu=0}^{q-1}\frac{(-1)^\nu}{\nu!}y^\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-q-\infty i}^{\frac{1}{2}-q+\infty i}\Gamma(s)y^{-s}\,ds.$$

Der Hilfssatz wird also bewiesen sein, wenn

$$\lim_{q=\infty}\int_{\frac{1}{2}-q-\infty i}^{\frac{1}{2}-q+\infty i}\Gamma(s)y^{-s}\,ds=0$$

gezeigt wird. In der Tat ist

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-q+ti\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+ti\right)}{\left(\frac{1}{2}+ti-1\right)\left(\frac{1}{2}+ti-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+ti-q\right)},$$

also unterwegs

$$|\Gamma(s)y^{-s}|\leqq\frac{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2q-1}{2}}|y|^{q-\frac{1}{2}}e^{|t|\,|\operatorname{arc}y|}$$

und daher

$$\left|\int_{\frac{1}{2}-q-\infty i}^{\frac{1}{2}-q+\infty i}\Gamma(s)\,y^{-s}\,ds\right|\leqq\frac{|y|^{q-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2q-1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|e^{|t|\,|\operatorname{arc}y|}\,dt,$$

wo das wegen $|\operatorname{arc} y|<\frac{\pi}{2}$ konvergente Integral von q frei ist, so daß die rechte Seite bei $q\to\infty$ gegen 0 strebt.

2. *Mellinsche Darstellung der Thetareihe durch die Zetafunktion*):* *Für* $\Re(y)>0$ *ist*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2y}=1+\sqrt{\frac{\pi}{y}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}+\infty i}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)y^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\,ds.$$

Beweis: Nach dem Hilfssatz ist für $\varkappa>0$, $\Re(y)>0$ und jedes ganze $n>0$

$$e^{-n^2y}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-\infty i}^{\varkappa+\infty i}\Gamma(s)y^{-s}n^{-2s}\,ds.$$

*) Mellin 1, S. 39—40.

Dies darf für $\varkappa > \frac{1}{2}$ rechts unter dem Integralzeichen über alle ganzen positiven n summiert werden, da

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Gamma(s) y^{-s} n^{-2s}| = |\Gamma(\varkappa + ti)| \, |y^{-(\varkappa+ti)}| \zeta(2\varkappa) = O(e^{-\varepsilon|t|}|t|^c) \qquad (\varepsilon > 0)$$

ist. Daher ist (ich setze $\varkappa = 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \zeta(2s) \, ds.$$

Nun werde der Cauchysche Satz auf das Rechteck mit den Ecken $\frac{1}{4} - Ui$, $1 - Ui$, $1 + Ti$, $\frac{1}{4} + Ti$ $(T > 0, \; U > 0)$ angewendet. Der Pol $s = \frac{1}{2}$ liefert das Residuum

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) y^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}}.$$

Das Integral über die linke Vertikalseite hat für $T = \infty$, $U = \infty$ einen Limes und die beiden horizontalen Integrale den Limes 0, da bekanntlich*) in jedem festen Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$

$$\zeta(2s) = O(|t|^b) \qquad (b = b(\sigma_1, \sigma_2)),$$

also

$$\Gamma(s) y^{-s} \zeta(2s) = O(e^{-\delta|t|}) \qquad (\delta > 0)$$

ist. Somit ergibt sich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 y} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 y} = 1 + \sqrt{\frac{\pi}{y}} + \frac{1}{\pi i} \int_{\frac{1}{4}-\infty i}^{\frac{1}{4}+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} \zeta(2s) \, ds$$

$$= 1 + \sqrt{\frac{\pi}{y}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}+\infty i} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) y^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) \, ds.$$

3. ***Einführung von $\varrho(t)$ statt $\zeta(s)$.*** Nach Riemann**) ist die Funktion

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s) = \eta(s)$$

---

*) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 813.

**) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 284.

bis auf die Pole erster Ordnung $s=0$, $s=1$ regulär und genügt der Funktionalgleichung

$$\eta(1-s)=\eta(s),$$

weshalb

$$\eta\left(\frac{1}{2}+ti\right)=\varrho(t)$$

eine für reelle t reelle, gerade Funktion ist und genau die (nach Riemanns Vermutung sämtlich reellen) t zu Wurzeln hat, für welche $s=\frac{1}{2}+ti$ eine nicht triviale Nullstelle von $\zeta(s)$ ist*). Der Hardysche Satz besagt demgemäß, daß $\varrho(t)$ oberhalb jedes positiven t wieder einmal verschwindet.

Die Einführung von $\varrho(t)$ an Stelle von $\zeta(s)$ in das letzte Integral ergibt

$$\int\limits_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}+\infty i}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)y^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\,ds=\int\limits_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}+\infty i}\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{s}{2}}\eta(s)\,ds=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{t}{2}i}\varrho(t)\,dt;$$

daher ist

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{t}{2}i}\varrho(t)\,dt=-1-\sqrt{\frac{\pi}{y}}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2y}.$$

Herr Hardy setzt nun hierin

$$y=\pi e^{2\alpha i},\qquad -\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4},$$

was

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\alpha i}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha t}\varrho(t)\,dt=-1-e^{-\alpha i}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi e^{2\alpha i}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha t}\varrho(t)\,dt=-4\pi\cos\frac{\alpha}{2}+2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi e^{2\alpha i}}$$

ergibt, und er differentiiert jetzt $2p$ Male nach dem Parameter α; was links unter dem Integralzeichen erlaubt ist, da

$$\varrho(t)=O\left(e^{-\frac{\pi}{4}|t|}|t|^{a}\right)$$

ist, also

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha t}t^{2p}\varrho(t)\,dt=\int\limits_{0}^{\infty}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})t^{2p}\varrho(t)\,dt$$

---

*) In den Bezeichnungen des *Handbuchs* ist $\varrho(t)=\dfrac{-2\Xi(t)}{\frac{1}{4}+t^2}$. Ich verändere von jetzt ab gegenüber dem Hardyschen Original nur die Bezeichnung.

für jedes $p \geqq 0$ auf der Strecke $-\frac{\pi}{4}+\delta < \alpha < \frac{\pi}{4}-\delta$ $\left(\frac{\pi}{4} > \delta > 0\right)$ gleichmäßig konvergiert. Dadurch entsteht

$$\int_0^\infty (e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}) t^{2p} \varrho(t)\, dt = -4\pi \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cos\frac{\alpha}{2} + \frac{d^{2p}}{d\alpha^{2p}}\left(2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi e^{2\alpha i}}\right).$$

4. *Limes der abgeleiteten Thetareihe.* Herr Hardy beweist nun für $\alpha \to \frac{\pi}{4}$

$$\frac{d^{2p}}{d\alpha^{2p}}\left(2\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi e^{2\alpha i}}\right) \to 0$$

bei jedem $p \geqq 0$. Hierzu braucht offenbar nur bei jedem $q \geqq 0$

$$\frac{d^q}{d\alpha^q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi e^{2\alpha i}} \to 0$$

bewiesen zu werden. Herr Hardy*) zeigt dies mit Hilfe der Theorie der Zetafunktion selbst. Aus der Lehre von den Thetareihen ergibt sich leicht folgender andere Beweis, der sogar nur eine zufällig im *Handbuch***) entwickelte Formel benutzt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi z} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{z}} \qquad (\Re(z) > 0).$$

Nach dieser Formel ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi z} &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi z} + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\cdot 4z} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{z}} + \frac{2}{\sqrt{4z}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{4z}} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{z}} + \frac{2}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{4z}},\end{aligned}$$

also die q^{te} Ableitung nach z von der Form

$$\frac{d^q}{dz^q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi z} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{a_\nu}{(\sqrt{z})^{b_\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{c_\nu} e^{-\frac{n^2\pi}{z \text{ oder } 4z}};$$

---

*) In der Hardyschen Note ist auf S. 1013, Z. 12 der sinnstörende Schreibfehler $2p$ statt p, $4p$ statt $2p$, wie ich auf seinen Wunsch erwähne.

**) S. 277. Dort ist die Formel für $z > 0$ bewiesen, gilt also (wegen der gleichmäßigen Konvergenz beider Summen für $\delta_1 < \Re(z) < \delta_2$, $|\Im(z)| < \delta_3$, wo $\delta_2 > \delta_1 > 0$, $\delta_3 > 0$ ist) in der Halbebene $\Re(z) > 0$.

jedes der endlich vielen (m) Glieder rechts strebt im Winkelraum $z = re^{\varphi i}$, $\cos\varphi > \delta$, wo $\delta > 0$ ist, mit r gegen 0, wie aus der für $0 < r < 1$ gültigen Abschätzung

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^{c_\nu} e^{-\frac{n^2\pi}{z \text{ oder } 4z}}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{c_\nu} e^{-\frac{n^2\pi\cos\varphi}{4r}} < \sum_{n=1}^{\infty} n^{c_\nu} e^{-\frac{n^2\pi\delta}{8r}} e^{-\frac{n^2\pi\delta}{8r}}$$

$$< e^{-\frac{\pi\delta}{8r}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{c_\nu} e^{-\frac{n^2\pi\delta}{8}}$$

hervorgeht. Daher ist, wenn u auf dem Halbkreis $u = e^{2\alpha i}$, $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ gegen i rückt (wobei, weil der Halbkreis senkrecht auf der Achse des Imaginären steht, $z = u - i$ in einem Winkelraum obiger Art gegen 0 geht),

$$\frac{d^l}{du^l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi u} = \frac{d^l}{dz^l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi z} \to 0.$$

Die Funktion $u = e^{2\alpha i}$ mit allen ihren Ableitungen nach α hat für $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ einen Limes; daher ist, wie gewünscht,

$$\frac{d^l}{d\alpha^l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi e^{2\alpha i}} \to 0.$$

Die Identität am Schluß der Nr. 3 liefert also für $\alpha \to \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\infty} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})\, t^{2p} \varrho(t)\, dt \to -4\pi \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cos\frac{\pi}{8}.$$

5. *Indirekter Beweis.* Behauptet wird, daß $\varrho(t)$ für positive t immer wieder einmal 0 ist; gleichzeitig wird sich ergeben, daß $\varrho(t)$ immer wieder einmal sowohl < 0 als auch > 0 ist, also $\zeta(s)$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Wurzeln ungerader Ordnung hat.

Es sei im Gegenteil $\varrho(t)$ für alle $t \geqq T$, wo $T > 1$ ist, entweder $\geqq 0$ oder $\leqq 0$.

Dann müßte

$$\int_0^{\infty} \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} \varrho(t)\, dt$$

konvergieren*). (Denn anderenfalls würde

$$\int_T^\infty \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} |\varrho(t)|\, dt$$

divergieren, also zu jedem $\omega > 0$ ein $U = U(\omega)$ vorhanden sein, so daß

$$\int_T^U \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} |\varrho(t)|\, dt \geqq 2\omega$$

ist. Für $\frac{\pi}{4} - \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \varepsilon(\omega) < \alpha < \frac{\pi}{4}$ wäre also

$$\int_T^\infty (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) t^{2p} |\varrho(t)|\, dt > \int_T^U (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) t^{2p} |\varrho(t)|\, dt > \omega;$$

folglich wäre

$$\int_0^\infty (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) t^{2p} \varrho(t)\, dt$$

$$= \int_0^T (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) t^{2p} \varrho(t)\, dt \pm \int_T^\infty (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) t^{2p} |\varrho(t)|\, dt \rightarrow \pm \infty.)$$

Weil $e^z + e^{-z}$ mit wachsendem $z > 0$ wächst, ergäbe sich alsdann die gleichmäßige Konvergenz von

$$\int_0^\infty (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) t^{2p} \varrho(t)\, dt$$

für $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{4}$, also

$$-4\pi \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cos\frac{\pi}{8} = \lim_{\alpha = \frac{\pi}{4}} \int_0^\infty (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) t^{2p} \varrho(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} \varrho(t)\, dt.$$

Nun ist offenbar

$$\left| \int_0^T \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} \varrho(t)\, dt \right| < KT^{2p},$$

---

*) Herr Bouliguine [*Sur une propriété de la fonction* $\xi(t)$ *de Riemann*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 158 (1914), S. 1666—1667] legt hier irgend einen falschen Gedankengang zugrunde, indem er behauptet, Herr Hardy habe die Konvergenz des Integrals bewiesen. Herr Hardy hat sie nur unter der Annahme der Falschheit des „Hardyschen Satzes" erhalten.

wo K von p unabhängig ist; im Falle $\varrho(t) \geqq 0$ (für $t \geqq T$) wäre also bei geradem p

$$0 < \int_T^\infty \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} \varrho(t)\, dt < -\int_0^T < K T^{2p};$$

im Falle $\varrho(t) \leqq 0$ (für $t \geqq T$) bei ungeradem p

$$0 > \int_T^\infty \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} \varrho(t)\, dt > -\int_0^T > -K T^{2p};$$

jedenfalls also entweder für alle geraden oder alle für ungeraden p

$$K T^{2p} > \int_T^\infty \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} |\varrho(t)|\, dt$$

$$> \int_{2T}^{2T+1} \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} |\varrho(t)|\, dt > K_1 (2T)^{2p}$$

wo $K_1 > 0$ und von p frei ist, folglich

$$4^p < \frac{K}{K_1},$$

was für hinreichend große p unmöglich ist.

§ 2.

Ansatz für die L-Reihen.

Es sei

$$L(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi(n)}{n^s}$$

und $\chi(n)$ ein eigentlicher Charakter modulo $k > 1$.

Erster Fall: $\chi(-1) = 1$. Nach dem Hilfssatz des § 1 ist für $\varkappa > 0$, $\Re(y) > 0$, ganzes $n > 0$

$$\chi(n) e^{-n^2 y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - \infty i}^{\varkappa + \infty i} \Gamma(s) y^{-s} \chi(n) n^{-2s}\, ds,$$

also für $\varkappa > \frac{1}{2}$, $\Re(y) > 0$ $\left(\text{wegen } \sum_{n=1}^\infty |\chi(n) n^{-2s}| < \zeta(2\varkappa)\right)$

$$\sum_{n=1}^\infty \chi(n) e^{-n^2 y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - \infty i}^{\varkappa + \infty i} \Gamma(s) y^{-s} L(2s)\, ds;$$

wegen der im Streifen $\frac{1}{4} \leqq \sigma \leqq \varkappa$ gültigen Relation*)

$$L(2s) = O(|t|)$$

ist daher

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2 y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{4}-\infty i}^{\frac{1}{4}+\infty i} \Gamma(s) y^{-s} L(2s)\, ds = \frac{1}{4\pi i} \int_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}+\infty i} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) y^{-\frac{s}{2}} L(s)\, ds.$$

Wird

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} L(s) = \eta(s)$$

gesetzt, so ist bekanntlich**) $\eta(s)$ eine ganze Funktion und genügt, wenn $\bar{\chi}(n)$ der zu $\chi(n)$ konjugierte Charakter, $\bar{L}(s)$, $\bar{\eta}(s)$ die zugehörigen Funktionen sind und γ eine gewisse reelle, von s unabhängige (also nur von k und dem Charakter χ abhängige) Konstante ist, der Funktionalgleichung

$$\eta(s) = e^{\gamma i} \bar{\eta}(1-s).$$

Hieraus folgt für $s = \frac{1}{2} + ti$ (sogar bei komplexem t)

$$e^{-\frac{\gamma}{2} i} \eta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = e^{\frac{\gamma}{2} i} \bar{\eta}\left(\frac{1}{2} - ti\right).$$

Für reelles t ist also $e^{-\frac{\gamma}{2} i} \eta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$ zu sich selbst konjugiert, also reell, folglich $\eta\left(\frac{1}{2} + ti\right)$ auf einer festen Geraden durch den Nullpunkt gelegen. Bekanntlich***) decken sich die nicht-trivialen Nullstellen von $L(s)$ mit den Nullstellen von $\eta(s)$, und das Ziel ist zu beweisen, daß

$$\eta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = \varrho(t)$$

unendlich viele reelle Nullstellen hat.

Die Einführung des $\varrho(t)$ statt $L(s)$ gibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2 y} = \frac{1}{4\pi i} \int_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}+\infty i} \left(\frac{\pi}{ky}\right)^{\frac{s}{2}} \eta(s)\, ds = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{ky}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{t}{2} i} \varrho(t)\, dt.$$

Setzt man nun

$$y = \frac{\pi}{k} e^{2\alpha i}, \quad -\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4},$$

*) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 784.

**) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 496—497.

***) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 497.

so erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2 \frac{\pi}{k} e^{2\alpha i}} = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{\alpha i}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} \varrho(t) dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} \varrho(t) dt = 4\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2 \frac{\pi}{k} e^{2\alpha i}},$$

also wegen

$$\varrho(t) = O\left(e^{-\frac{\pi}{4}|t|} |t|^d\right)$$

für jedes $p \geqq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} t^p \varrho(t)\, dt = \frac{d^p}{d\alpha^p} \left(4\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2 \frac{\pi}{k} e^{2\alpha i}}\right).$$

Es entsteht nun nach dem Paradigma des § 1 die Frage, ob bzw. wann für $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ bei jedem $p \geqq 0$

$$\frac{d^p}{d\alpha^p} \left(4\pi e^{\frac{\alpha i}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2 \frac{\pi}{k} e^{2\alpha i}}\right) \to 0$$

ist. Hierzu ist wegen

$$\frac{d^p}{d\alpha^p}\left(e^{\frac{\alpha i}{2}} \Sigma\right) = \frac{d^p}{d\alpha^p}\left(e^{\frac{\alpha i}{2}}\right) \cdot \Sigma + \binom{p}{1} \frac{d^{p-1}}{d\alpha^{p-1}}\left(e^{\frac{\alpha i}{2}}\right) \cdot \frac{d}{d\alpha}\Sigma + \cdots + e^{\frac{\alpha i}{2}} \cdot \frac{d^p}{d\alpha^p}\Sigma$$

notwendig und hinreichend, daß für alle $q \geqq 0$

$$\frac{d^q}{d\alpha^q}\Sigma \to 0$$

ist. Hierzu ist (weil $u = e^{2\alpha i}$ mit allen Ableitungen nach α für $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ einen Limes hat, davon $\frac{du}{d\alpha}$ nicht den Limes 0) notwendig und hinreichend, daß

$$\frac{d^q}{du^q} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-n^2 \frac{\pi}{k} u} \to 0$$

für $u = e^{2\alpha i}$, $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ ist; also, $u = z + i$ gesetzt, notwendig und hinreichend

$$\frac{d^q}{dz^q} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\frac{n^2 \pi i}{k}} e^{-\frac{n^2 \pi z}{k}} \to 0$$

für $z \to 0$ auf dem Halbkreis $z = -i + e^{2\alpha i}$.

Nun ist wegen $\chi(-1)=1$ und, weil $\chi(n)e^{-\frac{n^2\pi i}{k}}$ die Periode $2k$ hat,

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-\frac{n^2\pi i}{k}}e^{-\frac{n^2\pi z}{k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)e^{-\frac{n^2\pi i}{k}}e^{-\frac{n^2\pi z}{k}}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{2k}\chi(\lambda)e^{-\frac{\lambda^2\pi i}{k}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+2mk)^2\pi z}{k}}.$$

Bekanntlich ist*) für reelles β und $\Re(z)>0$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-(m+\beta)^2\pi z}=\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{m^2\pi}{z}}\cos 2m\pi\beta,$$

also für $\Re(z)>0$ meine innere Summe

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\lambda+2mk)^2\pi z}{k}}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\left(m+\frac{\lambda}{2k}\right)^2\pi\cdot 4kz}=\frac{1}{2\sqrt{kz}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{m^2\pi}{4kz}}\cos 2m\pi\frac{\lambda}{2k},$$

also gleich $\frac{1}{2\sqrt{kz}}$ plus einer Funktion, die mit allen Ableitungen sogar bei Annäherung an $z=0$ aus einem Winkelraum $z=re^{\varphi i}$, $\cos\varphi>\delta$, wo $\delta>0$ ist, gegen 0 strebt.

Die Frage spitzt sich also darauf allein zu, ob zufällig

$$\sum_{\lambda=1}^{2k}\chi(\lambda)e^{-\frac{\lambda^2\pi i}{k}}=0$$

ist. Für ungerades k ist dies der Fall, da alsdann

$$\chi(k+\lambda)e^{-\frac{(k+\lambda)^2\pi i}{k}}=\chi(\lambda)e^{-k\pi i-2\lambda\pi i-\frac{\lambda^2\pi i}{k}}=-\chi(\lambda)e^{-\frac{\lambda^2\pi i}{k}}$$

ist, also je zwei Glieder der Intervalle $1\cdots k$ und $k+1\cdots 2k$ sich aufheben. Für gerades k, wo der Summand die Periode k hat und überdies eine gerade Funktion von λ ist (also in λ und $k-\lambda$ denselben Wert hat), fragt es sich, ob

$$\sum_{\lambda=1}^{\frac{k}{2}}\chi(\lambda)e^{-\frac{\lambda^2\pi i}{k}}=0$$

ist; dies ist bereits für $k=8$ und den eigentlichen Charakter

$$\chi(1)=1,\quad \chi(3)=-1,\quad \chi(5)=-1,\quad \chi(7)=1$$

nicht erfüllt:

$$\chi(1)e^{-\frac{\pi i}{8}}+\chi(3)e^{-\frac{9\pi i}{8}}=2e^{-\frac{\pi i}{8}}\neq 0.$$

---

*) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 277. Aus der Gültigkeit für $z>0$ folgt die Richtigkeit für $\Re(z)>0$.

Aber für ungerades k will ich weiter überlegen, ob die Hardysche Methode zum Endziel führt. Es wird sich zeigen, daß dies ohne wesentlich neuen Gedanken der Fall ist. Nach dem obigen ist für $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ bei jedem $p \geqq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} t^p \varrho(t)\,dt = \int_0^{\infty} (e^{\alpha t}\varrho(t) + (-1)^p e^{-\alpha t}\varrho(-t))t^p\,dt \to 0.$$

Behauptet wird, daß $\varrho(t)$ unendlich viele reelle Wurzeln hat; ich erweitere die Behauptung dahin, daß es unendlich viele reelle Wurzeln ungerader Ordnung hat. Gesetzt, das sei nicht der Fall. Dann gäbe es ein $T > 1$, so daß erstens für alle $t \geqq T$ die nach dem obigen reelle Funktion $e^{-\frac{\gamma}{2}t}\varrho(t)$ entweder $\geqq 0$ oder $\leqq 0$ ist, und daß zweitens für alle $t \leqq -T$ entweder $e^{-\frac{\gamma}{2}t}\varrho(t) \geqq 0$ oder $\leqq 0$ ist. Wenn oben $\geqq$, unten $\geqq$ oder oben $\leqq$, unten $\leqq$ gilt, beschränke ich mich auf gerade p; wenn oben $\geqq$, unten $\leqq$ oder oben $\leqq$, unten $\geqq$ gilt, auf ungerade p. Dadurch ist in jedem Fall für alle $t \geqq T$ der Ausdruck $(e^{\alpha t}\varrho(t) + (-1)^p e^{-\alpha t}\varrho(-t))e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ entweder $\geqq 0$ oder $\leqq 0$ Man darf daher entweder für alle geraden oder alle ungeraden p

$$\int_0^{\infty}\left(e^{\frac{\pi}{4}t}\varrho(t) + (-1)^p e^{-\frac{\pi}{4}t}\varrho(-t)\right)t^p\,dt = 0$$

schließen. Nun ist

$$\left|\int_0^{T}\left(e^{\frac{\pi}{4}t}\varrho(t) + (-1)^p e^{-\frac{\pi}{4}t}\varrho(-t)\right)t^p\,dt\right| < KT^p,$$

wo K von p frei ist, also

$$KT^p > \left|\int_T^{\infty}\left(e^{\frac{\pi}{4}t}\varrho(t) + (-1)^p e^{-\frac{\pi}{4}t}\varrho(-t)\right)t^p\,dt\right|$$

$$= \int_T^{\infty}\left|e^{\frac{\pi}{4}t}\varrho(t) + (-1)^p e^{-\frac{\pi}{4}t}\varrho(-t)\right|t^p\,dt$$

$$> \int_{2T}^{2T+1}\left|e^{\frac{\pi}{4}t}\varrho(t) + (-1)^p e^{-\frac{\pi}{4}t}\varrho(-t)\right|t^p\,dt > K_1(2T)^p,$$

$$2^p < \frac{K}{K_1},$$

was für hinreichend große p unmöglich ist.

Zweiter Fall: $\chi(-1)=-1$. Nach dem Hilfssatz des § 1 ist für $\varkappa>-\frac{1}{2}$, $\Re(y)>0$

$$e^{-y}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-\infty i}^{\varkappa+\infty i}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)y^{-s-\frac{1}{2}}\,ds,$$

also für $\varkappa>\frac{1}{2}$, $\Re(y)>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)ne^{-n^2y}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-\infty i}^{\varkappa+\infty i}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)y^{-s-\frac{1}{2}}n^{-2s}n^{-1}\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\varkappa-\infty i}^{\varkappa+\infty i}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)y^{-s-\frac{1}{2}}L(2s)\,ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{4}-\infty i}^{\frac{1}{4}+\infty i}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)y^{-s-\frac{1}{2}}L(2s)\,ds=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-\infty i}^{\frac{1}{2}+\infty i}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)y^{-\frac{s+1}{2}}L(s)\,ds.$$

Die Funktion

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+1}{2}}L(s)=\eta(s)$$

hat bekanntlich*) alle für das $\eta(s)$ des ersten Falles genannten Eigenschaften, so daß bei passender Wahl eines reellen γ die Funktion $e^{-\frac{\gamma}{2}i}\eta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$ für reelle t reell ist. Die Einführung des

$$\varrho(t)=\eta\left(\frac{1}{2}+ti\right)$$

ergibt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)ne^{-n^2y}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{ky}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{t}{2}i}\varrho(t)\,dt;$$

auf dem Halbkreis

$$y=\frac{\pi}{k}e^{2\alpha i},\quad -\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{4}$$

ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)ne^{-n^2\frac{\pi}{k}e^{2\alpha i}}=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{3\alpha i}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha t}\varrho(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha t}t^p\varrho(t)\,dt=\frac{d^p}{d\alpha^p}\left(4\pi e^{\frac{3\alpha i}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)ne^{-n^2\frac{\pi}{k}e^{2\alpha i}}\right)\qquad(p\geqq 0).$$

*) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 496—497.

Ist nun für $\alpha \to \frac{\pi}{4}$ bei jedem $p \geqq 0$

$$\frac{d^p}{d\alpha^p}\left(4\pi e^{\frac{3\alpha i}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\right) \to 0,$$

d. h. bei jedem $q \geqq 0$

$$\frac{d^q}{d\alpha^q}\Sigma \to 0,$$

d. h. bei Annäherung auf dem Halbkreis an i

$$\frac{d^q}{du^q}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)ne^{-n^2\frac{\pi}{k}u} \to 0,$$

d. h. bei Annäherung auf dem Halbkreis an 0

$$\frac{d^q}{dz^q}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)ne^{-\frac{n^2\pi i}{k}}e^{-\frac{n^2\pi z}{k}} \to 0\,?$$

Die Antwort wird bejahend ausfallen. Wegen $\chi(-1) = -1$ ist

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)ne^{-\frac{n^2\pi i}{k}}e^{-\frac{n^2\pi z}{k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{2k}\chi(\lambda)e^{-\frac{\lambda^2\pi i}{k}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\lambda+2mk)e^{-\frac{(\lambda+2mk)^2\pi z}{k}}.$$

Nun ist*) für reelles β und $\Re(z) > 0$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(m+\beta)e^{-(m+\beta)^2\pi z} = \frac{2}{z\sqrt{z}}\sum_{m=1}^{\infty}me^{-\frac{m^2\pi}{z}}\sin 2m\pi\beta,$$

also

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\lambda+2mk)e^{-\frac{(\lambda+2mk)^2\pi z}{k}} = 2k\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(m+\frac{\lambda}{2k}\right)e^{-\left(m+\frac{\lambda}{2k}\right)^2\pi\cdot 4kz}$$

$$= 2k\frac{2}{(4kz)^{\frac{3}{2}}}\sum_{m=1}^{\infty}me^{-\frac{m^2\pi}{4kz}}\sin 2m\pi\frac{\lambda}{2k},$$

also gleich einer Funktion, die mit allen Ableitungen bei $z \to 0$ aus dem Winkelraum $z = re^{\varphi i}$, $\cos\varphi > \delta > 0$ heraus verschwindet.

Somit ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha i t}t^p\varrho(t)dt \to 0,$$

und jetzt geht es wörtlich weiter wie im ersten Fall.

---

*) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 487. Aus der Gültigkeit für $z > 0$ folgt die Richtigkeit für $\Re(z) > 0$.

§ 3.

Vereinfachung des Beweises für die ζ-Funktion.

Ich kehre zur Zetafunktion zurück und will jetzt zeigen, daß die Relation

$$\int_0^\infty \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) t^{2p} \varrho(t)\,dt = -4\pi \frac{(-1)^p}{2^{2p}} \cos\frac{\pi}{8}$$

in der Nr. 5 des § 1 schon für $p = 0$, wo sie, $\varrho(t)$ entweder $\geqq 0$ oder $\leqq 0$ für $t \geqq T$ angenommen,

$$\int_0^\infty \left(e^{\frac{\pi}{4}t} + e^{-\frac{\pi}{4}t}\right) \varrho(t)\,dt = -4\pi \cos\frac{\pi}{8}$$

lautet, einen Widerspruch enthält. Bereits die hierin liegende Konvergenz des Integrals

$$\int_1^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} |\varrho(t)|\,dt$$

wird den Widerspruch liefern.

Bekanntlich*) ist (was nicht einmal voll gebraucht wird) bei festem σ

$$\lim_{t=\infty} \frac{|\Gamma(\sigma + ti)|}{e^{-\frac{\pi}{2}t}\, t^{\sigma - \frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi},$$

also bei passender Wahl eines absolut konstanten $c > 0$ für $t \geqq 1$

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}i\right)\right| > c e^{-\frac{\pi}{4}t} t^{-\frac{1}{4}},$$

folglich wegen

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}i\right) \pi^{-\frac{1}{4} - \frac{t}{2}i} \zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right) = \varrho(t)$$

für $t \geqq 1$

$$|\varrho(t)| \geqq c e^{-\frac{\pi}{4}t} t^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{4}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)\right|.$$

Es wäre daher

$$\int_1^\infty t^{-\frac{1}{4}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + ti\right)\right| dt$$

konvergent.

---

*) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 767.

Andererseits ergibt die Anwendung des Cauchyschen Satzes auf den Integranden $\zeta(s)$ und das Rechteck mit den Ecken $\frac{1}{2}+i$, $2+i$, $2+Ti$, $\frac{1}{2}+Ti$ bei wachsendem T

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}+i}^{\frac{1}{2}+Ti}\zeta(s)ds &= \int_{\frac{1}{2}+i}^{2+i}\zeta(s)ds+\int_{2+i}^{2+Ti}\zeta(s)ds+\int_{2+Ti}^{\frac{1}{2}+Ti}\zeta(s)ds\\ &= O(1)+\left\{s-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s\log n}\right\}_{s=2+i}^{s=2+Ti}+\int_2^{\frac{1}{2}}o(T)d\sigma\\ &= O(1)+(T-1)i+O(1)+o(T)\\ &= Ti+o(T);\end{aligned}$$

für $T>T_0$ ist also

$$\begin{aligned}\frac{T}{2}<\left|\int_1^T\zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right)dt\right| &\leq \int_1^T t^{-\frac{1}{4}}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right)\right|t^{\frac{1}{4}}dt\\ &\leq T^{\frac{1}{4}}\int_1^T t^{-\frac{1}{4}}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right)\right|dt,\end{aligned}$$

$$\frac{T^{\frac{3}{4}}}{2}<\int_1^T t^{-\frac{1}{4}}\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+ti\right)\right|dt,$$

so daß das von 1 bis ∞ erstreckte Integral nicht konvergieren kann.

§ 4.

Beweis für die L-Funktionen.

Hauptsatz: *Die Funktion $L(s)$ hat auf der oberen Hälfte der Geraden $\sigma=\frac{1}{2}$ unendlich viele Nullstellen.*

Vorbemerkung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $\chi(n)$ als eigentlicher Charakter angenommen werden. Da ich zugleich eine noch weiter vereinfachte Beweisanordnung des Hardyschen Satzes angeben will, schließe ich den Fall $k=1$, $L(s)=\zeta(s)$ nicht aus. Für $\zeta(s)$ werde ich an die in der Mitte von § 1, Nr. 3 vorkommende Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{t}{2}i}\varrho(t)dt=-1-\sqrt{\frac{\pi}{y}}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2y}$$

anknüpfen; für die anderen (eigentlichen Charakteren entsprechenden) $L(s)$ im Falle $\chi(-1) = 1$ an die im § 2 vorgekommene Formel

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{ky}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{t}{2}i}\varrho(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-n^2 y},$$

im Falle $\chi(-1) = -1$ an die in § 2 vorgekommene Formel

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{ky}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{t}{2}i}\varrho(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)ne^{-n^2 y}.$$

Aus dem Hauptsatz folgt natürlich, indem er auf $\overline{L}(s)$ angewendet wird, auch die Existenz unendlich vieler Nullstellen von $L(s)$ auf der unteren Hälfte der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$.

Beweis: Erster Fall: $\chi(-1) = 1$ (worin $\zeta(s)$ enthalten ist). Für $\Re(y) > 0$ ist

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-n^2 y}\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\Re(y)} < \int_0^{\infty}e^{-u^2\Re(y)}du = \frac{1}{\sqrt{\Re(y)}}\int_0^{\infty}e^{-v^2}dv = \frac{c_1}{\sqrt{\Re(y)}}.$$

Für

$$y = \frac{\pi}{k}e^{2\alpha i}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}, \quad \varepsilon \to 0$$

ist also wegen

$$\Re(y) = \frac{\pi}{k}\cos 2\alpha = \frac{\pi}{k}\sin 2\varepsilon > c_2\varepsilon$$

($c_2, c_3, \cdots$ dürfen von k abhängen, müssen nur > 0 sein), wenn $\mathfrak{w} = 1$ bei $\zeta(s)$ (d. h. bei $k = 1$), $\mathfrak{w} = 0$ sonst (d. h. bei $k > 1$) ist,

$$\left|4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)e^{-n^2 y} - 2\pi\mathfrak{w}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\right| < \frac{c_3}{\sqrt{\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{ky}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{t}{2}i}\varrho(t)dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Andererseits ist für diese y

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{ky}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{t}{2}i}\varrho(t)dt\right| = \left|e^{-\frac{\alpha i}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha t}\varrho(t)dt\right| = \left|\int_0^{\infty}e^{\alpha t}\varrho(t)dt\right| + O(1),$$

also, wenn per absurdum $e^{-\frac{\gamma}{2}i}\varrho(t)$ entweder $\geqq 0$ oder $\leqq 0$ für $t \geqq T$ $(T > 1)$ vorausgesetzt wird,

$$= \int_T^\infty e^{\alpha t}|\varrho(t)|\,dt + O(1) = \int_T^\infty e^{\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)t}|\varrho(t)|\,dt + O(1)$$

$$= \int_T^\infty e^{\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)t}\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{t}{2}i\right)\right|\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt + O(1)$$

$$\geqq c_4\int_T^\infty e^{-\varepsilon t}t^{-\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt + O(1).$$

Es wäre also

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}t^{-\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

Nun ist aber (wörtlich nach der Begründung des § 3 bei $\zeta(s)$) für alle unsere $L(s)$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau L\left(\frac{1}{2}+ti\right)dt \to 1 \text{ bei } \tau\to\infty,$$

also für alle $\tau > c_5$

$$\frac{\tau}{2} < \left|\int_0^\tau L\left(\frac{1}{2}+ti\right)dt\right| \leqq \int_0^\tau t^{-\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|t^{\frac{1}{4}}\,dt$$

$$\leqq \tau^{\frac{1}{4}}\int_0^\tau t^{-\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt,$$

$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau t^{-\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt > \frac{1}{2}\tau^{\frac{3}{4}},$$

und andererseits offenbar $\Phi(\tau) = O(\tau^{c_6})$, also

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}t^{-\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\Phi'(t)\,dt$$

$$= \left\{e^{-\varepsilon t}\Phi(t)\right\}_{t=0}^{t=\infty} + \varepsilon\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\Phi(t)\,dt = \varepsilon\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\Phi(t)\,dt > \varepsilon\int_{c_5}^\infty e^{-\varepsilon t}\Phi(t)\,dt$$

$$> \frac{1}{2}\varepsilon\int_{c_5}^\infty e^{-\varepsilon t}t^{\frac{3}{4}}\,dt > \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}t^{\frac{3}{4}}\,dt - c_7 = \frac{1}{2}\varepsilon\cdot\varepsilon^{-\frac{7}{4}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{3}{4}}\,du - c_7$$

$$= \frac{c_8}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}} - c_7,$$

was $> \dfrac{c_8}{2\varepsilon^{\frac{3}{4}}}$ für $0 < \varepsilon < c_9$ ist, im Widerspruch zum obigen $O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.

Zweiter Fall: $\chi(-1) = -1$. Es ist für $0 < r < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n^2} = (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + 2 + \cdots + [\sqrt{n}]) r^n < (1-r) \sum_{n=1}^{\infty} n r^n$$

$$= \frac{r}{1-r};$$

daher ist für $\Re(y) > 0$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n e^{-n^2 y} \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 \Re(y)} < \frac{c_{10}}{\Re(y)}.$$

Für $y = \frac{\pi}{k} e^{2\alpha i}$, $\alpha = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon \to 0$ ist also

$$4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n e^{-n^2 y} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Andererseits ist für diese y

$$\left| 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n e^{-n^2 y} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pi}{ky}\right)^{\frac{3}{4} + \frac{t}{2} i} \varrho(t)\, dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} \varrho(t)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t} \varrho(t) dt \right| + O(1),$$

also, wenn $e^{-\frac{\gamma}{2} t} \varrho(t)$ entweder $\geqq 0$ oder $\leqq 0$ für $t \geqq T > 1$ wäre,

$$= \int_{T}^{\infty} e^{\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) t} |\varrho(t)| dt + O(1)$$

$$= \int_{T}^{\infty} e^{\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) t} \left| \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{t}{2} i\right) \right| \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{3}{4}} \left| L\left(\frac{1}{2} + ti\right) \right| dt + O(1)$$

$$\geqq c_{11} \int_{T}^{\infty} e^{-\varepsilon t} t^{\frac{1}{4}} \left| L\left(\frac{1}{2} + ti\right) \right| dt + O(1).$$

Es wäre also

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon t} t^{\frac{1}{4}} \left| L\left(\frac{1}{2} + ti\right) \right| dt = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau L\left(\frac{1}{2}+ti\right)dt \to 1 \text{ bei } \tau\to\infty,$$

also

$$\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} L\left(\frac{1}{2}+ti\right)dt = \frac{\tau}{2}+o(\tau),$$

folglich für alle $\tau > c_{12}$

$$\frac{\tau}{3} < \left|\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} L\left(\frac{1}{2}+ti\right)dt\right| \leqq \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} t^{\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right| t^{-\frac{1}{4}}dt$$

$$\leqq \left(\frac{\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} t^{\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt,$$

$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau t^{\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt > c_{13}\tau^{\frac{5}{4}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}t^{\frac{1}{4}}\left|L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|dt = \int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\Phi'(t)dt = \varepsilon\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}\Phi(t)\,dt$$

$$> c_{13}\varepsilon\int_{c_{12}}^\infty e^{-\varepsilon t}t^{\frac{5}{4}}dt > c_{13}\varepsilon\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}t^{\frac{5}{4}}dt - c_{14}$$

$$= c_{13}\varepsilon\cdot\varepsilon^{-\frac{9}{4}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{5}{4}}du - c_{14} = \frac{c_{15}}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}} - c_{14},$$

im Widerspruch zum obigen $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

§ 5.

Abschätzung der Anzahl.

Satz: *Zu jedem $L(s)$ gibt es ein c derart, daß für alle $\tau \geqq c$ wenigstens eine Nullstelle von $L(s)$ der Strecke $\frac{1}{2}+\tau i$ (exkl.) bis $\frac{1}{2}+\tau^{\epsilon} i$ (exkl.) angehört.*

Vorbemerkung: Aus diesem Satz folgt, wenn, nach wachsenden Ordinaten geordnet,

$$\frac{1}{2}+t_1 i,\ \frac{1}{2}+t_2 i,\ \cdots,\ \frac{1}{2}+t_n i,\ \cdots\ (0<t_1\leqq t_2\leqq\cdots,\ t_n\to\infty)$$

die Nullstellen auf der Halbgeraden $\sigma = \frac{1}{2}$, $t > 0$ sind, daß bei passender Wahl eines $c > 1$ und eines m

$$c < t_m < c^c, \; t_{m+1} < c^{c^2}, \; t_{m+2} < c^{c^3}, \cdots, \; t_n < c^{c^{n-m+1}}, \cdots,$$

also für $n \geqq m$

$$\log\log t_n < n - m + 1 + \log\log c$$

ist, so daß einerseits

$$\sum_{t_n > 1} \frac{1}{\log\log t_n}$$

divergiert, andererseits die Anzahl $M(T)$ aller $t_n \leqq T$ der Relation

$$\liminf_{T=\infty} \frac{M(T)}{\log\log T} > 0$$

genügt.

Beweis: Es genügt wiederum, $L(s) = \zeta(s)$ oder $k > 1$ und den Charakter $\chi(n)$ eigentlich anzunehmen.

Erster Fall: $\chi(-1) = 1$. In § 4 war für $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} |\varrho(t)|\, dt > \frac{c_{16}}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}$$

festgestellt*). Andererseits ist*) nach § 4

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} \varrho(t)\, dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = o\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}\right).$$

Ich setze

$$|\varrho(t)| + e^{-\frac{\gamma}{2}i} \varrho(t) = P(t),$$

so daß $P(t)$ stets $\geqq 0$ ist und zwar $= 0$, wenn $e^{-\frac{\gamma}{2}i} \varrho(t) \leqq 0$ ist, dagegen $= 2|\varrho(t)|$, wenn $e^{-\frac{\gamma}{2}i} \varrho(t) \geqq 0$ ist. Es ist

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} P(t)\, dt > \frac{c_{17}}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}.$$

Nun ist wegen

$$P(t) \leqq 2 \left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}i\right)\right| \left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1}{4}} \left|L\left(\frac{1}{2} + ti\right)\right|$$

---

*) Die zum Widerspruch führende Annahme $e^{-\frac{\gamma}{2}i} \varrho(t) \geqq 0$ oder $\leqq 0$ für $t \geqq T$ war hierbei nicht etwa benutzt.

nebst*)

$$L\left(\frac{1}{2}+ti\right)=O(t^{0,26})$$

$$e^{\frac{\pi}{4}t}P(t)<c_{18}t^{0,01} \text{ für } t>1,$$

also

$$\int\limits_{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}}^{\infty} e^{\frac{\pi}{4}t}e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt<c_{18}\int\limits_{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}}^{\infty} e^{-\varepsilon t}t^{0,01}\,dt=\frac{c_{18}}{\varepsilon^{1,01}}\int\limits_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-z}z^{0,01}\,dz$$

$$<\frac{c_{18}}{\varepsilon^{1,01}}\int\limits_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z}\,dz=\frac{2c_{18}}{\varepsilon^{1,01}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}=o(1)=o\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}\right).$$

Folglich ist für $0<\varepsilon<c_{19}$

$$\int\limits_{1}^{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}} e^{\frac{\pi}{4}t}e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt=\int\limits_{0}^{\infty}-\int\limits_{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}}^{\infty}-\int\limits_{0}^{1}>\frac{c_{17}}{2\varepsilon^{\frac{3}{4}}}.$$

Nun sei $\tau>2$. Dann ist

$$\int\limits_{1}^{\tau} e^{\frac{\pi}{4}t}e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt<\tau\cdot c_{18}\tau^{0,01}e^{-\varepsilon\cdot 0}=c_{18}\tau^{1,01},$$

also

$$\int\limits_{\tau}^{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}} e^{\frac{\pi}{4}t}e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt>\frac{c_{17}}{2\varepsilon^{\frac{3}{4}}}-c_{18}\tau^{1,01}.$$

Nun werde

$$\varepsilon=\tau^{-1,02\cdot\frac{4}{3}}$$

gesetzt, was >0, $<\frac{\pi}{4}$ und für $\tau>c_{20}$ kleiner als c_{19} ist. Das gibt

$$\int\limits_{\tau}^{\tau^{2,04}} e^{\frac{\pi}{4}t}e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt>\frac{1}{2}c_{17}\tau^{1,02}-c_{18}\tau^{1,01},$$

also >0 für alle $\tau>c_{21}$. Daher ist unterwegs einmal

$$P(t)>0,$$

$$e^{-\frac{7}{2}t}\varrho(t)>0.$$

*) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 868; Beweis für $L(s)$ wörtlich wie bei $\zeta(s)$ unter Benutzung der nachher im obigen Text hergeleiteten (nicht neuen) Relation

$$L(ti)=O(t^{\frac{1}{2}}\log t).$$

Aus Symmetriegründen ist klar, daß wörtlich ebenso für alle $\tau > c_{22}$ im Intervall $\tau < t < \tau^{2,04}$ einmal

$$|\varrho(t)| - e^{-\frac{\gamma}{2}t}\varrho(t) > 0,$$

also

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t}\varrho(t) < 0$$

gezeigt werden kann. Für alle $\tau > c = \text{Max.}\,(c_{21}, c_{22})$ ist also wegen $2{,}04 < e$ im Intervall $\tau < t < \tau^e$ einmal

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t}\varrho(t) = 0,$$

$$L\left(\frac{1}{2} + ti\right) = 0.$$

Zweiter Fall: $\chi(-1) = -1$. Da verläuft die obige Schlußreihe folgendermaßen:

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t}|\varrho(t)|\,dt > \frac{c_{23}}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}},$$

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t}\varrho(t)\,dt = o\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt > \frac{c_{24}}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}},$$

$$e^{\frac{\pi}{4}t}P(t) < c_{25}\,t^{0,51} \qquad (t > 1),$$

$$\int_{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}}^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt < c_{25}\int_{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}}^\infty e^{-\varepsilon t}t^{0,51}\,dt = \frac{c_{25}}{\varepsilon^{1,51}}\int_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^\infty e^{-z}z^{0,51}\,dz$$

$$< \frac{c_{25}}{\varepsilon^{1,51}}\int_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^\infty e^{-\frac{1}{2}z}\,dz = o(1) = o\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{5}{4}}}\right),$$

$$\int_1^{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}} e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt > \frac{c_{24}}{2\varepsilon^{\frac{5}{4}}} \qquad (0 < \varepsilon < c_{26}),$$

$$\int_\tau^{\varepsilon^{-\frac{3}{2}}} e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t}P(t)\,dt > \frac{c_{24}}{2\varepsilon^{\frac{5}{4}}} - c_{25}\,\tau^{1,51} \qquad (\tau > 2),$$

$$\varepsilon = \tau^{-1,52\cdot\frac{4}{5}},$$

$$\int_{\tau}^{\tau^{1,824}} e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} P(t)\, dt > \frac{1}{2} c_{24} \tau^{1,52} - c_{25} \tau^{1,51} > 0 \qquad (\tau > c_{27}),$$

usw.

Der obige Satz ist damit bewiesen. Es ist aber nicht uninteressant zu konstatieren, daß ohne wesentlich größere Mühe die Konstante c dieses Satzes durch jedes $1 + \Delta > 1$ ersetzt werden kann. Dies leistet der

Satz: *Zu jedem $L(s)$ und jedem $\Delta > 0$ gibt es ein $c = c(L, \Delta) > 1$ derart, daß für alle $\tau \geqq c$ wenigstens eine Nullstelle von $L(s)$ der Strecke $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau < t < \tau^{1+\Delta}$ angehört.*

Beweis: An Stelle der beim Beweise des vorigen Satzes (nämlich insbesondere bei der Abschätzung von $\int_0^{\tau}$) benutzten Relation

$$L\left(\frac{1}{2} + ti\right) = O\left(t^{0,25+\delta}\right) \qquad \text{(für jedes } \delta > 0)$$

werde ich jetzt die vorteilhaftere Relation

$$\int_0^T \left| L\left(\frac{1}{2} + ti\right)\right|^2 dt = O\left(T^{1+\delta}\right)$$

entwickeln.

Bekanntlich*) ist für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ gleichmäßig

$$|\Gamma(s)| = e^{-\frac{\pi}{2}t}\, t^{\sigma - \frac{1}{2}}\, e^{O(1)},$$

also wenn $\mathfrak{a} = 0$ für $\chi(-1) = 1$ und $\mathfrak{a} = 1$ für $\chi(-1) = -1$ gesetzt wird, wegen

$$\Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s+\mathfrak{a}}{2}} L(s) = e^{\gamma i}\, \Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}} \bar{L}(1-s)$$

für $0 \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$ gleichmäßig

$$|L(s)| = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}t}\, t^{\frac{1-\sigma}{2} + \frac{\mathfrak{a}}{2} - \frac{1}{2}}\, e^{O(1)}}{e^{-\frac{\pi}{4}t}\, t^{\frac{\sigma}{2} + \frac{\mathfrak{a}}{2} - \frac{1}{2}}\, e^{O(1)}}\, |\bar{L}(1-s)| = |\bar{L}(1-s)|\, O\left(t^{\frac{1}{2}-\sigma}\right).$$

Daher ist erstens

$$|L(ti)| = |\bar{L}(1-ti)|\, O\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = O\left(t^{\frac{1}{2}} \log t\right),^{**)}$$

folglich wörtlich nach dem bekannten***) Paradigma $\zeta(s)$ für $0 \leqq \sigma \leqq 1$ gleichmäßig

*) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 770.

**) Denn (vgl. z. B. *Handbuch*, S. 462) es ist $|\bar{L}(1-ti)| = O(\log t)$.

***) Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 868—870.

$$L(s) = O\left(t^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t\right),$$

$$|L(s)\bar{L}(1-s)| = |L(\sigma+ti)|\,|L(1-\sigma+ti)|$$

$$= O\left(t^{\frac{1-\sigma}{2}} \log t \cdot t^{\frac{\sigma}{2}} \log t\right) = O\left(t^{\frac{1}{2}} \log^2 t\right) = O(t);$$

zweitens für $0 < \delta < \frac{1}{2}$, wo δ fest ist,

$$\left|L\left(\tfrac{1}{2} - \delta + ti\right)\right| = \left|\bar{L}\left(\tfrac{1}{2} + \delta - ti\right)\right| O(t^{\delta}) = \left|L\left(\tfrac{1}{2} + \delta + ti\right)\right| O(t^{\delta}).$$

Der Cauchysche Satz ergibt daher

$$\int_0^T \left|L\left(\tfrac{1}{2} + ti\right)\right|^2 dt = \frac{1}{i}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+Ti} L(s)\bar{L}(1-s)\,ds = \frac{1}{i}\int_{\frac{1}{2}+\delta}^{\frac{1}{2}+\delta+Ti} L(s)\bar{L}(1-s)\,ds + O(T)$$

$$\leqq \int_0^T \left|L\left(\tfrac{1}{2} + \delta + ti\right)\right| \left|L\left(\tfrac{1}{2} - \delta + ti\right)\right| dt + O(T)$$

$$= O\left(T^{\delta}\int_0^T \left|L\left(\tfrac{1}{2} + \delta + ti\right)\right|^2 dt\right) + O(T) = O(T^{1+\delta})^{*})$$

für $0 < \delta < \frac{1}{2}$, also für jedes $\delta > 0$.

Die Beweismethode des vorangehenden Satzes ergibt daher, wenn ich beide Fälle ($\mathfrak{a} = 0$, $\mathfrak{a} = 1$) zusammenfasse und unter $D_1, D_2, \cdots$ von L und $\delta > 0$ abhängige positive Konstanten verstehe,

$$\int_0^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} P(t)\,dt > \frac{D_1}{\varepsilon^{\frac{3+2\mathfrak{a}}{4}}},$$

$$e^{\frac{\pi}{4}t} P(t) < D_2 t^{\frac{\mathfrak{a}}{2}+\delta} \qquad (t>1),$$

$$\int_{\varepsilon^{-(1+\delta)}}^\infty e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} P(t)\,dt < D_2\int_{\varepsilon^{-(1+\delta)}}^\infty e^{-\varepsilon t} t^{\frac{\mathfrak{a}}{2}+\delta}\,dt = \frac{D_2}{\varepsilon^{1+\frac{\mathfrak{a}}{2}+\delta}}\int_{\varepsilon^{-\delta}}^\infty e^{-z} z^{\frac{\mathfrak{a}}{2}+\delta}\,dz$$

$$< \frac{D_3}{\varepsilon^{1+\frac{\mathfrak{a}}{2}+\delta}}\int_{\varepsilon^{-\delta}}^\infty e^{-\frac{z}{2}}\,dz = \frac{2D_3}{\varepsilon^{1+\frac{\mathfrak{a}}{2}+\delta}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^{-\delta}} = o(1) = o\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{3+2\mathfrak{a}}{4}}}\right),$$

---

* Vgl. z. B. *Handbuch*, S. 816 (bei $\zeta(s)$) und S. 799 (bei den übrigen $L(s)$).

$$\int_1^{\varepsilon^{-(1+\delta)}} e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} P(t)\,dt > \frac{D_1}{2\varepsilon^{\frac{3+2a}{4}}} \qquad (0<\varepsilon<D_4),$$

$$\int_1^{\tau} e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} P(t)\,dt < \int_1^{\tau} e^{\frac{\pi}{4}t} P(t)\,dt$$

$$\leqq 2\int_1^{\tau} e^{\frac{\pi}{4}t} |\varrho(t)|\,dt \leqq D_5 \int_1^{\tau} e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\frac{\pi}{4}t} t^{\frac{-1+2a}{4}} \left| L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right| dt$$

$$< D_5 \int_0^{\tau} t^{\frac{-1+2a}{4}} \left| L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right| dt \leqq D_5 \sqrt{\int_0^{\tau} t^{\frac{-1+2a}{2}}\,dt \cdot \int_0^{\tau} \left| L\left(\frac{1}{2}+ti\right)\right|^2 dt}$$

$$\leqq D_6 \sqrt{\tau^{1+\frac{-1+2a}{2}+1+\delta}} = D_6 \tau^{\frac{3+2a}{4}+\frac{\delta}{2}} \qquad (\tau>2),$$

$$\int_{\tau}^{\varepsilon^{-(1+\delta)}} e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} P(t)\,dt > \frac{D_1}{2\varepsilon^{\frac{3+2a}{4}}} - D_6 \tau^{\frac{3+2a}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

Hierin setze ich

$$\varepsilon = \tau^{-(1+\delta)}$$

und erhalte

$$\int_{\tau}^{\tau^{(1+\delta)^2}} e^{\frac{\pi}{4}t} e^{-\varepsilon t} P(t)\,dt > \frac{1}{2} D_1 \tau^{\frac{3+2a}{4}+\delta\frac{3+2a}{4}} - D_6 \tau^{\frac{3+2a}{4}+\frac{\delta}{2}} > 0$$

für alle $\tau > \tau_0 = \tau_0(L, \delta)$. Also ist für $\tau < t < \tau^{(1+\delta)^2}$ einmal

$$P(t) > 0.$$

Bei gegebenem $\Delta > 0$ ist also für $\tau > \tau_1 = \tau_1(L, \Delta)$ im Intervall $\tau < t < \tau^{1+\Delta}$ einmal

$$P(t) > 0,$$

usw.

§ 6.

Weitere Anwendung der Methode.

Um noch ein Beispiel für die Anwendbarkeit der modifizierten Hardyschen Beweismethode zu geben, beweise ich zum Schluß den

Satz: *Es sei* $\mathsf{Z}(s)$ *die in der Halbebene* $\sigma > \frac{k}{2}$ *durch die Dirichletsche Reihe*

$$\mathsf{Z}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} = \sum_{a_1,\cdots,a_k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(a_1^2+\cdots+a_k^2)^s} \qquad (\textit{ohne } a_1=\cdots=a_k=0)$$

definierte Funktion. Dann hat $\mathsf{Z}(s)$ *auf der Geraden* $\sigma = \frac{k}{4}$ *unendlich viele Nullstellen.*

Vorbemerkung: Für $k = 1$ wird $Z(s) = \zeta(2s)$, so daß dieser Satz den Hardyschen enthält. Ich darf also beim Beweise $k \geqq 2$ annehmen.

Beweis: Bekanntlich*) hat $Z(s)$ im Punkte $s = \frac{k}{2}$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$, ist sonst überall regulär und genügt der Funktionalgleichung

$$\pi^{-s}\Gamma(s)Z(s) = \pi^{-\left(\frac{k}{2}-s\right)}\Gamma\left(\frac{k}{2}-s\right)Z\left(\frac{k}{2}-s\right).$$

Für festes $\delta > 0$ ist wegen der absoluten Konvergenz

$$Z\left(\frac{k}{2}+\delta+ti\right) = O(1),$$

folglich

$$Z(-\delta+ti) = O\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\frac{k}{2}+\delta-\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{-\delta-\frac{1}{2}}}\right) = O\left(|t|^{\frac{k}{2}+2\delta}\right);$$

weil ferner für $-\delta \leqq \sigma \leqq \frac{k}{2}+\delta$ gleichmäßig

$$Z(s) = O(e^{|t|})$$

ist**), ist nach einer bekannten Lindelöfschen Schlußweise***) für $-\delta \leqq \sigma \leqq \frac{k}{2}+\delta$ gleichmäßig

$$Z(s) = O\left(|t|^{\frac{k}{2}+\delta-\sigma}\right).$$

Folglich ist im Streifen $\frac{k}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{k}{2}+2$ gleichmäßig

$$Z(s) = O\left(|t|^{\frac{k}{4}+\delta}\right) = O(|t|^{b}).$$

Ich will nun feststellen, daß

$$\int_{\frac{k}{4}}^{\frac{k}{4}+\infty i} Z(s)\,ds$$

divergiert, also a fortiori

$$\int_0^\infty \left|Z\left(\frac{k}{4}+ti\right)\right| dt$$

divergiert. Dies folgt für $k \leqq 3$, genau so wie in § 3 bei $\zeta(s)$, aus

*) Vgl. z. B. Epstein 1, S. 626—627.

**) Nach der Formel bei Epstein 1, S. 626, Z. 2—1 v. u.

***) Vgl. S. 704—706 meiner Abhandlung *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1912, S. 687—771].

$$\int\limits_{\frac{k}{4}}^{\frac{k}{4}+Ti} \mathsf{Z}(s)\,ds = \int\limits_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}+1+Ti} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}\,ds + O(1) + O\left(T^{\frac{k}{4}+\delta}\right)$$

$$= \int\limits_{\frac{k}{2}+1}^{\frac{k}{2}+1+Ti} \frac{2k}{1^s}\,ds + O(1) + O\left(T^{\frac{k}{4}+\delta}\right) = 2k\,Ti + o(T);$$

diese Schlußweise versagt für $k \geqq 4$, läßt sich aber durch folgende allgemeingültige ersetzen. Wäre das Integral konvergent, so würde die in der Halbebene $t > 0$ reguläre Funktion

$$\Psi(s) = \int\limits_{\frac{k}{4}+i}^{s} \mathsf{Z}(z)\,dz$$

den Relationen

$$\Psi\left(\frac{k}{4}+ti\right) = O(1), \quad \Psi\left(\frac{k}{2}+1+ti\right) = 2kti + o(t),$$

$$\Psi\left(\frac{k}{2}+2+ti\right) = 2kti + o(t)$$

genügen. Nach der ersten und dritten davon, nämlich wegen

$$\Psi\left(\frac{k}{4}+ti\right) = O(1), \quad \Psi\left(\frac{k}{2}+2+ti\right) = O(t)$$

ist mit Rücksicht auf die für $\frac{k}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{k}{2}+2$ gültige Abschätzung

$$\Psi(s) = O(t \cdot t^b) = O(t^{b+1})$$

nach der Lindelöfschen Schlußweise für $\frac{k}{4} \leqq \sigma \leqq \frac{k}{2}+2$

$$\Psi(s) = O\left(t^{\frac{4\sigma-k}{8+k}}\right),$$

also

$$\Psi\left(\frac{k}{2}+1+ti\right) = O\left(t^{\frac{4+k}{8+k}}\right) = o(t),$$

im Gegensatz zur obigen Abschätzung.

Nach der Funktionalgleichung des $\mathsf{Z}(s)$ ist die exkl. der Pole $s = 0$ und $s = \frac{k}{2}$ reguläre Funktion

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\mathsf{Z}(s) = \eta(s)$$

so beschaffen, daß

$$\eta(s) = \eta\left(\frac{k}{2}-s\right)$$

ist; daher ist die gerade Funktion von t

$$\eta\left(\frac{k}{4}+ti\right)=\varrho(t)$$

für reelle t reell. Die Behauptung besagt, daß $\varrho(t)$ unendlich viele positive Nullstellen hat.

Der Beweis verläuft nun — indem ich wohl nur nötig habe, Formeln ohne verbindenden Text aufzuschreiben — folgendermaßen:

$$\sum_{a_1,\cdots,a_k=-\infty}^{\infty} e^{-(a_1^2+\cdots+a_k^2)y}=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa-\infty i}^{\varkappa+\infty i}\Gamma(s)y^{-s}Z(s)\,ds \quad \left(\Re(y)>0,\ \varkappa>\frac{k}{2}\right)$$

$$=1+y^{-\frac{k}{2}}\pi^{\frac{k}{2}}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{k}{4}-\infty i}^{\frac{k}{4}+\infty i}\Gamma(s)y^{-s}Z(s)\,ds$$

$$=1+y^{-\frac{k}{2}}\pi^{\frac{k}{2}}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\pi}{y}\right)^{\frac{k}{4}+ti}\varrho(t)\,dt;$$

$$y=\pi e^{\alpha i},\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},\quad \alpha\to\frac{\pi}{2};$$

$$\sum_{a_1,\cdots,a_k=-\infty}^{\infty} e^{-(a_1^2+\cdots+a_k^2)y}=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2y}\right)^k=(o(1))^k=o(1),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{\alpha t}\varrho(t)\,dt\to A_1,$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{\alpha t}\varrho(t)\,dt\to A_2.$$

$$|\varrho(t)|\geqq g\,e^{-\frac{\pi}{2}t}\,t^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}\left|Z\left(\frac{k}{4}+ti\right)\right| \qquad (t\geqq 1).$$

$$\varrho(t)\begin{cases}\geqq 0 & (t\geqq T),\\ \leqq 0 & (t\geqq T).\end{cases}$$

$$\int_{0}^{\infty}e^{\frac{\pi}{2}t}|\varrho(t)|\,dt=A_3,$$

$$\int_{1}^{\infty}t^{\frac{k}{4}-\frac{1}{2}}\left|Z\left(\frac{k}{4}+ti\right)\right|dt=A_4,$$

$$\int_{0}^{\infty}\left|Z\left(\frac{k}{4}+ti\right)\right|dt=A_5.$$

Göttingen, den 11. Juli 1914.

Zur Theorie der integrallos lösbaren Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Wilhelm Gross in Wien.

In einer im 73. Bande der Mathematischen Annalen erschienenen Arbeit*) habe ich aus partiellen Differentialgleichungen einer Unbekannten Differentialgleichungen mehrerer Unbekannter hergeleitet, so daß aus Parameter enthaltenden Integralscharen jener durch Differentiations- und Eliminationsprozesse, ev. mit Hinzunahme willkürlicher Funktionen, Lösungen dieser Gleichungen entstehen. Sind hierbei jene Differentialgleichungssysteme Involutionssysteme, so läßt sich umgekehrt unter bestimmten Voraussetzungen und mit gewissen Ausnahmen jede Lösung der abgeleiteten Gleichungen in der angegebenen Art und Weise gewinnen, d. h. diese Gleichungen sind integrallos lösbar. In diese Klasse von Gleichungen fallen die Mongesche Differentialgleichung der Integralkurven**) sowie die von Goursat***) aufgestellten Systeme.

Zweck dieser Arbeit ist es nun, zu zeigen, *wie man von einem vorgelegten Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit mehreren Unbekannten entscheiden kann, ob es unter die in meiner oben genannten Arbeit behandelten Systeme gehört, und wie man sodann ein zugehöriges Differentialgleichungssystem mit einer Unbekannten gewinnt.* Die Kenntnis eines vollständigen Integrales dieses Systemes verhilft uns zur integrallosen Lösung der vorgelegten Gleichungen.

Ich werde mich beim Beweise der Methoden wiederum auf den Raum von fünf Dimensionen beschränken, die Methoden selbst hierbei ausführlich

*) „Über Differentialgleichungssysteme erster Ordnung, deren Lösungen sich integrallos darstellen lassen", Math. Ann. 73, S. 109—172. Wird im folgenden als (I) angeführt.

**) Memoires de l'Academie des Sciences 1784.

***) „Sur le problème de Monge", Bull. Soc. Math. France 1905, S. 201.

nur an charakteristischen Fällen entwickeln; doch sind die Ausführungen ohne weiteres übertragbar. Mehr ins einzelne sind die Bedingungen, denen die Gleichungen genügen müssen, behandelt.

I.

Voraussetzungen über die zur Herstellung der integrallos lösbaren Gleichungen benutzten Differentialgleichungssysteme mit einer Unbekannten.*)

1. Es sei in einem Bereiche des fünfdimensionalen Raumes durch die Gleichungen

$$(1)\qquad F_1(p_1, p_2, p_3, p_4;\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0;\quad F_2 = 0, \cdots, F_{4-i} = 0;$$

$$p_k = \frac{\partial x_5}{\partial x_k}$$

ein K_{i+1}-Feld, d. h. ein Feld $(i+1)$-dimensionaler Elementarkegel definiert. Wir fügen sodann die $(4-k)$ Gleichungen hinzu

$$(2)\qquad \begin{aligned} T_1 &\equiv \frac{\partial \bar{x}_5}{\partial x_1} - p_1 - p_{5-k}\frac{\partial \bar{x}_{5-k}}{\partial x_1} - \cdots - p_4 \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_1} = 0, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_{4-k} &\equiv \frac{\partial \bar{x}_5}{\partial x_{4-k}} - p_{4-k} - p_{5-k}\frac{\partial \bar{x}_{5-k}}{\partial x_{4-k}} - \cdots - p_4 \frac{\partial \bar{x}_4}{\partial x_{4-k}} = 0. \end{aligned}$$

Wir wählen aus der Reihe der F und T drei aus: $F_m, \cdots, T_p$ und bilden, wenn $F_q, \cdots, T_t$ die $5-i-k$ übrigbleibenden Funktionen der Reihe sind,

$$(3)\qquad \begin{aligned} J_1^{(1)} &\equiv \frac{\partial(F_q, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \cdots, & J_{5-i-k}^{(1)} &\equiv \frac{\partial(T_t, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \\ J_1^{(2)} &\equiv \frac{\partial(J_1^{(1)}, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \cdots, & J_{5-i-k}^{(2)} &\equiv \frac{\partial(J_{5-i-k}^{(1)}, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \\ &\cdots\cdots & & \\ J_1^{(k)} &\equiv \frac{\partial(J_1^{(k-1)}, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \cdots, & J_{5-i-k}^{(k)} &\equiv \frac{\partial(J_{5-i-k}^{(k-1)}, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}. \end{aligned}$$

Die Funktionen (3), gleich Null gesetzt, verbunden mit dem Gleichungssystem (1) und (2) bilden das Gleichungssystem $\bar{A}$. Wir machen hierbei folgende Voraussetzungen, die in Hinblick auf die folgenden Entwicklungen etwas anders gefaßt sind als in (I) I:

1) *Die F_i seien in den x und p eindeutig und $(3+k)$-fach), in den p allein hingegen mindestens $(2k+1)$-fach stetig differenzierbar; sie sollen ein Involutionssystem bilden.***

---

* Siehe (I), I. **) Siehe (I), S. 118.

2) *Die Matrix* $\frac{\partial(F_1, \cdots, F_{4-l}, T_1, \cdots, T_{4-k})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ *sei vom Range drei.*

Ist die Matrix $\frac{\partial(F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ vom Range drei, wobei $F_m, \cdots, T_p$ die bei der Bildung der J ausgewählten F, T sind, so wollen wir dieses System der J als „taugliches" bezeichnen. Infolge 2) lassen sich stets taugliche Systeme der J bilden. Für ein taugliches System der J sollen dann an der betrachteten, den Gleichungen $F = 0$, $T = 0$, $J^{(1)} = 0, \cdots, J^{(k)} = 0$ [Gleichungssystem $\bar{A}$] genügenden Stelle noch folgende Voraussetzungen gelten:

3) *In jeder der Matrizen* $\frac{\partial(J_1^{(1)}, \cdots, J_{5-l-k}^{(k)})}{\partial(r_{1,l}, \cdots, r_{k,l})}$ $(l = 1, 2, \cdots, 4-k)$ *sei mindestens eine der vierreihigen Determinanten von Null verschieden, in denen J mit dem oberen Index eins vorkommen.**)

4) *In der Matrix* $\frac{\partial(T_1, \cdots, T_{4-k}, J_1^{(1)}, \cdots, J_{5-l-k}^{(k)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ *sei wenigstens eine der vierreihigen Determinanten von Null verschieden.*

Hierbei ist unter $r_{0,j}$, $r_{l,j}$ $\frac{\partial \bar{x}_5}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial \bar{x}_{4-l-l}}{\partial x_j}$ verstanden.

Unter diesen Umständen sind die Entwicklungen von (I) auf unser System anwendbar.

2. An die vorstehenden Bedingungen 1) bis 4) lassen sich nun ohne weiteres eine Reihe von Bemerkungen knüpfen. Es sei

$$J_1^{(k+1)} \equiv \frac{\partial(J_1^{(k)}, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \cdots, J_{5-k-l}^{(k+1)} \equiv \frac{\partial(J_{5-k-l}^{(k)}, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3\, p_4)}.$$

Mindestens eine dieser Funktionen ist an der betrachteten Stelle von Null verschieden, da sich die vierreihigen Determinanten der Matrix in 4) linear homogen mit endlichen Koeffizienten durch die $J_l^{(k+1)}$ und die verschwindenden $J_l^{(h)}$ $(h \leqq k)$ darstellen lassen.

3. *Die Bedingungen* 3), 4) *werden von allen tauglichen Systemen J erfüllt, wenn sie von einem erfüllt werden***). Denn sind J und J^* zwei taugliche Systeme, so lassen sich die J durch die J^* und die J^* durch

*) Man füge den letzten Zusatz, der übrigens bei den unterbestimmten Systemen unnötig ist — denn bei diesen enthält jede k-reihige Determinante einer solchen Matrix $J^{(1)}$ — auch der entsprechenden Bedingung in (I) I 4a bei, da hierdurch gewisse Ausnahmsfälle wie die in (I), S. 136 u. 138 (gleichzeitiges Verschwinden von F_{p_1}, F_{p_2} bzw. von $\frac{\partial(F_1, F_2, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}$ und $\frac{\partial(F_1, F_2, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_4)}$) ausgeschlossen werden. Daß jene Ausnahmsfälle bei den unterbestimmten Systemen schon infolge (I) I 4a nicht auftreten können, wurde dadurch übersehen, daß die zweite Bedingung von 4a, die diese Ausnahmsfälle unmöglich macht, erst im Laufe der Arbeit hinzugefügt wurde.

**) Das gleiche gilt von den Bedingungen von (I) I 4, 4a.

die J linear homogen mit endlichen Koeffizienten darstellen. Daraus folgt einmal, daß in der Umgebung der betrachteten Stelle die Gleichungen $J_1^{(1)}=0, \cdots, J_{5-k-i}^{(k)}=0$ mit den Gleichungen $J_1^{*(1)}=0, \cdots, J_{5-k-i}^{*(k)}=0$ gleichwertig sind. Da sich dann weiter die in 3) und 4) auftretenden Determinanten, mit den J gebildet, in Berücksichtigung von 1) und mit Hinsicht auf die Gleichungen

$$J_1^{*(1)}=0, \cdots, J_{5-k-i}^{*(k)}=0$$

linear homogen durch die den betreffenden Bedingungen genügenden Determinanten darstellen lassen, die mit den J^* gebildet sind, so folgt unmittelbar die Richtigkeit unseres oben ausgesprochenen Satzes.

4. Da die $r_{j,l}$, in denen l einen festen Wert besitzt, in keinem der T außer in T_l vorkommen, da ferner infolge Bedingung 3) mindestens einer der Differentialquotienten $\frac{\partial J_h^{(1)}}{\partial r_{j,l}}$ $[h=1, \cdots, 5-i-k; j=1, \cdots, k]$ von Null verschieden sein muß, so folgt sofort der Satz: *Es gibt in der Umgebung unserer Stelle ein taugliches System, so daß in der zu seiner Bildung zugrunde gelegten Reihe der drei Funktionen $F_m, \cdots, T_p$ ein beliebiges T_l nicht auftritt.* In einem solchen System J^* sind dann die Funktionen einer der Reihen $J_h^{*(1)}, J_h^{*(2)}, \cdots, J_h^{*(k)}$ $(h=1, \cdots, 5-i-k)$, etwa für $h=h_0$, in den $r_{j,l}$ linear, während die übrigen J^* von den $r_{j,l}$ unabhängig sind. Aus 3) folgt dann

$$\frac{\partial\left(J_{h_0}^{*(1)}, J_{h_0}^{*(2)}, \cdots, J_{h_0}^{*(k)}\right)}{\partial\left(r_{1,l}, r_{2,l}, \cdots, r_{k,l}\right)} \neq 0.$$

Obigen Schluß kann man in Berücksichtigung des Satzes von 3. $(5-i-k)$ mal wiederholen; wir erhalten so ein taugliches System, bei dem in der zugrundegelegten Reihe $F_m, \cdots, T_p$ $(5-i-k)$ irgendwie gewählte T fehlen. Dann treten alle F in dieser Reihe auf und wir können daraus schließen, *daß* $\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_{4-i})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ *vom Range* $4-i$ *ist.* Numerieren wir die T so, daß gerade T_1 bis T_{5-i-k} in der Reihe $F_m, \cdots, T_p$ fehlen und bezeichnen wir die hiermit gebildeten J derart, daß

$$J_l^{(1)} \equiv \frac{\partial(T_l, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \qquad [l=1, \cdots, 5-i-k],$$

so ist die $k(5-i-k)$-reihige Determinante

$$\frac{\partial\left(J_1^{(1)}, \cdots, J_{5-i-k}^{(k)}\right)}{\partial\left(r_{1,1}, \cdots, r_{k,1}, r_{1,2}, \cdots, r_{k,5-i-k}\right)} = \frac{\partial\left(J_1^{(1)}, J_1^{(2)}, \cdots, J_1^{(k)}\right)}{\partial\left(r_{1,1}, r_{2,1}, \cdots, r_{k,1}\right)}$$

$$\cdot \frac{\partial\left(J_2^{(1)}, \cdots, J_2^{(k)}\right)}{\partial\left(r_{1,2}, r_{2,2}, \cdots, r_{k,2}\right)} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial\left(J_{5-i-k}^{(1)}, \cdots, J_{5-i-k}^{(k)}\right)}{\partial\left(r_{1,5-i-k}, \cdots, r_{k,5-i-k}\right)} \neq 0.$$

Daraus folgt für ein beliebiges taugliches J-System: *Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die Matrix* $\dfrac{\partial(J_1^{(1)}, \cdots, J_{5-i-k}^{(k)})}{\partial(r_{1,1}, \cdots, r_{k,4-k})}$ *vom Range* $k(5-i-k)$.*)

5. Wir leiten noch folgenden Satz ab, der bei den Entwicklungen von (I) V eine ziemliche Rolle spielt: *Das System unserer Voraussetzungen ist im Falle* $5-i-k>1$ *gegenüber Transformationen der* $(4-k)$ *Veränderlichen* $x_1, x_2, \cdots, x_{4-k}$ *von nicht verschwindender Determinante und von entsprechendem Stetigkeitscharakter invariant.* Da eine derartige Transformation an jeder Stelle den Charakter einer ganzen linearen Transformation nicht verschwindender Determinante besitzt, so können wir unsere Betrachtung auf diese beschränken. Ist $4-k=1$, so ist unser Satz selbstverständlich; ist $4-k>1$, so genügt es, den Satz für die Transformation

$$\xi_1 = \alpha x_1 + \beta x_2,\ \xi_2 = x_2,\ \cdots,\ \cdots,\ \xi_{4-k} = x_{4-k};\ \alpha \neq 0$$

nachzuweisen, da sich die allgemeinste ganze lineare Transformation, abgesehen von Vertauschungen der Indizes, aus derartigen Substitutionen und aus Translationen zusammensetzt, welch letzteren gegenüber das System der Bedingungen, wie man sofort sieht, invariant ist. Bezeichnen wir mit π und ϱ die den p und r entsprechenden Differentialquotienten, so haben wir

$$p_1 = \alpha\pi_1,\ p_2 = \beta\pi_1 + \pi_2,\ p_3 = \pi_3,\ p_4 = \pi_4,$$
$$r_{l,1} = \alpha\varrho_{l,1},\ r_{l,2} = \beta\varrho_{l,1} + \varrho_{l,2},\ r_{l,4-k} = \varrho_{l,4-k}{}^{**)}\quad (l = 0, 1, \cdots, k).$$

Wir erhalten einmal

$$T_1 = \alpha\Theta_1,\ T_2 = \beta\Theta_1 + \Theta_2,\ \cdots,\ T_{4-k} = \Theta_{4-k},$$

wenn wir entsprechend

$$\Theta_j \equiv \varrho_{0,j} - \pi_j - \pi_{5-k}\varrho_{5-k,j} - \cdots - \pi_4\varrho_{4,j}$$

setzen. Die J mit den Θ gebildet, bezeichnen wir als J^*. Vor allem ist klar, daß durch unsere Transformation weder Bedingung 2) noch Bedingung 4) geändert wird, auch wenn wir die T durch die Θ und die J durch die J^* ersetzen, da sich die dreireihigen Determinanten der Matrix in 2) und die vierreihigen Determinanten der Matrix in 4) linear homogen mit endlichen Koeffizienten durch die bezüglichen Determinanten der entsprechenden Matrizen darstellen lassen. Um die Invarianz der Voraussetzung 3) nachzuweisen, verwenden wir ein J-System, in dessen zugrundeliegender Reihe $F_m, \cdots, T_p, T_1$ und T_2 nicht auftreten; dies ist nach 4. stets möglich. Bezeichnen wir die Funktionen

*) In (I) I 4a ist dies als Voraussetzung aufgestellt; doch folgt es schon aus dem zweiten Teile der Bedingung von 4a mit der Ergänzung, die sie hier in Bedingung 3) erhalten hat; wie dann überhaupt die Entwicklungen von 4. und 5. dieser Arbeit gültig sind.

**) Die letzte Gleichung gilt natürlich nur für $4-k>2$.

$$\frac{\partial(T_1, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \quad \frac{\partial(T_2, F_m, \cdots, T_p)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \quad \frac{\partial(\Theta_1, F_m, \cdots, \Theta_p)}{\partial(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)}, \quad \frac{\partial(\Theta_2, F_m, \cdots, \Theta_p)}{\partial(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)}$$

bezüglich mit $J_1^{(1)}$, $J_2^{(1)}$, $J_1^{*(1)}$, $J_2^{*(1)}$, so haben wir

$$J_1^{(1)} = J_1^{*(1)}, \; J_2^{(1)} = \frac{\beta}{\alpha} J_1^{*(1)} + \frac{1}{\alpha} J_2^{*(1)}, \cdots, J_m^{(1)} = \frac{1}{\alpha} J_m^{*(1)}$$

und entsprechend

$$J_1^{(j)} = \frac{1}{\alpha^{j-1}} J_1^{*(j)}, \; J_2^{(j)} = \frac{\beta}{\alpha^j} J_1^{*(j)} + \frac{1}{\alpha^j} J_2^{*(j)}, \cdots, J_m^{(j)} = \frac{1}{\alpha^j} J_m^{*(j)}.$$

Nun ist andererseits

$$\frac{\partial}{\partial(r_{1,l}, r_{2,l}, \cdots, r_{k,l})} = \frac{\partial}{\partial(\varrho_{1,l}, \varrho_{2,l}, \cdots, \varrho_{k,l})} \quad (l = 2, \cdots, 4-k),$$

daher ist gleich ersichtlich, daß Bedingung 3) für $l = 2, \cdots, 4-k$ erfüllt ist. Sie ist aber auch für $l = 1$ erfüllt, denn

$$\frac{\partial}{\partial r_{h,1}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \varrho_{h,1}} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \varrho_{h,2}};$$

$J_1^{*(1)}, \cdots, J_1^{*(k)}$ sind aber von den $\varrho_{h,2}$ unabhängig, so daß

$$\frac{\partial\left(J_1^{(1)}, \cdots, J_1^{(k)}\right)}{\partial(r_{1,1}, \cdots, r_{k,1})} = \frac{1}{\alpha^{\frac{k(k+1)}{2}}} \cdot \frac{\partial\left(J_1^{*(1)}, \cdots, J_1^{*(k)}\right)}{\partial(\varrho_{1,1}, \cdots, \varrho_{k,1})}.$$

Vorstehender Satz versagt bei den unterbestimmten Systemen $i + k = 4$, wir müssen daher, falls die darzustellende Lösung von den berührenden Integralen des vorgelegten vollständigen Integrales nicht punktförmig berührt wird, eigens voraussetzen, daß die Funktion $\frac{\partial\left(J_1^{*(1)}, J_1^{*(2)}, \cdots, J_1^{*(k)}\right)}{\partial(\varrho_{1,1}, \varrho_{2,1}, \cdots, \varrho_{k,1})}$ von Null verschieden ausfällt für die bei der zweiten Beweismethode in (I) III. verwendete Transformation, durch die die Projektion der $(3-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, längs der ein für den Beweis aus dem vollständigen Integral hergestelltes Integral die darzustellende Lösung berührt, in dem $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{4-k})$-Raume die Gleichung $\xi_1 = \text{const.}$ erhält. Dies hat insofern wenig Bedeutung, da diese Fälle Ausnahmsfälle sind und sich in jedem Falle brauchbare Integralscharen herstellen lassen, durch die die integrallose Darstellung, wenn auch möglicherweise nicht mit Hilfe des vorgelegten vollständigen Integrals, gewährleistet ist.

6. Geben wir den Gleichungen $F_1 = 0, \cdots, F_{4-i} = 0$ eine andere Gestalt, so können wir diese Umformung so bewerkstelligt denken, daß wir in gewissen Identitäten

$$G_1(x; p; F_1, \cdots, F_{4-i}) = 0, \cdots, G_{4-i}(x; p; F_1, \cdots, F_{4-i}) = 0$$

für $F_1, \cdots, F_{4-i}$ die Werte Null einsetzen. Dadurch erhalte ich ein System von Gleichungen $F_1^* = 0, \cdots, F_{4-i}^* = 0$. Sind die G eindeutige und

$(3+k)$-, bzw. $(2k+1)$-fach stetig differenzierbare Funktionen der F sowie der x und p, für die $D \equiv \frac{\partial(G_1, \cdots, G_{4-i})}{\partial(F_1, \cdots, F_{4-i})} \neq 0$, so wollen wir das System der F^* ein mit dem System der F „gleichberechtigtes" nennen. Man erkennt ohne weiteres, daß für ein *gleichberechtigtes System die Voraussetzungen* 1), 2) *erhalten bleiben.*

Wir betrachten nun eines jener Systeme der J^* — die mit den F^* genau so gebildet sind wie die J mit den F —, in dessen zugrundeliegender Reihe $F_m^*, \cdots, T_k$ alle F^* auftreten. Man erkennt sofort, daß $J_l^{*(h)}$ sich homogen linear mit den endlichen Koeffizienten aus den $J_l^{(g)} (g \leq h)$ zusammensetzt und daß hierbei insbesondere der Koeffizient von $J_l^{(h)}$: $D^h \neq 0$ ist. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$J_1^{(1)} = 0, \; \cdots, \; J_{5-i-k}^{(k)} = 0,$$

daß Voraussetzung 3) *auch vom System der F^* erfüllt wird.* Dies läßt sich aber von Voraussetzung 4) nicht mehr behaupten. Einen gewissen Ersatz bietet es, *daß es nicht verschwindende $J^{*(k+1)}$ gibt*; denn auf ein System von F, daß den Voraussetzungen 1), 2), 3) genügt und für das es nicht verschwindende $J^{*(k+1)}$ gibt, lassen sich die Entwicklungen von (I) anwenden.

Es gilt aber anscheinend weiter der Satz, *daß unter diesen Umständen ein Übergang zu einem „gleichberechtigten" System möglich ist, für das — mit Ausnahme von minderdimensionierten Wertgebieten — auch Voraussetzung* 4) *gilt.* Die Ausnahmewerte erledigen sich hinterher durch Stetigkeitsbetrachtungen. Wir wollen dies nicht allgemein beweisen, sondern die Beweismethode an dem Falle $i = 1$, $k = 3$ auseinandersetzen. Wir erhalten hier mit Rücksicht auf die Gleichungen $J^{(1)} = 0$, $J^{(2)} = 0$, $J^{(3)} = 0$

$$J^{*(1)} = D \cdot J^{(1)},$$

$$J^{*(2)} = D^2 \cdot J^{(2)} + D_1 J^{(1)},$$

$$J^{*(3)} = D^3 \cdot J^{(3)} + D_2 J^{(2)} + D_3 J^{(1)},$$

$$\frac{\partial J^{*(1)}}{\partial p_i} + \sum_1^3 {}_h \frac{\partial J^{*(1)}}{\partial F_h} \cdot \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \sim D \frac{\partial J^{(1)}}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial J^{*(2)}}{\partial p_i} + \sum_1^3 {}_h \frac{\partial J^{*(2)}}{\partial F_h} \cdot \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \sim D^2 \frac{\partial J^{(2)}}{\partial p_i} + D_1 \frac{\partial J^{(1)}}{\partial p_i},$$

$$\frac{\partial J^{*(3)}}{\partial p_i} + \sum_1^3 {}_h \frac{\partial J^{*(3)}}{\partial F_h} \cdot \frac{\partial F_h}{\partial p_i} \sim D^3 \frac{\partial J^{(3)}}{\partial p_i} + D_2 \frac{\partial J^{(2)}}{\partial p_i} + D_3 \frac{\partial J^{(1)}}{\partial p_i},$$

und daraus folgt, daß

$$\frac{\partial(T, J^{*(1)}, J^{*(2)}, J^{*(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial T}{\partial p_1}, & D\frac{\partial J^{(1)}}{\partial p_1}, & \cdots, & D^3\frac{\partial J^{(3)}}{\partial p_1} + D_2\frac{\partial J^{(2)}}{\partial p_1} + D_3\frac{\partial J^{(1)}}{\partial p_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_1}, & \cdots, & \frac{\partial F_3}{\partial p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial T}{\partial p_4}, & D\frac{\partial J^{(1)}}{\partial p_4}, & \cdots, & D^3\frac{\partial J^{(3)}}{\partial p_4} + D_2\frac{\partial J^{(2)}}{\partial p_4} + D_3\frac{\partial J^{(1)}}{\partial p_4}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_4}, & \cdots, & \frac{\partial F_3}{\partial p_4} \\ 0, & \frac{\partial J^{*(1)}}{\partial F_1}, & \cdots, & \frac{\partial J^{*(3)}}{\partial F_1}, & 1, & \cdots, & 0 \\ 0, & \frac{\partial J^{*(1)}}{\partial F_2}, & \cdots, & \frac{\partial J^{*(3)}}{\partial F_2}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & \frac{\partial J^{*(1)}}{\partial F_3}, & \cdots, & \frac{\partial J^{*(3)}}{\partial F_3}, & 0, & \cdots, & 1 \end{vmatrix}.$$

Nun ist es leicht ersichtlich, daß es genügt, den Satz für den Fall zu beweisen, daß das System der F in der Form vorliegt

$$\bar{F}_1 \equiv p_1 - f_1(p_4) = 0, \quad \bar{F}_2 \equiv p_2 - f_2(p_4) = 0, \quad \bar{F}_3 \equiv p_3 - f_3(p_4) = 0,$$

da ja $\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ vom Range drei ist und daher die F nach drei der p aufgelöst werden können. In diesem Falle ist stets $\frac{\partial(T, \bar{J}^{(1)}, \bar{J}^{(2)}, \bar{J}^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ Null, da ja $\bar{J}^{(1)}, \bar{J}^{(2)}, \bar{J}^{(3)}$ nur von p_4 abhängen und zwar ist

$$\bar{J}^{(1)} \equiv -r_3 - \frac{df_1}{dp_4} - r_1\frac{df_2}{dp_4} - r_2\frac{df_3}{dp_4} = 0,$$

$$\bar{J}^{(2)} \equiv \frac{\partial \bar{J}^{(1)}}{\partial p_4} = 0, \quad \bar{J}^{(3)} \equiv \frac{\partial \bar{J}^{(2)}}{\partial p_4} = 0, \quad \bar{J}^{(4)} \equiv \frac{\partial \bar{J}^{(3)}}{\partial p_4} \neq 0.$$

Wir bekommen hier

$$\frac{\partial(T, J^{*(1)}, J^{*(2)}, J^{*(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$$

$$= D^3\frac{\partial \bar{J}^{(3)}}{\partial p_4}\left[-\frac{\partial(J^{*(1)}, J^{*(2)})}{\partial(\bar{F}_2, \bar{F}_3)} + r_1\frac{\partial(J^{*(1)}, J^{*(2)})}{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_3)} + r_2\frac{\partial(J^{*(1)}, J^{*(2)})}{\partial(\bar{F}_2, \bar{F}_1)}\right],$$

dabei ist

$$\frac{\partial J^{*(h)}}{\partial \bar{F}_k} = -\frac{\partial J^{*(h)}}{\partial p_k} \qquad [h = 1, 2;\ k = 1, 2, 3].$$

Setzen wir daher

$$F_1^* \equiv p_1 + p_2^2 + p_3^3 - f_1(p_4) - f_2(p_4)^2 - f_3(p_4)^3, \qquad F_2^* \equiv p_2 - f_2(p_4) = 0,$$
$$F_3^* \equiv p_3 - f_3(p_4) = 0,$$

so sind $\frac{\partial(J^{*(1)}, J^{*(2)})}{\partial(\bar{F}_1, \bar{F}_3)}$, $\frac{\partial(J^{*(1)}, J^{*(2)})}{\partial(\bar{F}_2, \bar{F}_1)}$ gleich Null, während

$$\frac{\partial(J^{*(1)}, J^{*(2)})}{\partial(\bar{F}_2, \bar{F}_3)} = \frac{\partial J^{*(1)}}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial J^{*(2)}}{\partial p_3} = 12 \cdot \frac{df_2}{dp_4}\left(\frac{df_3}{dp_4}\right)^2.$$

Nun können $\frac{\partial f_2}{\partial p_4}$ und $\frac{\partial f_3}{\partial p_4}$ nur in einzelnen Punkten verschwinden; denn

$$\frac{\partial(J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)})}{\partial(r_1, r_2, r_3)} = - \begin{vmatrix} \frac{d^2 f_2}{dp_4^2} & \frac{d^2 f_3}{dp_4^2} \\ \frac{d^3 f_2}{dp_4^3} & \frac{d^3 f_3}{dp_4^3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Hiermit ist unser Satz bewiesen.

7. Unter unseren Voraussetzungen können wir nun aus den Gleichungen (2) und (3) $[4 + k(4 - i - k)]$ r als eindeutige, nach den p $(k+1)$-fach stetig differenzierbare Funktionen der p (und der übrigen r) berechnen. Es lassen sich dann die p als eindeutige $(k+1)$-fach stetig differenzierbare Funktionen von 4 dieser $[4 + k(4 - i - k)]$ r (und der übrigen r) ausdrücken. Denn nach 3) gibt es eine von Null verschiedene vierreihige Determinante

$$0 \neq \frac{\partial(T_h, \cdots, J_j^{(k)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = \sum \frac{\partial(T_h, \cdots, J_j^{(k)})}{\partial(r_m, r_n, r_s, r_t)} \frac{\partial(r_m, r_n, r_s, r_t)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)},$$

wobei in der Summe rechts alle Kombinationen ohne Wiederholung von je 4 Elementen obiger $[4 + k(4 - i - k)]$ r auftreten. Daher muß eine der Determinanten $\frac{\partial(r_m, r_n, r_s, r_t)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ von Null verschieden sein. Führen wir die so berechneten p in die übrigen Gleichungen ein, so erhalten wir einmal $k(4 - i - k)$ r durch die übrigen ausgedrückt. Führen wir dann die p Werte auch in die Gleichungen (1) ein, so erhalten wir noch $(4 - i)$ Gleichungen zwischen diesen r, die voneinander unabhängig sind, denn nach 4. gilt

$$0 \neq \frac{\partial(F_1, \cdots, F_{4-i})}{\partial(p_j, p_n, \cdots, p_q)} = \sum \frac{\partial(F_1, \cdots, F_{4-i})}{\partial(r_e, r_f, \cdots, r_g)} \cdot \frac{\partial(r_e, r_f, \cdots, r_g)}{\partial(p_j, p_n, \cdots, p_q)}$$

für bestimmte $(4 - i)$ Werte $p_j, p_n, \cdots, p_q$. In der Summe rechts sind $e, f, \cdots, g$ irgendeine Kombination von $4 - i$ der $4\,r$, deren Gleichungen wir oben nach den p aufgelöst haben. Es muß daher einer der Ausdrücke $\frac{\partial(F_1, \cdots, F_{4-i})}{\partial(r_e, r_f, \cdots, r_g)}$ von Null verschieden sein.

Die so erhaltenen $[(k+1)(4 - i) - k^2]$ Gleichungen, die wir in (I) als das Gleichungssystem (B) bezeichnet haben, sind in der Umgebung der betrachteten Stelle $r_{0,1}^0, \cdots, r_{k,n-k}^0$ eindeutig, nach den r $(k+1)$-fach stetig differenzierbar und ihre Funktionalmatrix nach den r ist von Null verschieden.

Selbstverständlich kann man durch andere Gestaltung der Elimination das Gleichungssystem (B) in einer anderen Form erhalten.

II.

Die unterbestimmten Differentialgleichungssysteme.

1. Bei den folgenden Betrachtungen werden wir ein solches taugliches J-System verwenden, in dessen zugrundeliegender Reihe alle F vorkommen. Wir denken uns das Gleichungssystem (B) in der in I. 6. angegebenen Weise hergestellt; wir wollen jedoch die p-Werte nicht mehr der Beschränkung unterwerfen, daß sie den Gleichungen (1) genügen. Man erhält so eine Transformation der F:

$$F_1(p) + \Phi_1(r) = 0,\ F_2(p) + \Phi_2(r) = 0, \cdots, F_{4-i}(p) + \Phi_{4-i}(r) = 0. \tag{4}$$

Die Funktionen F und Φ behalten dabei in einer genügend kleinen Umgebung der betrachteten Stelle, für die $F = 0$, $\Phi = 0$ ist, ihre Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften.

2. Es soll nunmehr die allgemeine Methode an dem Fall $i = 1$ entwickelt werden. Durch die Gleichungen

$$T \equiv r_0 - p_1 - p_2 r_1 - p_3 r_2 - p_4 r_3 = 0, \tag{5}$$

$$J^{(1)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0,\quad J^{(2)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J^{(1)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0, \tag{6}$$

$$J^{(3)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0$$

erhalten wir

$$F_1(p) + \Phi_1(r) = 0,\quad F_2(p) + \Phi_2(r) = 0,\quad F_3(p) + \Phi_3(r) = 0. \tag{7}$$

Es ist sofort ersichtlich, daß in der Umgebung unserer betrachteten Stelle das Gleichungssystem (7) in Verbindung mit $J^{(3)} = 0$ den Gleichungen (5) und (6) äquivalent ist; ich kann es einmal nach den p auflösen, da

$$J^{(4)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0$$

laut Voraussetzung, und diese p-Werte müssen dann den Gleichungen $T = 0$, $J^{(1)} = 0$, $J^{(2)} = 0$ genügen. Ich betrachte nun das System

$$F_1(p) + \Phi_1(r) = 0,\quad F_2(p) + \Phi_2(r) = 0,\quad F_3(p) + \Phi_3(r) = 0, \tag{7}$$

$$J^{(3)} = \lambda. \tag{8}$$

Für hinreichend kleine Werte von λ läßt sich auch dieses System nach den p auflösen und die betreffenden Transformationsformeln sind nach λ viermal stetig differenzierbar. Setzen wir jetzt die p-Werte in die Funktionen T, $J^{(1)}$, $J^{(2)}$ ein, so erhalten wir Funktionen von λ und r, die für $\lambda = 0$ verschwinden. Für die Differentialquotienten dieser Funktionen nach λ finden wir mittels der Beziehungen

$$0 = \sum_1^4 \frac{\partial F_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \lambda}\ (j=1,2,3);\quad +1 = \sum_1^4 \frac{\partial J^{(3)}}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda} = \sum_1^4 \frac{\partial T}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \lambda};\quad \frac{\partial J^{(h)}}{\partial \lambda} = \sum_1^4 \frac{\partial J^{(h)}}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \lambda}\ (h=1,2)$$

die Gleichungen

$$J^{(4)}\frac{\partial T}{\partial \lambda} = J^{(1)},\quad J^{(4)}\frac{\partial J^{(1)}}{\partial \lambda} = J^{(2)},\quad J^{(4)}\frac{\partial J^{(2)}}{\partial \lambda} = J^{(3)}$$

und hieraus erhalten wir, wenn wir die Differenzierbarkeitseigenschaften beachten,

(9) $J^{(2)} = \frac{1}{2!}\frac{\lambda^2}{J_0^{(4)}} + (\lambda^3),\quad J^{(1)} = \frac{1}{3!}\frac{\lambda^3}{[J_0^{(4)}]^2} + (\lambda^4),\quad T = \frac{1}{4!}\frac{\lambda^4}{[J_0^{(4)}]^3} + (\lambda^5).$

Hierbei bezeichnen wir mit $J_0^{(4)}$ den Wert, den wir erhalten, wenn wir in $J^{(4)}$ die p durch die r und λ ausdrücken und sodann $\lambda = 0$ setzen; $J_0^{(4)}$ ist in genügend kleiner Umgebung unserer Stelle von Null verschieden. Unter (λ^j) verstehen wir eine Funktion von r und λ, deren Quotient durch λ^j in der Umgebung von $\lambda = 0$ endlich bleibt.

Nach unseren Voraussetzungen ist $\Delta = \frac{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ von Null verschieden, wenn wir die r und λ nur genügend beschränken. Wir erhalten dann

(10) $$K^{(1)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = J^{(1)}\Delta + (\lambda^4),$$

und wenn wir den Wert von Δ für $\lambda = 0$ mit Δ_0 bezeichnen sowie die Gleichungen (9) berücksichtigen, so folgt

$$K^{(1)} = \frac{1}{3!}\frac{\Delta_0}{[J_0^{(4)}]^2}\lambda^3 + (\lambda^4).$$

In dem Ausdrucke von $K^{(1)}$: $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ tritt λ nicht explizit auf. Für $\frac{\partial K_1}{\partial \lambda}$ ergibt sich daher einmal

$$\frac{1}{2!}\frac{\Delta_0}{[J_0^{(4)}]^2}\lambda^2 + (\lambda^3),$$

andererseits aber

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, K_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \cdot \frac{1}{J^{(4)}},$$

so daß

$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, K^{(1)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = \frac{1}{2!}\frac{\Delta_0}{J_0^{(4)}}\lambda^2 + (\lambda^3).$$

Nun ist

(11) $$K^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, K^{(1)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, K^{(1)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}\Delta + (\lambda^3),$$

also
$$K^{(2)} = \frac{1}{2!}\frac{\Delta_0^2}{J_0^{(4)}}\lambda^2 + (\lambda^3).$$

Analog wie früher schließen wir nun weiter, indem wir den Differentialquotienten von $K^{(2)}$ nach λ berechnen,
$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, K^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = \Delta_0^2\lambda + (\lambda^2),$$
daher

(12)
$$K^{(3)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, K^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = \Delta_0^3\lambda + (\lambda^2),$$
und da
$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, K^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = \Delta_0^3 J_0^{(4)} + (\lambda),$$
so haben wir schließlich

(13)
$$K^{(4)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = \Delta_0^4 J_0^{(4)} + (\lambda).$$

Wir erhalten hieraus für $\lambda = 0$, *daß alle vierreihigen Determinanten der Matrix*
$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T, K^{(1)}, K^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$$
sowie der Matrix
$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T, K^{(1)}, K^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}\,{}^{*})$$
verschwinden, während $K^{(4)}$ von Null verschieden ist.

Von Gleichung (10) können wir übrigens auch folgendermaßen fortfahren: Wir geben einmal der Gleichung (10) die Gestalt

$(10)_1$
$$K^{(1)} = J^{(1)}\Delta_0 + (\lambda^4).$$

Da in $J^{(1)}$ λ ebenfalls nicht explizit vorkommt, so erhalten wir wiederum durch Berechnung der Differentialquotienten nach λ
$$\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, K^{(1)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = J^{(2)}\Delta_0 + (\lambda^3),$$
also
$$K^{(2)} = J^{(2)}\Delta_0^2 + (\lambda^3),$$
und entsprechend
$$K^{(3)} = J^{(3)}\Delta_0^3 + (\lambda^2), \quad K^{(4)} = J^{(4)}\Delta_0^4 + (\lambda).$$

---

*) Analog verschwinden alle vierreihigen Determinanten der Matrix
$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T, J^{(1)}, J^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}.$$

Die K sind hierbei lineare Funktionen der p. Aus den Gleichungen

$$\sum \frac{\partial T}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = \frac{1}{3!}\frac{\lambda^3}{[J_0^{(4)}]^3} + (\lambda^4), \quad \sum \frac{\partial K^{(1)}}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = \frac{1}{2!}\frac{\Delta_0}{[J_0^{(4)}]^2}\lambda^2 + (\lambda^3),$$

$$\sum \frac{\partial K^{(2)}}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = \frac{\Delta_0^2}{J_0^{(4)}}\lambda + (\lambda^2), \quad \sum \frac{\partial K^{(3)}}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = \Delta_0^3 + (\lambda)$$

schließen wir, daß $\frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ *für* $\lambda = 0$ *von Null verschieden ist*. Wäre nämlich diese Determinante Null, so könnte dies nur so sein, daß die Matrix $\frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ von geringerem Range als vom Range drei ist. Aus den Gleichungen

$$\sum \frac{\partial T}{\partial p_i}\frac{\partial^2 p_i}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{2!}\frac{\lambda^2}{[J_0^{(4)}]^3} + (\lambda^3); \quad \sum \frac{\partial K^{(1)}}{\partial p_i}\frac{\partial^2 p_i}{\partial \lambda^2} = \frac{\Delta_0}{[J_0^{(4)}]^2}\lambda + (\lambda^2);$$

$$\sum \frac{\partial K^{(2)}}{\partial p_i}\frac{\partial^2 p_i}{\partial \lambda^2} = \frac{\Delta_0^2}{J_0^{(4)}} + (\lambda)$$

würde dann folgen, daß die Matrix $\frac{\partial(T, K^{(1)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ von geringerem Range als dem Range zwei ist und die Betrachtung der $\frac{\partial^3 p_i}{\partial \lambda^3}$ lehrt, daß dann alle $\frac{\partial T}{\partial p_i}$ Null sein müßten, während doch $\frac{\partial T}{\partial p_1}$ gleich -1 ist.

Aus

$$\frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = \frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \cdot \Delta$$

folgt sodann weiter, *daß für* $\lambda = 0$

$$\frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} \neq 0.$$

3. Haben wir jetzt umgekehrt *ein System von drei Gleichungen, die in den x und r eindeutig und* $(3 + 2k)$*-fach stetig differenzierbar sind,*

$$\Phi_1(r) = 0, \quad \Phi_2(r) = 0, \quad \Phi_3(r) = 0,$$

für die $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ *vom Range drei ist, ist sodann* $\frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0$ *und für die aus den Gleichungen* $T = 0$, $K^{(1)} = 0$, $K^{(2)} = 0$, $K^{(3)} = 0$ *bestimmten* p $\frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ *von Null verschieden*, so gelangen wir durch Elimination der r zu einem System von Gleichungen

$$F_1(p) = 0, \quad F_2(p) = 0, \quad F_3(p) = 0,$$

die in den x, p eindeutig und $(3+k)$-fach stetig differenzierbar sind und für die $\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ vom Range drei ist. Bilden wir die Ausdrücke $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$, so werden diese Funktionen für die Wertesysteme p, r, die in der Umgebung unsrer Stelle den Gleichungen $\Phi = 0$, $T = 0$, $K = 0$ genügen, verschwinden. Dabei sind $\frac{\partial(T, J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ und $\frac{\partial(T, J^{(1)}, J^{(2)}, J^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ von Null verschieden. Den Beweis hierfür erhalten wir durch die Schlußweise von 2, wenn wir dort die F und Φ, die J und K ihre Rolle tauschen lassen. Wir können uns also zu den Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ ein System $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ herstellen, aus dem sich das System der Φ durch die Methoden von (I) ergibt und *wir können so die integrallose Lösung der Gleichungen Φ bewerkstelligen, wenn das so erhaltene System F ein Involutionssystem ist.*

4. Die Bedingung, daß die F ein Involutionssystem bilden, ist durch die Gleichungen gegeben:

$$[F_1, F_2] = 0, \quad [F_1, F_3] = 0, \quad [F_2, F_3] = 0,$$

wobei

$$[\Psi, X] = \sum_{i=1}^{i=4} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \frac{dX}{dx_i} - \frac{d\Psi}{dx_i} \frac{\partial X}{\partial p_i} \right\}; \quad \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial x_5}.$$

Es läßt sich nun, wenn auch gerade nicht in eleganter Gestalt, daraus eine Bedingung herleiten, aus der man erkennen kann, ob das aus den Φ abzuleitende System der F ein Involutionssystem ist, ohne sich das System der F herstellen zu müssen. Wir gehen hierzu von den Gleichungen aus

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} + \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r_e} \frac{\partial r_e}{\partial x_j} = 0 \ [i = 1, 2, 3]; \quad \sum_{e=0}^{3} \frac{\partial T}{\partial r_e} \frac{\partial r_e}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial K^{(m)}}{\partial x_j} + \sum_{e=0}^{3} \frac{\partial K^{(m)}}{\partial r_e} \frac{\partial r_e}{\partial x_j} = 0 \ [m = 1, 2, 3] \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Bezeichnen wir die Operation

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot r_1 + \frac{\partial}{\partial x_3} r_2 + \frac{\partial}{\partial x_4} r_3 + \frac{\partial}{\partial x_5} r_0$$

mit $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x_1}$ und machen wir Gebrauch von der in der Fußnote S. 268 angegebenen Identität, so erhalten wir die Involutionsbedingungen in der Form

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_1}\frac{\partial(\Phi_n, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}\frac{\partial(\Phi_m, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$$

$$+ \frac{\partial K^{(1)}}{\partial x_1}\frac{\partial(\Phi_m, \Phi_n, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} - \frac{\partial K^{(2)}}{\partial x_1}\frac{\partial(\Phi_m, \Phi_n, K^{(1)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$$

$$+ \sum_{e=2}^{4} \frac{\partial K^{(1)}}{\partial p_e}\frac{d\Phi_m}{dx_e} \cdot \frac{\partial(\Phi_n, T, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} - \frac{\partial K^{(2)}}{\partial p_e} \cdot \frac{d\Phi_m}{dx_e} \cdot \frac{\partial(\Phi_n, T, K^{(1)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$$

$$- \frac{\partial K^{(1)}}{\partial p_e}\frac{d\Phi_n}{dx_e} \cdot \frac{\partial(\Phi_m, T, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} + \frac{\partial K^{(2)}}{\partial p_e}\frac{d\Phi_n}{dx_e}\frac{\partial(\Phi_m, T, K^{(1)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$$

$$- \left(\frac{\partial K^{(1)}}{\partial p_e}\frac{dK^{(2)}}{dx_e} - \frac{\partial K^{(2)}}{\partial p_e}\frac{dK^{(1)}}{dx_e}\right)\frac{\partial(\Phi_m, \Phi_n, T, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = 0$$

$$[m; n = 1, 2, 3] \cdot \left(\frac{d}{dx_e} = \frac{\partial}{\partial x_e} + p_e \frac{\partial}{\partial x_5}\right).$$

Hierbei denken wir uns die p, die noch in diesen Gleichungen stecken, mittels der in p linearen Gleichungen $K^{(1)} = 0$, $K^{(2)} = 0$, $K^{(3)} = 0$ eliminiert und so die Bedingungen zwischen den x und r hergestellt.

Jedenfalls erkennen wir aus der Gestalt der Bedingung, daß die F ein Involutionssystem bilden werden, wenn die Φ von den x frei sind.*)

5. Gestalten wir die Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ in die Gleichungen $\overline{\Psi}_1 = 0$, $\overline{\Psi}_2 = 0$, $\overline{\Psi}_3 = 0$ um, so können wir diese Umgestaltung so auffassen, daß wir in den Identitäten

$$\Psi_1(r_0, r_1, r_2, r_3, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = 0, \quad \Psi_2(r, \Phi) = 0, \quad \Psi_3(r, \Phi) = 0$$

für Φ_1, Φ_2, Φ_3 den Wert Null setzen; sind dabei die Ψ Funktionen von r und Φ von entsprechendem Stetigkeitscharakter und ist in der Umgebung unserer Stelle $\Delta = \frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}$ von Null verschieden, dann ist einmal *die Matrix* $\frac{\partial(\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, \overline{\Psi}_3)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ *von Null verschieden.* Bilden wir dann mit $\overline{\Psi}_1$, $\overline{\Psi}_2$, $\overline{\Psi}_3$ $\overline{K}^{(1)}, \overline{K}^{(2)}, \overline{K}^{(3)}, \overline{K}^{(4)}$, so haben wir

$$\overline{K}^{(1)} = \nabla K^{(1)}, \quad \overline{K}^{(2)} = \nabla^2 K^{(2)} + G_1 K^{(1)}, \quad \overline{K}^{(3)} = \nabla^3 K^{(3)} + G_2 K^{(2)} + G_3 K^{(1)},$$

$$\overline{K}^{(4)} = \nabla^4 K^{(4)} + G_4 K^{(3)} + G_5 K^{(2)} + G_6 K^{(1)}.$$

Hierbei sind G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 stetige Funktionen der r. Daraus ersehen wir, daß $\overline{K}^{(1)}$, $\overline{K}^{(2)}$, $\overline{K}^{(3)}$ *verschwinden, während* $\overline{K}^{(4)}$ *von Null verschieden ist.* Zugleich ist

---

*) Siehe Goursat, a. a. O.

$$\frac{\partial(T, \overline{K}^{(1)}, \overline{K}^{(2)}, \overline{K}^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0,$$

während $\frac{\partial(T, \overline{K}^{(1)}, \overline{K}^{(2)}, \overline{K}^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ sehr wohl gleich Null werden kann.

Haben wir umgekehrt ein System von drei Funktionen $\Psi_1(r) = 0$, $\Psi_2(r) = 0$, $\Psi_3(r) = 0$ von den entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften, für die $\frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ vom Range drei ist, bilden wir dann hiermit die Funktionen $K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)}$, ist ferner $\frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0$ und für die aus den Gleichungen $T = 0$, $K^{(1)} = 0$, $K^{(2)} = 0$, $K^{(3)} = 0$ berechneten p $K^{(4)}$ von Null verschieden, so können wir das Gleichungssystem so transformieren, daß in unserem Gebiete auch $\frac{\partial(T, K^{(1)}, K^{(2)}, K^{(3)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ überall außer für isolierte Wertsysteme (r_0, r_1, r_2, r_3) von Null verschieden ist.*) Wir können daher die Resultate von 3. verwerten. Die Ausnahmswerte erledigen sich dabei durch Stetigkeitsbetrachtungen.

6. Nach dieser ausführlichen Erörterung des betrachteten Falles können wir uns im folgenden kurz fassen: Sind wir von der Gleichung

$$F(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0$$

mit Hilfe der Gleichungen

$$T_1 \equiv r_{0,1} - p_1 - r_{1,1}\, p_4 = 0, \quad T_2 \equiv r_{0,2} - p_2 - r_{1,2}\, p_4 = 0,$$
$$T_3 \equiv r_{0,3} - p_3 - r_{1,3}\, p_4 = 0 \tag{14}$$

$$J \equiv \frac{\partial(F, T_1, T_2, T_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0 \tag{15}$$

zur Gleichung

$$\Phi(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3};\ r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}) = 0$$

übergegangen, so folgern wir mit der Methode von 2., daß

$$K_1^{(1)} \equiv \frac{\partial(\Phi, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1})} = 0, \quad K_2^{(1)} \equiv \frac{\partial(\Phi, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2})} = 0,$$
$$K_3^{(1)} \equiv \frac{\partial(\Phi, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,3})} = 0, \tag{16}$$

während, wenn $J^{(2)} \neq 0$,

$$K_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi, T_2, T_3, K_1^{(1)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1})} \neq 0.$$

Es sind übrigens auch

$$K_2^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi, T_2, T_3, K_2^{(1)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2})}, \quad K_3^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi, T_2, T_3, K_3^{(1)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,3})}$$

von Null verschieden.

*) S. diese Arbeit I. 6.

Berechnen wir nun aus den Gleichungen (14) und der Gleichung $K_1^{(1)} = 0$ $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{0,3}$, $r_{1,1}$ als Funktionen der p und $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, so stellen diese Formeln die Umkehrung der Ausdrücke für die p dar, die wir aus den Gleichungen (14), (15) gewonnen haben. Führen wir diese Ausdrücke in die Gleichungen $K_2^{(1)}$ und $K_3^{(1)}$ ein, so erhalten wir Identitäten, die die Bedingung dafür darstellen, daß der Ausdruck, den wir erhalten, wenn wir in Φ $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{0,3}$, $r_{1,1}$ mittels unsrer Formeln eliminieren, auch $r_{1,2}$, $r_{1,3}$ nicht mehr enthält. Dieser Bedingung können wir eine andre Gestalt verleihen. Da die Gleichungen (14), (16) eine unmittelbare Folge der Gleichungen (14), (15) sind, so muß ich zu denselben Formeln für p_1, p_2, p_3, p_4 kommen, ob ich die p nun aus den Gleichungen (14), $K_1^{(1)} = 0$ oder (14) $K_2^{(1)} = 0$, oder (14) $K_3^{(1)} = 0$ berechne. Daraus aber folgt unmittelbar, daß *die Matrix*

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{0,2}}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{0,3}} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{1,1}}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{1,2}}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{1,3}} \end{matrix} \right\|$$

*von niederem als dem zweiten Range ist.**)

7. Durch Übergang zu einer „gleichberechtigten" Gleichung $\overline{\Phi}$ gehen die abgeleiteten Gleichungen, bzw. Ungleichungen für Φ in ebensolche für $\overline{\Phi}$ über.

Haben wir also eine Differentialgleichung $\Phi(r) = 0$, die in den x und r fünffach stetig differenzierbar ist, und für die die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{0,2}}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{0,3}} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{1,1}}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{1,2}}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial r_{1,3}} \end{matrix} \right\|$$

vom Range eins ist, so bilden wir die Gleichungen $K^{(1)} = 0$; sind dann für die p-Werte, die wir aus $K_1^{(1)} = 0$ und den Gleichungen (14) berechnen, $K_1^{(2)}$, $K_2^{(2)}$, $K_3^{(2)}$ von Null verschieden, sowie $\dfrac{\partial K_1^{(1)}}{\partial p_4} \neq 0$, so erhalten wir

*) Bei der Gleichung

$$\Phi\left(x_1, x_2, x_3, x_4; \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2}\right) = 0$$

kommt man zur Aufstellung der entsprechenden Bedingung auch durch Beantwortung der Frage: Sind p, q, r, s die nicht homogenen, nicht überzähligen Linienkoordinaten im Raume, wann stellt der Komplex

$$\Phi(p, q, r, s) = 0$$

den Tangentenkomplex einer Fläche dar? Man erhält als notwendige Bedingung

$$\Phi_p \Phi_s - \Phi_q \Phi_r = 0 .$$

durch Elimination der r eine Gleichung $F(p) = 0$, die in der Umgebung unserer Stelle den Voraussetzungen von I genügt und die die integrallose Lösung von $\Phi = 0$ ermöglicht.

8. Ebenso finden wir im Falle

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad J^{(1)} = 0, \quad J^{(2)} = 0,$$

der zu den unterbestimmten Gleichungen führt

$$\Phi_1 = 0, \ \Phi_2 = 0,$$

daß die vierreihigen Determinanten der Matrizen

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}; r_{1,1}, r_{1,2}; r_{2,1}, r_{2,2})}$$

bzw.

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2, K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, K_3^{(1)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}; r_{1,1}, r_{1,2}; r_{2,1}, r_{2,2})}$$

verschwinden, wobei $K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$, $K_3^{(1)}$ irgendein Basissystem der vierreihigen Determinanten der ersten Matrix bilden.

Die Bedingungen für die Φ_1, Φ_2*) finden wir, indem wir zeigen, daß die Gleichungen $K_2^{(1)} = 0$, $K_3^{(1)} = 0$, $K_2^{(2)} = 0$, $K_3^{(2)} = 0$**) eine Folge der Gleichungen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $K_1^{(1)} = 0$, $K_1^{(2)} = 0$ $\{K_1^{(3)} \neq 0\}$ sind. Dies ist auch die Bedingung dafür, daß die Funktionen, die wir erhalten, indem wir aus Φ_1, Φ_2 mittels $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $K_1^{(1)} = 0$, $K_2^{(1)} = 0$, etwa $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{1,1}$, $r_{2,1}$ eliminieren, auch von $r_{1,2}$, $r_{2,2}$ frei sind. Zur Aufstellung dieser Bedingungen berechnen wir aus $K_1^{(1)} = 0$, $K_1^{(2)} = 0$, p_3, p_4 und eliminieren diese Größen aus $K_2^{(1)} = 0$, $K_3^{(1)} = 0$, $K_2^{(2)} = 0$, $K_3^{(2)} = 0$.

9. Einen Teil dieser Bedingungen, denen die Φ genügen müssen, kann man auch in folgender Form gewinnen. Wir nehmen an, daß beide Matrizen $\frac{\partial(F_1, F_2, T_1, T_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}$, $\frac{\partial(F_1, F_2, T_1, T_2)}{\partial(p_1, p_2, p_4)}$ vom Range drei sind. Dies können wir tun, denn infolge Voraussetzung (3) ist mindestens eine der Matrizen, etwa die zweite, vom Range drei. Machen wir nun die Substitution

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3 + \mu x_4, \quad \xi_4 = x_4$$

$$p_3 = \pi_3, \quad p_4 = \pi_4 + \mu \pi_3; \quad \frac{\partial}{\partial \pi_3} = \frac{\partial}{\partial p_3} + \mu \frac{\partial}{\partial p_4}, \quad \frac{\partial}{\partial \pi_4} = \frac{\partial}{\partial p_4}$$

und wählen wir μ so klein, daß unsere Voraussetzungen in Geltung bleiben, so können wir erzielen, daß unsere Annahme im neuen Koordinatensystem erfüllt ist. Hier ziehen wir unsere Folgerungen und diese bleiben beim Grenzübergang $\mu = 0$, das heißt bei der Rückkehr zum alten Koordinatensystem erhalten.

---

*) — abgesehen von den Ungleichungen —

**) $K_1^{(1)}, K_2^{(1)}, K_3^{(1)}, K_1^{(2)}, K_2^{(2)}, K_3^{(2)}$ seien ein Basissystem der zweiten Matrix.

Sei etwa $\frac{\partial(F_1, F_2, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}$ und $\frac{\partial(F_1, F_2, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_4)}$ von Null verschieden. Bezeichnen wir nun $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2})}$ mit $K_{*}^{(1)}$ und $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$ mit $K_{**}^{(1)}$, so ergeben die Methoden von 2. leicht, daß

$$\frac{\partial(F_1, F_2, T_1, K_{*}^{(1)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = -\frac{\partial(F_1, F_2, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_4)} \cdot \frac{\partial K_{*}^{(1)}}{\partial p_3} = 0,$$

$$\frac{\partial(F_1, F_2, T_1, K_{**}^{(1)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = \frac{\partial(F_1, F_2, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} \cdot \frac{\partial K_{**}^{(1)}}{\partial p_4} = 0,$$

denn $K_{*}^{(1)}$, $K_{**}^{(1)}$ sind Funktionen von p_3, bzw. p_4 allein. Also haben wir, wenn wir $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_m, r_n)}$ mit $\{m; n\}$ bezeichnen,

$$2\,\{0,1;\,0,2\}\cdot p_3 = \{0,1;\,1,2\} - \{0,2;\,1,1\}$$
$$2\,\{0,1;\,0,2\}\cdot p_4 = \{0,1;\,2,2\} - \{0,2;\,2,1\}\,.$$

Daraus erhalten wir zunächst infolge $K_{*}^{(1)} = 0$, $K_{**}^{(1)} = 0$

$$4\,\{0,1;\,0,2\}\,\{1,1;\,1,2\} - (\{0,2;\,1,1\} - \{0,1;\,1,2\})^2 = 0, \tag{17}$$
$$4\,\{0,1;\,0,2\}\,\{2,1;\,2,2\} - (\{0,2;\,2,1\} - \{0,1;\,2,2\})^2 = 0. \tag{18}$$

Anderseits folgt, wenn ich mit $K_1^{(1)}$, bzw. $K_2^{(1)}$ die in p_3 und p_4 linearen Funktionen $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})}$ und $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2})}$ bezeichne, aus der Gleichung

$$\frac{\partial(T_1, T_2, K_1^{(1)}, K_2^{(1)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0,$$

daß *die zweireihigen Determinanten der Matrix*

$$\left\| \begin{matrix} \{0,1;\,1,1\}, & \{0,1;\,2,1\}, & \{1,1;\,2,1\} \\ \{0,2;\,1,2\}, & \{0,2;\,2,2\}, & \{1,2;\,2,2\} \end{matrix} \right\| \tag{19}$$

verschwinden. Die vier Bedingungen (17), (18), (19) sind aber nicht von einander unabhängig, sondern eine ist eine Folge der drei anderen, wie man sieht, wenn man die Identitäten beachtet, die zwischen den $\{m;\,n\}$ bestehen und analog der Identität zwischen den sechs Plückerschen Linienkoordinaten gebaut sind, z. B.

$$\{0,1;0,2\}\,\{1,1;2,1\} - \{0,1;1,1\}\,\{0,2;2,1\} + \{0,1;2,1\}\,\{0,2;1,1\} = 0.$$

Zu diesen drei Bedingungen kommt eine vierte aus der Gleichung

$$K_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_2, K_1^{(1)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})} = 0\cdot$$

10. Die Involutionsbedingung des Systems $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ erhält für das System der Φ folgende Gestalt. Bezeichnen wir die Operation

$\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_3} r_{1,i} + \frac{\partial}{\partial x_4} r_{2,i} + \frac{\partial}{\partial x_5} r_{0,i}$ $(i = 1, 2)$ mit $\frac{\delta}{\delta x_i}$, so erhalten wir nach einigen Kürzungen die Involutionsbedingung in der Form

$$\sum_1^2 (-1)^{i+1} \left\{ \frac{\delta \Phi_1}{\delta x_i} \frac{\partial(\Phi_2, T_{i+1}, K_1^{(1)}, K_1^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})} - \frac{\delta \Phi_2}{\delta x_i} \frac{\partial(\Phi_1, T_{i+1}, K_1^{(1)}, K_1^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})} \right.$$

$$\left. - \frac{\delta K_1^{(1)}}{\delta x_i} \cdot \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_{i+1}, K_1^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})} \right\} - \sum_3^4 \frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial p_l} \left\{ \frac{d\Phi_n}{dx_l} \frac{\partial(\Phi_2, T_1, T_2, K_1^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})} \right.$$

$$\left. - \frac{d\Phi_2}{dx_l} \frac{\partial(\Phi_1, T_1, T_2, K_1^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})} \right\} = 0 \left[\frac{d}{dx_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} + p_l \frac{\partial}{\partial x_5} \right].$$

Die hierin noch auftretenden Größen p_3, p_4 haben wir uns hierbei mittels der in diesen Größen linearen Gleichungen $K_1^{(1)} = 0$, $K_1^{(2)} = 0$ eliminiert zu denken. $i + 1$ ist nach dem Modul zwei zu nehmen.

11. Erfüllen nun die in x und p siebenmal stetig differenzierbaren Funktionen Φ_1, Φ_2 die Bedingungen von 8. und 10., ist dann, wenn wir wieder folgende Bezeichnungen anwenden

$$K_1^{(1)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})}, \quad K_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_2, K_1^{(1)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})},$$

$$K_1^{(3)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_2, K_1^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})},$$

$$K_2^{(1)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2})}, \quad K_2^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, K_2^{(1)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2})},$$

$$K_2^{(3)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, K_2^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2})}$$

$$\frac{\partial(T_1, T_2, K_1^{(1)}, K_1^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = \frac{\partial(K_1^{(1)}, K_1^{(2)})}{\partial(p_3, p_4)} \neq 0^{*)}$$

und sind dann für die aus $K_1^{(1)} = 0$, $K_1^{(2)} = 0$ berechneten p_3, p_4 $K_1^{(3)} \neq 0$, $K_2^{(3)} \neq 0$, so können wir zu einem gleichberechtigten System übergehen, für das mit Ausnahme zweidimensionaler Wertesysteme auch

$$\frac{\partial(T_1, T_2, K_1^{(1)}, K_1^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,1})} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial(T_1, T_2, K_2^{(1)}, K_2^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2})}$$

von Null verschieden sind, sodaß die hieraus abgeleiteten F den Voraussetzungen von I. genügen.

---

*) $K_1^{(1)}$, $K_2^{(1)}$, $K_1^{(2)}$, $K_2^{(2)}$ sind in p_3, p_4 linear.

III.

Die in (I.) Va behandelten Differentialgleichungssysteme.

1. Gehen wir bei den in (I.) Va behandelten Systemen so vor, wie in II. 1., so erhält man einmal eine Transformation der F

$$(20)\quad F_1(p)+\Phi_1(r)=0,\qquad F_2(p)+\Phi_2(r)=0,\cdots F_{4-i}(p)+\Phi_{4-i}(r)=0.$$

Hierzu treten aber noch $k(4-i-k)$ Identitäten zwischen den r

$$(21)\qquad \Phi_{5-i}(r)=0,\cdots\quad \Phi_{(k+1)(4-i)-k^2}(r)=0.$$

Verfolgen wir genau den Vorgang von I. 6., so erhalten wir die p als Funktionen von vier der $r: r_a,\ r_b,\ r_c,\ r_d$; hierbei werden die $\Phi_1,\cdots\Phi_{4-i}$ als Funktionen von $r_a,\ r_b,\ r_c,\ r_d$ und weiteren $k(i-1)\,r$ erhalten. Die übrigen $k(4-i-k)\,r$ ergeben sich als Funktionen von $r_a,\ r_b,\ r_c,\ r_d$ und jenen $k(i-1)\,r$. Es sei noch bemerkt, daß dabei $\frac{\partial(p_1,p_2,p_3,p_4)}{\partial(r_a,r_b,r_c,r_d)}\neq 0$.

Nun gestaltet sich die Elimination im allgemeinen so, daß wir $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4$ aus den Gleichungen $T=0$, $J=0$ berechnen. Durch Einsetzen in die nicht verwendeten T und J erhalten wir die Identitäten zwischen den r und durch Einsetzen in die F die Transformation (20), wobei aber jetzt in den Φ möglicherweise alle r auftreten können. Infolge der Identitäten (21) haben wir dabei $k(4-i-k)\,r: r_m,\cdots r_q$ als Funktionen der übrigen r aufzufassen und die bei dieser Auffassung gebildete Funktionaldeterminante $\Delta=\frac{\partial(p_1,p_2,p_3,p_4)}{\partial(r_a,r_b,r_c,r_d)}$ ist gleich der gleichgeschriebenen bei dem ersterwähnten Gange der Elimination und von Null verschieden.

Wir wollen noch beweisen, *daß wir es durch passende Wahl von* $r_a,\ r_b,\ r_c,\ r_d$ *so einrichten können, daß*

$$\nabla\equiv\frac{\partial(\Phi_{5-i},\cdots\Phi_{(k+1)(4-i)-k^2})}{\partial(r_m,\cdots r_q)}\neq 0.$$

Zu diesem Behufe wählen wir $r_a,\cdots r_d,\ r_m,\cdots r_q$ so, daß

$$\frac{\partial(T_1,\cdots T_{4-k},J_1^{(1)},\cdots J_{5-k-i}^{(k)})}{\partial(r_a,\cdots r_d,r_m\cdots r_q)}\neq 0.$$

Dies ist infolge Voraussetzung 3) stets möglich. Wir brauchen ja nur

$$r_{0,1},\cdots r_{0,4-k},\quad r_{1,1},\cdots r_{k,1},\quad r_{1,2},\cdots r_{k,4-i-k},\quad r_{1,5-i-k},\cdots r_{k,5-i-k}$$

zu nehmen. Dann sind durch die Gleichungen $T=0$, $J=0$ diese r als Funktionen der p definiert und wenn $\frac{\partial(T_g,\cdots J_h)}{\partial(p_1,p_2,p_3,p_4)}\neq 0$, so lassen sich

aus ihnen, wie aus den Betrachtungen von I. 6 folgt, r_a, r_b, r_c, r_d so auswählen, daß gleichzeitig $\frac{\partial(r_a, r_b, r_c, r_d)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ und $\frac{\partial(T_g, \cdots J_h)}{\partial(r_a, \cdots r_d)}$ von Null verschieden sind. Nun ist

$$\frac{\partial\left(T_1, \cdots T_{4-k}, J_1^{(1)}, \cdots J_{5-k-i}^{(k)}\right)}{\partial(p_1, \cdots p_4, r_m, \cdots r_q)} = \frac{\partial\left(T_1, \cdots T_{4-k}, J_1^{(1)} \cdots J_{5-k-i}^{(k)}\right)}{\partial(r_a, \cdots r_d, r_m, \cdots r_q)}$$

$$\cdot \frac{\partial(r_a, \cdots r_d, r_m, \cdots r_q)}{\partial(p_1, \cdots p_4, r_m, \cdots r_q)} = \frac{\partial\left(T_1 \cdots T_{4-k}, J_1^{(1)}, \cdots J_{5-k-i}^{(k)}\right)}{\partial(r_a, \cdots r_d, r_m, \cdots r_q)} \cdot \frac{\partial(r_a, r_b, r_c, r_d)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0.$$

Die Funktionen $\Phi_{5-i}, \cdots \Phi_{(k+1)(4-i)-k^2}$ entstehen so, daß wir p_1, p_2, p_3, p_4 aus $T_g = 0, \cdots J_h = 0$ berechnen und sodann in die übrigen T und J: $T_0, \cdots J_p$ einsetzen. Wir erhalten daher

$$\frac{\partial(T_g, \cdots J_h)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \cdot \frac{\partial(\Phi_{(5-i)}, \cdots \Phi_{(k+1)(4-i)-k^2})}{\partial(r_m, \cdots r_q)}$$

$$= \pm \frac{\partial\left(T_1, \cdots T_{4-k}, J_1^{(1)} \cdots J_{5-k-i}^{(k)}\right)}{\partial(p_1, \cdots p_4, r_m, \cdots r_q)} \neq 0$$

und damit ist unsere Behauptung erwiesen.

2. Die bei unsrer Methode gegenüber den unterbestimmten Differentialgleichungssystemen hier auftretenden Besonderheiten mögen an dem Falle $i = 1$, $k = 1$ auseinandergesetzt werden. Durch die Gleichungen

$$\text{(22)} \qquad T_1 \equiv r_{0,1} - p_1 - p_4 r_{1,1} = 0, \quad T_2 \equiv r_{0,2} - p_2 - p_4 r_{1,2} = 0,$$
$$T_3 \equiv r_{0,3} - p_3 - p_4 r_{1,3} = 0,$$

$$\text{(23)} \qquad J_1 \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0, \quad J_2 \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0,$$
$$J_3 \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0$$

erhält man die Gleichungen

$$\text{(24)} \quad F_1(p) + \Phi_1(r) = 0, \quad F_2(p) + \Phi_2(r) = 0, \quad F_3(p) + \Phi_3(r) = 0$$

und die Identitäten

$$\text{(25)} \qquad \Phi_4(r) = 0, \quad \Phi_5(r) = 0.$$

Nach den Bemerkungen von I. 2, 4 ist mindestens eine der Größen

$$J_i^{(2)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J_i)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

und zwar eine, deren J_i in $\frac{\partial(T_g, \cdots J_h)}{\partial(r_a, r_b, r_c, r_d)}$ auftritt, von Null verschieden, etwa $J_1^{(2)}$. Dann ist das System (24), (25), $J_1 = 0$ dem Systeme (22), (23) äquivalent. Berechne ich die $p, r_m, \cdots r_q$ als Funktionen von r_a, r_b, r_c, r_d, so erhalte ich aus beiden Systemen das gleiche Resultat.

Ich betrachte nun das System

$$F_1(p)+\Phi_1(r)=0,\quad F_2(p)+\Phi_2(r)=0,\quad F_3(p)+\Phi_3(r)=0.$$

(26) $$\Phi_4(r)=0,\quad \Phi_5(r)=0,\quad J_1=\lambda.$$

Für genügend kleine Werte von λ erhält man hieraus die p, $(r_m,\cdots r_q)$ als zweimal stetig differenzierbare Funktionen von λ. Die T und J werden durch Einführung dieser Werte Funktionen von λ und den $r_a,\cdots r_d$*). Aus den Gleichungen

$$0=\sum_1^4{}_i\frac{\partial F_j}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\lambda}\quad (j=1,2,3);\quad 1=\sum_1^4{}_i\frac{\partial J_1}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\lambda};$$

$$\frac{\partial T_j}{\partial\lambda}=\sum_1^4{}_i\frac{\partial T_i}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\lambda}\quad (j=1,2,3)\quad \frac{\partial J_g}{\partial\lambda}=\sum_1^4{}_i\frac{\partial J_g}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\lambda}\quad (g=2,3)$$

folgen die Beziehungen

$$J_1^{(2)}\frac{\partial T_j}{\partial\lambda}=J_j\quad (j=1,2,3);\quad J_1^{(2)}\frac{\partial J_g}{\partial\lambda}=J_g^{(2)}\quad (g=2,3)$$

und daraus schließen wir, indem wir wiederum die Funktionswerte an der Stelle Null durch den Index Null kennzeichnen, daß in genügend kleiner Umgebung der Stelle $\lambda=0$

$$J_g=\lambda\cdot\frac{[J_g^{(2)}]_0}{[J_1^{(2)}]_0}+(\lambda^2)\ (g=2,3);\quad T_1=\frac{\lambda^2}{2![J_1^{(2)}]_0}+(\lambda^3);$$

$$T_g=\frac{\lambda^2}{2}\frac{[J_g^{(2)}]_0}{[J_1^{(2)}]_0}+(\lambda^3)\quad (g=2,3).$$

Betrachten wir nun den Ausdruck

$$\overline{K}_1\equiv\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,T_1)}{\partial(r_a,r_b,r_c,r_d)},$$

die Funktionaldeterminante in dem Sinne gebildet, daß wir r_m, r_q als Funktionen von r_a, r_b, r_c, r_d auffassen, so ist

$$K_1\equiv\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4,\Phi_5,T_1)}{\partial(r_{0,1},r_{0,2},r_{0,3},r_{1,1},r_{1,2},r_{1,3})}=\pm\overline{K}_1\cdot\nabla,$$

$$\nabla=\frac{\partial(\Phi_4,\Phi_5)}{\partial(r_m,r_q)}+0.$$

Da anderseits die Beziehung gilt

$$\overline{K}_1=J_1\cdot\Delta+(\lambda^2),$$

so haben wir

$$K_1=\lambda\cdot\Delta_0\cdot\nabla_0+(\lambda^2).$$

Durch Bildung von $\frac{\partial K_1}{\partial\lambda}$ finden wir

$$\frac{\partial(F_1,F_2,F_3,K_1)}{\partial(p_1,p_2,p_3,p_4)}=\Delta_0\cdot\nabla_0\cdot[J_1^{(2)}]_0+(\lambda)$$

*) In den anderen Fällen, wo außer $r_a,\cdots,r_d,r_m,\cdots,r_q$ noch andere r auftreten, können die p natürlich auch Funktionen dieser r sein.

und daher

$$K_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, K_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} = \Delta_0^2 \cdot \nabla_0^2 \cdot [J_1^{(2)}]_0 + (\lambda),$$

für $\lambda = 0$ ist also $K_1^{(2)}$ von Null verschieden.

Genau so finden wir, daß

$$K_2 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}, \quad K_3 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$$

für $\lambda = 0$ gleich Null sind. Da infolge $[K_1^{(2)}]_0 \neq 0$ *die Matrix*

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$$

vom Range fünf ist — insbesondere ist wegen $\left[\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, K_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}\right]_0 \neq 0$,

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2}, r_{1,3})} \neq 0 \text{ —},$$

so folgt, daß die Matrix

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$$

vom Range fünf ist.

Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ ergibt für die Φ die Bedingung, daß *die zweireihigen Determinanten der Matrix*

$$(27) \quad \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} \\ \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2}, r_{1,3})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,3})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})} \end{array} \right\|$$

verschwinden müssen.

Aus den Gleichungen

$$\sum_1^4 {}_i \frac{\partial T_j}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = \lambda \cdot \frac{[J_j^{(2)}]_0}{[J_1^{(2)}]_0} + (\lambda)^2; \quad \sum_1^4 {}_i \frac{\partial K_j}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = \frac{[J_j^{(2)}]_0}{[J_j^{(2)}]_0} + (\lambda) \quad (j = 1, 2, 3)$$

folgern wir wie in II, 2, S. 256, *daß die Matrix* $\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, K_2, K_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ *vom Range vier ist;* im besonderen ist $\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0$, und daraus folgt weiter, *daß* $\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} \neq 0$.

3. Die Involutionsbedingung können wir nun in folgender Weise umschreiben. Wir bezeichnen mit $\frac{\delta}{\delta x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ die Operation

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + r_{1,i} \frac{\partial}{\partial x_4} + r_{0,i} \frac{\partial}{\partial x_5}$$

und es sei

$$\{\Phi_m, \Phi_n\}$$

$$= \sum_1^3 \left[\frac{\delta \Phi_m}{\delta x_i} \frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} + \frac{\delta \Phi_4}{\delta x_i} \frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_5, \Phi_m)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}\right.$$

$$\left. + \frac{\delta \Phi_5}{\delta x_i} \frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_m, \Phi_4)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}\right] \frac{\partial(\Phi_n, T_{i+1}, T_{i+2}, K_1, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})},$$

so nehmen die Involutionsbedingungen die Form an:

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} - \{\Phi_2, \Phi_1\} = 0; \quad \{\Phi_1, \Phi_3\} - \{\Phi_3, \Phi_1\} = 0;$$
$$\{\Phi_2, \Phi_3\} - \{\Phi_3, \Phi_2\} = 0.$$

Mit Hilfe von Identitäten der Gestalt:

$$\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_5, \Phi_m)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} \cdot \frac{\partial(\Phi_n, T_1, T_2, K_1, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$$

$$- \frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_5, \Phi_n)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} \cdot \frac{\partial(\Phi_m, T_1, T_2, K_1, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$$

$$- \frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} \cdot \frac{\partial(\Phi_5, T_1, T_2, K_1, \Phi_m, \Phi_n)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} = 0 \; *)$$

können wir den Involutionsbedingungen auch die Gestalt geben

$$(28) \quad \sum_1^3 \left\{\frac{\delta \Phi_1}{\delta x_i} \frac{\partial(T_{i+1}, T_{i+2}, K_1, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} - \frac{\delta \Phi_2}{\delta x_i} \frac{\partial(T_{i+1}, T_{i+2}, K_1, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}\right.$$

$$\left. + \frac{\delta \Phi_4}{\delta x_i} \frac{\partial(T_{i+1}, T_{i+2}, K_1, \Phi_5, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} - \frac{\delta \Phi_5}{\delta x_i} \frac{\partial(T_{i+1}, T_{i+2}, K_1, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_4)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}\right\} = 0,$$

wozu noch zwei analoge Gleichungen treten, die man erhält, wenn man in dieser Formel jene zyklischen Vertauschungen von 1, 2, 3, 4, 5 vornimmt, bei denen 4 und 5 in der Formel auftreten. Die Bevorzugung, die hierdurch in der Involutionsbedingung den Zahlen 4, 5 erteilt wird, können wir beseitigen, indem wir noch die zwei weiteren Gleichungen hinzufügen, die durch zyklische Vertauschung der Indizes der Φ entstehen.

---

*) Es besteht die Determinantenidentität:

$|a, \cdots, b, c, d| \, |a, \cdots, b, e, f| - |a, \cdots, b, c, e| \, |a, \cdots, b, d, f| + |a, \cdots, b, c, f| \, |a, \cdots, b, d, e| = 0,$

wie man leicht mittels Rekursion durch Entwicklung nach Unterdeterminanten $|a, \cdots, b|$ findet.

Diese sind lineare Kombinationen der drei ersten Gleichungen.*) Dieses System von fünf Gleichungen wollen wir weiterhin unter den Involutionsbedingungen verstehen.

4. Beim Übergang zu „gleichberechtigten Systemen“ multiplizieren sich die K_1 nur mit einem nicht verschwindenden Faktor und alle Umstände bleiben erhalten; es ist auch mindestens ein

$$\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Psi_m, \Psi_n)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$$

von Null verschieden.

Habe ich also ein System von fünf fünfmal nach x und r stetig differenzierbaren Funktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5, für die die Matrix

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,2}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$$

vom Range fünf ist, während die Matrix (27) infolge der Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, $\Phi_4 = 0$, $\Phi_5 = 0$ vom Range eins wird, bilde ich mir K_1, K_2, K_3, und ist dann etwa $K_1^{(2)} \neq 0$,

$$\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_m, \Phi_n)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})} \neq 0$$

sowie

$$\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0,$$

so kann ich rückwärts ein System von drei Funktionen $F_1(p)$, $F_2(p)$, $F_3(p)$ gewinnen. Für diese ist dann $J_1^{(2)}$ von Null verschieden und es läßt sich auch noch zeigen, daß $\frac{\partial J_1}{\partial r_{1,1}} \neq 0$; die Involutionsbedingung zwischen den F ist erfüllt, wenn sie zwischen den Φ erfüllt war. Wir können daher auf das System $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ die Verallgemeinerung der Entwicklungen von (I) II ohne weiteres, die von (I) III mit einer gewissen Beschränkung anwenden.

5. Im Falle $i = 2$, $k = 1$ kommen wir von den Gleichungen $F_1(p) = 0$, $F_2(p) = 0$ auf die Gleichungen $\Phi_1(r) = 0$, $\Phi_2(r) = 0$, $\Phi_3(r) = 0$. Wir können

---

*) Bei der Herleitung dieser Gleichungen aus den drei ersten ist außer der obigen Identität noch eine Identität der Art

$$\begin{aligned} &|a, \cdots, b, c, d, h|\,|a, \cdots, b, i, k, l| - |a, \cdots, b, c, d, i|\,|a, \cdots, b, k, l, h| \\ &+ |a, \cdots, b, c, d, k|\,|a, \cdots, b, l, h, i| - |a, \cdots, b, c, d, l|\,|a, \cdots, b, h, i, k| = 0 \end{aligned}$$

von großem Nutzen. Man leitet sie zusammen mit der Identität

$$\begin{aligned} &|a, \cdots, b, h|\,|a, \cdots, b, i, k, l| - |a, \cdots, b, i|\,|a, \cdots, b, k, l, h| + |a, \cdots, b, k|\,|a, \cdots, b, l, h, i| \\ &- |a, \cdots, b, l|\,|a, \cdots, b, h, i, k| = 0 \end{aligned}$$

rekurrierend ab, indem man die Koeffizienten von $h_m\, i_n\, k_o\, l_p$ in dieser Summe untersucht.

die Transformation so bewerkstelligen, daß wir für J_1, J_2 folgende Ausdrücke wählen:

$$J_1 \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, T_3, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \quad J_2 \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, T_3, T_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)},$$

und wir können, wie aus 1. hervorgeht, für r_a, r_b, r_c, r_d, r_m etwa die Reihe $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{0,3}$, $r_{1,1}$, $r_{1,2}$ nehmen. Wir finden dann vorerst, *daß die Matrix* $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})}$ *nicht vom Range fünf ist.* Ist etwa

$$J_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, T_3, J_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0$$

und setzen wir

$$K_1 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_3, T_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})}, \quad K_2 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_3, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})},$$

so folgt einmal

$$K_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_3, K_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})} \neq 0.$$

Wir schließen weiter, *daß* $\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ *von Null verschieden ist* und *daraus folgt, daß* $\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})} \neq 0$. Nebenbei sei noch erwähnt, daß nach dem vorstehenden die Matrix $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$ vom Range drei ist.

Stellen wir die Bedingung dafür auf, daß das Substitutionsresultat, das man erhält, wenn man $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{0,3}$, $r_{1,1}$, $r_{1,2}$ aus $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $K_1 = 0$, $\Phi_3 = 0$ berechnet und diese Größen in Φ_1, Φ_2 einsetzt, von $r_{1,3}$ frei ist, so finden wir, daß *alle fünfreihigen Determinanten der Matrix* $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$ *verschwinden müssen,* ein Resultat, das sich übrigens auch so durch unsere Methoden sofort darbietet. Die Koexistenz dieser Gleichungen aber ergibt *das Verschwinden der Determinanten*

$$(29) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2})} \\ \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,1}, r_{1,2})} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2})} \\ \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,2}, r_{1,3})} \end{vmatrix}$$

und des Ausdrucks

$$(30) \quad \left[\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2})}\right]^2 \cdot \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3})} - \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2})} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2})}$$
$$\cdot \left[\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,3})} - \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,3}, r_{1,2})}\right] + \left[\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2})}\right]^2 \cdot \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}.$$

Infolge $\frac{\partial K_1}{\partial p_4} \neq 0$, ist nämlich $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2})} \neq 0$. Von den fünfreihigen Überdeterminanten von $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2})}$ sind drei linear — deren Koexistenz gibt das Verschwinden der Ausdrücke (29) —, eine quadratisch. Von dieser rührt (30) her. Unter der Voraussetzung des Nichtverschwindens gewisser Unterdeterminanten der Matrix $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$ lassen sich diese Bedingungen in mannigfache Gestalten bringen; so läßt sich die Bedingung (30) unter der Voraussetzung, daß $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})} \neq 0$, und unter Berücksichtigung des Verschwindens der Ausdrücke (29) in die Form setzen:

$$(30'') \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,1}, r_{1,2})} \\ \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,3}, r_{1,1})}, & \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,1}, r_{1,3})} \end{vmatrix} = 0.$$

Hierzu fügen wir noch folgende Bemerkung. Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich analog übertragen, wenn wir für r_a, r_b, r_c, r_d, r_m die Reihe $r_{0,1}, r_{0,2}\ r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,3}$ oder $r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2}, r_{1,3}$ nehmen. Wir erhalten dann entsprechend

$$\overline{K}_1 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_2, T_h)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,3})} = 0, \qquad \overline{\overline{K}}_1 = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_1, T_k)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2}, r_{1,3})} = 0,$$

$$\overline{K}_1^{(2)} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_2, \overline{K}_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,3})} \neq 0, \qquad \overline{\overline{K}}_1^{(2)} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_1, \overline{\overline{K}}_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,2}, r_{1,3})} \neq 0,$$

wenn h, k so gewählt sind, daß

$$\overline{J}^{(2)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, T_2, \overline{J})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0 \quad \text{und} \quad \overline{\overline{J}}^{(2)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, T_1, \overline{\overline{J}})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0,$$

wobei

$$\overline{J} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, T_2, T_h)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}, \qquad \overline{\overline{J}} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, T_1, T_k)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)},$$

was stets möglich ist.

6. Für die Involutionsbedingung erhalten wir hier, wenn wir wiederum mit $\frac{\delta}{\delta x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ die Operation $\frac{\partial}{\partial x_i} + r_{1,i}\frac{\partial}{\partial x_4} + r_{0,i}\frac{\partial}{\partial x_5}$ bezeichnen

$$(31) \quad \sum_1^3 i \left\{ \frac{\delta \Phi_1}{\delta x_i} \frac{\partial(T_{i+1}, T_{i+2}, K_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})} + \frac{\delta \Phi_2}{\delta x_i} \frac{\partial(T_{i+1}, T_{i+2}, K_1, \Phi_3, \Phi_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})} \right.$$
$$\left. + \frac{\delta \Phi_3}{\delta x_i} \frac{\partial(T_{i+1}, T_{i+2}, K_1, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})} \right\} = 0,$$

wobei $i+1$, $i+2$ nach dem Modul drei zu nehmen sind. Die Gleichungen,

die man hieraus erhält, wenn man statt $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{0,3}$, $r_{1,1}$, $r_{1,2}$ irgendwelche fünf der sechs Größen r nimmt, sind sodann infolge (31) und der anderen Gleichungen gleich Null. Ihre Gesamtheit wollen wir weiterhin unter den Involutionsbedingungen verstehen.

7. Beim Übergang zu „gleichberechtigten Systemen" bleiben die vorstehenden Gleichungen und Ungleichungen erhalten. Haben wir nun drei Gleichungen

$$\Phi_1(r) = 0, \quad \Phi_2(r) = 0, \quad \Phi_3(r) = 0,$$

in denen Φ_1, Φ_2, Φ_3 fünffach stetig differenzierbare Funktionen der x und r sind, für die die Matrix $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3})}$ vom Range drei ist, für die die Ausdrücke (29), (30) verschwinden, so bilden wir einmal K_1, ist nun $\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0$, so können wir p_1, p_2, p_3, p_4 so bestimmen, daß die Gleichungen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, $K_1 = 0$ befriedigt sind. Es mögen für diese Wertsysteme p und r $\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, K_1, \Phi_m)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{0,3}, r_{1,1}, r_{1,2})} \neq 0$, $K_1^{(2)} \neq 0$, $\overline{K}_1^{(2)} \neq 0$, $\overline{\overline{K}}_1^{(2)} \neq 0$ sein, dann erhalten wir durch Elimination von $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{0,3}$, $r_{1,1}$, $r_{1,2}$ aus den Gleichungen $\Phi_k = 0$, $\Phi_l = 0$ $\{k, l \neq m\}$ zwei Gleichungen

$$F_1(p) = 0, \quad F_2(p) = 0,$$

die auch von $r_{1,3}$ frei sind, für die ist $J_1^{(2)} \neq 0$; es läßt sich auch nachweisen, daß $\frac{\partial J_1}{\partial r_{1,1}} \neq 0$ und noch $\frac{\partial J^*}{\partial r_{1,m}} \neq 0$ ist, wobei $m \neq 1$ und

$$J^* \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, T_l, T_m)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}.$$

Die Involutionsbedingungen für die F sind erfüllt, wenn sie zwischen den Φ gelten. Wir können daher, wenn auch die Voraussetzungen von I. nicht ganz erfüllt sind, die Resultate von (I) anwenden, wobei wir allerdings bei der Verallgemeinerung der Entwickiung von (I), III. einige Einschränkungen hinzufügen müssen.

Bei den vorstehenden Betrachtungen haben wir möglicherweise $r_{1,1}$, $r_{1,2}$ durch andere zwei der Größen $r_{1,1}$, $r_{1,2}$, $r_{1,3}$ zu ersetzen, wobei natürlich auch die entsprechenden Vertauschungen in den T einzutreten haben, damit unsere Gleichungen in bestimmten Größen linear bleiben.

8. Im Falle $i = 1$, $k = 2$ erhalten wir aus $F_1(p) = 0$, $F_2(p) = 0$, $F_3(p) = 0$ mittels unserer Methoden fünf Gleichungen:

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad \Phi_4 = 0, \quad \Phi_5 = 0.$$

Für die Transformationen wählen wir hierbei folgende Gleichungen:

$$J_1 \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0, \quad J_2 \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0,$$

$$J_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0, \quad J_2^{(2)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0.$$

Es sei ferner etwa $J_1^{(3)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J_1^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ von Null verschieden.

Wir zeigen dann wie früher, daß für die durch unsere Transformation verbundenen p- und r-Werte *die Ausdrücke*

$$K_1 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, T_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}, \quad K_2 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})},$$

$$K_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, K_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}, \quad K_2^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, K_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})},$$

verschwinden, während

$$K_1^{(3)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, K_1^{(2)})}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})} \neq 0.$$

Wir leiten weiter ab, *daß* $\frac{\partial(T_1, T_2, K_1, K_1^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = \frac{\partial(K_1, K_1^{(2)})}{\partial(p_3, p_4)}$ *und dann auch*

$$\frac{\partial(T_1, T_2, K_1, K_1^{(2)}, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$$

von Null verschieden sind, wenn Φ_4, Φ_5 die Rolle von $\Phi_m, \cdots, \Phi_q$ in 1. spielen. Das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen

$$K_1 = 0, \; K_2 = 0, \; K_1^{(2)} = 0, \; K_2^{(2)} = 0$$

führt auf zwei Bedingungen für die Φ, die wir in folgender Weise ausdrücken können: Wir setzen in die in p_3, p_4 linearen Gleichungen K für p_3, p_4 $\frac{\pi_3}{\tau}$, $\frac{\pi_4}{\tau}$; bezeichnen wir dann $K\tau$ mit K^*, so *haben wir die Gleichungen*

$$(32) \qquad \frac{\partial(K_1^*, K_1^{(2)*}, K_2^*)}{\partial(\pi_3, \pi_4, \tau)} = 0, \quad \frac{\partial(K_1^*, K_1^{(2)*}, K_2^{(2)*})}{\partial(\pi_3, \pi_4, \tau)} = 0,$$

die nur mehr die Ableitungen der Φ enthalten.

9. Die Involutionsbedingungen nehmen hier folgende Gestalt an, wenn wir wiederum mit $\frac{\delta}{\delta x_i}$ die Operation

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_3} r_{1,i} + \frac{\partial}{\partial x_4} r_{2,i} + \frac{\partial}{\partial x_5} r_{0,i}$$

und mit $\frac{d}{dx_i}$ die Operation $\frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial x_5}$ bezeichnen

$$\sum_{1}^{2}(-1)^{i+1}\left\{\frac{\partial\Phi_m}{\partial x_i}\,\frac{\partial(\Phi_n, T_{i+1}, K_1, K_1^{(2)}, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}\right.$$

$$-\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_i}\,\frac{\partial(\Phi_m, T_{i+1}, K_1, K_1^{(2)}, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}-\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_i}\,\frac{\partial(\Phi_m, \Phi_n, T_{i+1}, K_1, K_1^{(2)}, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$$

$$\left.+\frac{\partial\Phi_5}{\partial x_i}\,\frac{\partial(\Phi_m, \Phi_n, T_{i+1}, K_1, K_1^{(2)}, \Phi_4)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}-\frac{\partial K_1}{\partial x_i}\,\frac{\partial(\Phi_m, \Phi_n, T_{i+1}, K_1^{(2)}, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}\right\}$$

$$-\sum_{3}^{4}\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial p_l}\left\{\frac{d\Phi_m}{dx_l}\,\frac{\partial(\Phi_n, T_1, T_2, K_1^{(2)}, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}\right.$$

$$-\frac{d\Phi_n}{dx_l}\,\frac{\partial(\Phi_m, T_1, T_2, K_1^{(2)}, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}-\frac{d\Phi_4}{dx_l}\,\frac{\partial(\Phi_m, \Phi_n, T_1, T_2, K_1^{(2)}, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$$

$$\left.+\frac{d\Phi_5}{dx_l}\,\frac{\partial(\Phi_m, \Phi_n, T_1, T_2, K_1^{(2)}, \Phi_4)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}\right\}=0$$

$$[m, n = 1, 2, 3].$$

Die p_3 und p_4 hat man sich wieder durch die Werte aus $K_1 = 0$, $K_1^{(2)} = 0$ ersetzt zu denken. Mit Hilfe der oben*) angegebenen Determinantenrelationen kann man zwei weitere Gleichungen ableiten, die aus obigen entstehen, wenn man 1, 2, 3, 4, 5 vertauscht und so der Involutionsbedingung eine Gestalt geben, in der die Ausnahmestellung von Φ_4, Φ_5 beseitigt ist, wobei allerdings zwei überzählige Gleichungen auftreten.

10. Der Übergang zu gleichberechtigten Systemen ändert an obigen Gleichungen und Ungleichungen höchstens das eine, daß alle

$$\frac{\partial(T_1, T_2, K_1, K_1^{(2)}, \Phi_m, \Phi_n)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$$

Null werden können. Nun läßt sich aber „im allgemeinen", d. h. mit Ausnahme minderdimensionierter Wertgebiete stets ein Übergang zu einem System bewerkstelligen, für das eine dieser Determinanten von Null verschieden ist, wenn nur $\frac{\partial(T_1, T_2, K_1, K_1^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0$ und $K_1^{(3)} \neq 0$. Ein siebenfach nach x und r stetig differenzierbares System von Gleichungen zwischen den r, für das $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$ vom Range fünf ist, für das die Involutionsbedingungen gelten, das obendrein den Gleichungen (31) genügt und das so beschaffen ist, daß $\frac{\partial(T_1, T_2, K_1, K_1^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ und $K_1^{(3)}$ von Null verschieden sind für die Werte p_3, p_4, die den Gleichungen $K_1 = 0$, $K_1^{(2)} = 0$

*) S. die Fußnoten S. 268, 269.

genügen, läßt sich daher in ein Involutionssystem von zwei Gleichungen zwischen den p transformieren, die zwar nicht ganz den Voraussetzungen von I. genügen; doch ist für sie $J_1^{(3)} \neq 0$ und $\frac{\partial(J_1, J_1^{(2)})}{\partial(r_{1,1}, r_{1,2})} \neq 0$, so daß die Methoden von (I) II ohne weiteres, die von (I) III. mit gewissen Einschränkungen anwendbar sind.

IV.

Die in (I) Vb behandelten Differentialgleichungssysteme.

1. Im folgenden sollen noch kurz die in (I) Vb behandelten Differentialgleichungssysteme betrachtet werden, wobei wir allerdings die Aufstellung der Differenzierbarkeitsbedingungen sowie der übrigen Voraussetzungen dem Leser überlassen. Haben wir z. B. mittels der Gleichungen $T_k \equiv r_{0,k} - p_k - p_4 r_{1,k} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ und der Gleichung

$$F_2(x; p) = 0 \qquad \left[\frac{\partial(T_1, T_2, T_3, F_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0\right]$$

aus der Funktion $F_1(x, p)$ die Funktion $\Phi(x; r_{0,k}; r_{1,k})$ abgeleitet, so müssen wir, wenn wir in Φ die $r_{0,k}$ durch ihre Werte aus den Gleichungen $T_k = 0$ ersetzen, einen Ausdruck erhalten, der sich mit Hilfe von $F_2 = 0$ auf die Funktion F_1 reduziert. Wir erhalten nun, wie man sich durch Berechnung der entsprechenden Größen überzeugt, die Gleichungen

$$\frac{\partial(\Phi, T_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,1})} \equiv p_4 \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}} + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,1}} = 0; \quad p_4 \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,2}} + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,2}} = 0;$$

$$p_4 \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,3}} + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,3}} = 0,$$

woraus sich für die Funktion Φ sofort die Bedingung ergibt, daß die Matrix

$$(33) \qquad \left|\begin{matrix} \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}, & \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,2}}, & \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,3}} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,1}}, & \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,2}}, & \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,3}} \end{matrix}\right|$$

nicht vom Range zwei ist.

Wenn $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)}$ vom Range zwei ist, so ist mindestens eine der Größen $\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,k}}$ von Null verschieden, etwa $\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}} \neq 0$. Die Ausdrücke, die man für die p aus den Gleichungen $T_k = 0$ und der Gleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}} p_4 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,1}} = 0$$

findet, müssen übereinstimmen mit den aus den Gleichungen $T_k = 0$, $F_2 = 0$ herrührenden; d. h. die Elimination der r aus $L \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}} p_4 + \frac{\partial \Phi}{\partial r_{1,1}} = 0$ mit Hilfe der Gleichungen $T_k = 0$ muß uns die Gleichung $F_2(p) = 0$, möglicherweise in transformierter Gestalt, liefern. Daraus folgt aber als weitere Bedingung für Φ, daß die Gleichungen bestehen

$$+ p_4 \frac{\partial L}{\partial r_{0,1}} + \frac{\partial L}{\partial r_{1,1}} = 0, \quad p_4 \frac{\partial L}{\partial r_{0,2}} + \frac{\partial L}{\partial r_{1,2}} = 0, \quad p_4 \frac{\partial L}{\partial r_{0,3}} + \frac{\partial L}{\partial r_{1,3}} = 0,$$

woraus wir durch Elimination der p_4 mittels der Gleichung $L = 0$ drei Beziehungen zwischen den ersten und zweiten Differentialquotienten von Φ nach den r erhalten.

Die Involutionsbedingung zwischen F_1 und F_2 wird eine weitere Bedingung für Φ, die sich unter gewissen Voraussetzungen, wenn wir mit $\frac{\delta}{\delta x_i}$ wiederum $\frac{\partial}{\partial x_i} + r_{1,i} \frac{\partial}{\partial x_4} + r_{0,i} \frac{\partial}{\partial x_5}$ bezeichnen, in folgende Form setzen läßt:

$$\sum_1^3 {}_i \left[\frac{\delta \Phi}{\delta x_i} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_{0,1}\, \partial r_{0,i}} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{1,1}} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_{1,1}\, \partial r_{0,i}} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}} \right\} \right. \tag{34}$$
$$\left. - \frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,i}} \left\{ \frac{\delta \partial \Phi}{\delta x_i \partial r_{0,1}} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{1,1}} - \frac{\delta \partial \Phi}{\delta x_i \partial r_{1,1}} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}} \right\} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_5} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{1,1}} \right] = 0.$$

Der Übergang zu einem „gleichberechtigten" Ψ ändert die vorstehenden Aussagen in leicht ersichtlicher Weise.

Mit den vorstehenden Betrachtungen sind — unter entsprechenden Voraussetzungen — die Bedingungen gegeben, unter denen eine Differentialgleichung $\Phi = 0$ der eben betrachteten Klasse von Differentialgleichungen angehört und es ist der Weg gezeigt, wie man sich ein zugehöriges Involutionssystem verschaffen kann, das die integrallose Lösung unserer Gleichung vermittelt.

2. Entsprechend verhält es sich im Falle der Gleichungen

$$\Phi_1(x_i; r_{0,k}; r_{1,k}) = 0, \quad \Phi_2(x_i; r_{0,k}; r_{1,k}) = 0.$$

Sind diese mittels der Gleichungen $T_k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ aus Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ herleitbar, so muß einmal die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,1}}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,2}}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,3}}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_{0,1}}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_{0,2}}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_{0,3}} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{1,1}}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{1,2}}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{1,3}}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_{1,1}}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_{1,2}}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_{1,3}} \end{matrix} \right\| \tag{35}$$

von niederem Range als dem Range zwei sein. Ist ferner $\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,1}} \neq 0$ und

bezeichnen wir wieder $\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,1}} p_4 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{1,1}}$ mit L, so erhalten wir drei weitere Bedingungen, wenn wir in den Gleichungen

$$p_4 \frac{\partial L}{\partial r_{0,1}} + \frac{\partial L}{\partial r_{1,1}} = 0, \quad p_4 \frac{\partial L}{\partial r_{0,2}} + \frac{\partial L}{\partial r_{1,2}} = 0, \quad p_4 \frac{\partial L}{\partial r_{0,3}} + \frac{\partial L}{\partial r_{1,3}} = 0$$

p_4 mit Hilfe der Gleichung $L = 0$ eliminieren. Aus den Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $L = 0$ gewinnen wir so mittels der Gleichungen $T_k = 0$ die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ und diese bilden ein Involutionssystem, wenn folgende Beziehungen gelten:

$$\text{(36)} \qquad \sum_1^3 {}_i \left[\frac{\delta \Phi_h}{\delta x_i}\left\{\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r_{0,1}\, r_{0,i}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{1,1}} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r_{1,1}\, r_{0,i}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,1}}\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial \Phi_h}{\partial r_{0,i}}\left\{\frac{\delta \partial \Phi_1}{\delta x_i \partial r_{0,1}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{1,1}} - \frac{\delta \partial \Phi_1}{\delta x_i \partial r_{1,1}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,1}}\right\}\right] - \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,1}}\left[\frac{\partial \Phi_h}{\partial x_4} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,1}} - \frac{\partial \Phi_h}{\partial x_3} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{1,1}}\right] = 0,$$

$$\sum_1^3 {}_i \left\{\frac{\delta \Phi_1}{\delta x_i} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r_{0,i}} - \frac{\delta \Phi_2}{\delta x_i} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_{0,i}}\right\} = 0. \qquad [h = 1, 2]$$

3. Soll die Gleichung $\Phi(x; r_{0,k}; r_{1,k}; r_{2,k}) = 0$ mittels der Gleichungen $T_k \equiv r_{0,k} - p_k - p_3 r_{1,k} - p_4 r_{2,k} = 0$ $(k = 1, 2)$ aus den Gleichungen

$$F_1(p) = 0, \; F_2(p) = 0, \; F_3(p) = 0$$

ableitbar sein, so müssen einmal die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\text{(37)} \qquad \left|\begin{matrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}}, & \frac{\partial \Phi}{\partial r_{1,1}}, & \frac{\partial \Phi}{\partial r_{2,1}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,2}}, & \frac{\partial \Phi}{\partial r_{1,2}}, & \frac{\partial \Phi}{\partial r_{2,2}} \end{matrix}\right|$$

verschwinden. Es sei nun wieder $\frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}} \neq 0$. Bezeichnen wir dann die Ausdrücke $\frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}} p_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial r_{1,1}}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial r_{0,1}} p_4 + \frac{\partial \Phi}{\partial r_{2,1}}$ mit L_1 und L_2, so erhalte ich vier weitere Bedingungen, wenn ich in den Gleichungen

$$\frac{\partial L_h}{\partial r_{0,1}} p_3 + \frac{\partial L_h}{\partial r_{1,1}} = 0, \quad \frac{\partial L_h}{\partial r_{0,1}} p_4 + \frac{\partial L_h}{\partial r_{2,1}} = 0 \qquad (h = 1, 2)$$

p_3 und p_4 mit Hilfe der Gleichungen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ eliminiere. Die Gleichungen $\Phi = 0$, $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ liefern uns das System der Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, die ein Involutionssystem bilden, wenn folgende Beziehungen stattfinden:

$$\sum_1^2 \frac{\partial\Phi}{\delta x_i}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_{0,1}\partial r_{0,i}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{h,1}} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r_{0,1}\partial r_{h,i}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\right\} - \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,i}}\left\{\frac{\delta\partial\Phi}{\delta x_i\partial r_{0,1}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{h,1}} - \frac{\delta\partial\Phi}{\delta x_i\partial r_{h,i}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\right\}$$

$$- \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_{h+2}} - \frac{\partial\Phi}{\partial r_{h,1}}\frac{\partial\Phi}{\partial x_5}\right] = 0, \qquad (h = 1, 2)$$

(38)

$$\sum_1^2 \left\{\frac{\delta\partial\Phi}{\delta x_i\partial r_{0,1}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,1}} - \frac{\delta\partial\Phi}{\delta x_i\partial r_{1,1}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\right\}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_{0,1}\partial r_{0,i}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{2,1}} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r_{2,1}\partial r_{0,i}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\right\}$$

$$- \left\{\frac{\delta\partial\Phi}{\delta x_i\partial r_{0,1}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{2,1}} - \frac{\delta\partial\Phi}{\delta x_i\partial r_{2,1}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\right\}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_{0,1}\partial r_{0,i}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,1}} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r_{1,1}\partial r_{0,i}}\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\right\}$$

$$+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}\right)^3\left[\frac{dL_1}{dx_4} - \frac{dL_2}{dx_3}\right]^{*)} = 0.$$

Hierbei bedeutet $\frac{\delta}{\delta x_i}$ die Operation $\frac{\partial}{\partial x_i} + r_{1,i}\frac{\partial}{\partial x_3} + r_{2,i}\frac{\partial}{\partial x_4} + r_{0,i}\frac{\partial}{\partial x_5}$.

4. Wenden wir uns zu den noch übrigen Systemen und betrachten wir hier vorerst die Gleichung $\Phi(x; r_0, r_1, r_2, r_3) = 0$, die aus den Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ mittels der Gleichungen

$$T \equiv r_0 - p_1 - p_2 r_1 - p_3 r_2 - p_4 r_3 = 0$$

und

$$J \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0 \left[J^{(3)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0\right]$$

entsteht. Unsere früher auseinandergesetzten Methoden zeigen uns, daß die zweireihigen Determinanten der Matrix $\frac{\partial(\Phi, T)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ verschwinden. Es sei $\frac{\partial\Phi}{\partial r_0} \neq 0$, so ist dies äquivalent mit dem Bestehen der Gleichungen

$$L_1 \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial r_0}p_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_1} = 0, \quad L_2 \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial r_0}p_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_2} = 0, \quad L_3 \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial r_0}p_4 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_3} = 0.$$

Weiter erkennen wir — unter entsprechenden Voraussetzungen —, daß eine der Determinanten $\frac{\partial(L_i, T)}{\partial(r_h, r_k)}$ $(i, h, k = 0, 1, 2, 3)$ von Null verschieden ist. Wir bemerken noch, daß die Werte, die wir aus den Gleichungen $L_i = 0$, $T = 0$ für die p berechnen, mit den Werten übereinstimmen müssen, die wir aus den Gleichungen $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, $T = 0$, $J = 0$ berechneten und zur Transformation von F_1 in Φ benutzten. Sei nun etwa $\frac{\partial(L_1, T)}{\partial(r_0, r_1)} \neq 0$ und setzen wir die aus $L_1 = 0$, $T = 0$ berechneten Werte für r_0, r_1 in $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ ein, so müssen wir hierdurch die Gleichungen zwischen

*) $\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial}{\partial x_5}$.

den p $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ gewinnen. Wir erhalten so für Φ die Bedingung, daß die dreireihigen Determinanten der Matrix

$$\frac{\partial(T, L_1, L_2, L_3)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$$

verschwinden. Dies gibt im ganzen vier Bedingungen, in denen wir uns p_2, p_3, p_4 mittels der Gleichungen $L_i = 0$ eliminiert denken.

Die Involutionsbedingungen setzen sich hierbei in folgender Weise um. Wir bezeichnen mit $\frac{\delta}{\delta x_1}$ die Operation

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + r_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + r_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + r_3 \frac{\partial}{\partial x_4} + r_0 \frac{\partial}{\partial x_5}$$

und erhalten:

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x_1} \frac{\partial(L_1, L_h)}{\partial(r_0, r_1)} - \frac{\delta L_1}{\delta x_1} \frac{\partial(\Phi, L_h)}{\partial(r_0, r_1)} + \frac{\delta L_h}{\delta x_1} \frac{\partial(\Phi, L_1)}{\partial(r_0, r_1)}$$
$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial r_0}\left[\frac{d\Phi}{dx_2} \frac{\partial(T, L_h)}{\partial(r_0, r_1)} - \frac{d\Phi}{dx_{h+1}} \frac{\partial(T, L_1)}{\partial(r_0, r_1)}\right] = 0, \qquad (h = 2, 3)^{*)}$$

$$\frac{\delta L_1}{\delta x_1} \frac{\partial(L_2, L_3)}{\partial(r_0, r_1)} + \frac{\delta L_2}{\delta x_1} \frac{\partial(L_3, L_1)}{\partial(r_0, r_1)} + \frac{\delta L_3}{\delta x_1} \frac{\partial(L_1, L_2)}{\partial(r_0, r_1)} + \frac{\partial \Phi}{\partial r_0}\left[\left(\frac{dL_2}{dx_4} - \frac{dL_3}{dx_3}\right) \frac{\partial(T, L_1)}{\partial(r_0, r_1)}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{dL_3}{dx_2} - \frac{dL_1}{dx_4}\right) \frac{\partial(T, L_2)}{\partial(r_0, r_1)} + \left(\frac{dL_1}{dx_3} - \frac{dL_2}{dx_2}\right) \frac{\partial(T, L_3)}{\partial(r_0, r_1)}\right] = 0.$$

Hierbei denken wir uns p_2, p_3, p_4 wieder durch ihre Werte aus den Gleichungen $L = 0$ ersetzt.

Hiermit sind die Bedingungen aufgewiesen und der Weg gezeigt, mit dem man — bei entsprechenden Voraussetzungen — von einer Gleichung $\Phi = 0$ zu einem Involutionssystem $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ übergehen kann.

5. Entsprechend ergibt sich für die Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, die man aus $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ mittels der Gleichungen $T = 0$, $J^{(1)} = 0$, $J^{(2)} = 0$ abgeleitet hat $\left[J^{(3)} \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J^{(2)})}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0\right]$, daß für die Werte von p, die man aus den Gleichungen $T = 0$, $J^{(1)} = 0$, $J^{(2)} = 0$ und etwa $F_3 = 0$ berechnet, alle dreireihigen Determinanten der Matrix $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)}$ verschwinden. Wenn etwa $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_0, r_1)} \neq 0$, so ist hierfür notwendig und hinreichend das Bestehen der Gleichungen

$$L_1 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_0, r_1)} p_3 - \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_0, r_2)} p_2 - \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_1, r_2)} = 0;$$
$$L_2 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_0, r_1)} p_4 - \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_0, r_3)} p_2 - \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_1, r_3)} = 0.$$

---

*) $\frac{d}{dx_i}$ bedeutet die Operation $\frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial x_5}$.

War $\dfrac{\partial(T, J, J^{(2)}, F_2)}{\partial(r_0, r_1, r_2, p_k)} \neq 0$, so finden wir weiter

$$L_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, L_1)}{\partial(r_0, r_1, r_2)} = 0,$$

während $L_1^{(3)} \equiv \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)}$ und $\dfrac{\partial(T, L_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)}$ von Null verschieden sind. Setzen wir die Werte von r_0, r_1, r_2 in $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $L_2 = 0$ ein, so müssen wir, entsprechend dem Verfahren in den früheren Fällen, die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ zurückgewinnen. Dies ergibt für Φ die Bedingung

$$\frac{\partial(\Phi_1, T, L_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = 0, \quad \frac{\partial(\Phi_2, T, L_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = 0,$$

die beide erfüllt sind, da $\dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, L_1)}{\partial(r_0, r_1, r_2)} = 0$. Ebenso ist die Gleichung $\dfrac{\partial(L_2, T, L_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = 0$ erfüllt, da $\dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, L_1)}{\partial(r_0, r_1, r_2, r_3)} = 0$, so daß für Φ_1, Φ_2 drei Bedingungen bestehen.

Die Involutionsbedingung bekommt hier folgende Form:

$$\frac{\delta\Phi_1}{\delta x_1}\frac{\partial(\Phi_2, L_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)} - \frac{\delta\Phi_2}{\delta x_1}\frac{\partial(\Phi_1, L_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)} + \frac{\delta L_1}{\delta x_1}\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)}$$

$$+ \sum_2^4 \frac{\partial L_1}{\partial p_j}\left\{\frac{d\Phi_1}{dx_j}\frac{\partial(\Phi_2, T_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)} - \frac{d\Phi_2}{dx_j}\frac{\partial(\Phi_1, T_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)}\right\} = 0.$$

$$\frac{\delta\Phi_h}{\delta x_1}\frac{\partial(L_2, L_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)} - \frac{\delta L_2}{\delta x_1}\frac{\partial(\Phi_h, L_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)} + \frac{\delta L_1}{\delta x_1}\frac{\partial(\Phi_h, L_2, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)}$$

$$+ \sum_2^4 \left\{\frac{\partial L_1}{\partial p_j}\frac{\partial(L_2, T_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)} - \frac{\partial L_2}{\partial p_j}\frac{\partial(L_1, T_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)}\right\}\frac{d\Phi_h}{dx_j}$$

$$- \left(\frac{\partial L_1}{\partial p_j}\frac{dL_2}{dx_j} - \frac{\partial L_2}{\partial p_j}\frac{dL_1}{dx_j}\right)\frac{\partial(\Phi_h, T_1, L_1^{(2)})}{\partial(r_0, r_1, r_2)} = 0 \qquad (h = 1, 2)$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + r_1\frac{\partial}{\partial x_2} + r_2\frac{\partial}{\partial x_3} + r_3\frac{\partial}{\partial x_4} + r_0\frac{\partial}{\partial x_5};\ \frac{d}{dx_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_5}p_j\right].$$

Die p_2, p_3, p_4 denken wir uns mittels der Gleichungen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_1^{(2)} = 0$ eliminiert.

Haben wir ein System von zwei Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, wobei Φ_1, Φ_2 den angegebenen Bedingungen genügen, so ist es möglich, daß der durch das Vorstehende gegebene Weg zur Gewinnung eines zugehörigen Systems $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ erst nach Übergang zu einem passend gewählten „gleichberechtigten System" gangbar ist.

6. Ist die Gleichung $\Phi(x; r_{0,k}; r_{1,k}; r_{2,k}) = 0$ aus $F_1(p) = 0$, $F_2(p) = 0$ mittels der Gleichungen $T_h \equiv r_{0,h} - p_h - p_3 r_{1,h} - p_4 r_{2,h} = 0$ $(h = 1,2)$ und der Gleichungen

$$\frac{\partial(T_1, T_2, F_1, F_2)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0 \quad \left[\frac{\partial(T_1, F_1, F_2, J_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} \neq 0\right]$$

ableitbar, so folgt einmal, daß die Matrix $\dfrac{\partial(\Phi, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$ keine von Null verschiedene dreireihige Determinante besitzt. Dies gibt die Gleichungen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}} p_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,1}} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}} p_4 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{2,1}} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,2}} p_3 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{1,2}} = 0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_{0,2}} p_4 + \frac{\partial\Phi}{\partial r_{2,2}} = 0$$

und daraus folgt als Bedingung für Φ, daß die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial r_{0,1}}, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial r_{1,1}}, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial r_{2,1}} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial r_{0,2}}, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial r_{1,2}}, & \dfrac{\partial\Phi}{\partial r_{2,2}} \end{vmatrix}$$

verschwinden müssen. Bezeichne ich nun $\dfrac{\partial(\Phi, T_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,1})}$ mit L_1 und $\dfrac{\partial(\Phi, T_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{2,1})}$ mit L_2 und ist etwa

$$\frac{\partial(L_1, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})} \neq 0$$

so müssen wir, von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, durch Elimination von $r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}$ aus den Gleichungen $\Phi = 0$ und $L_2 = 0$ die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ zurückgewinnen. Daraus ergibt sich aber, daß die Matrix $\dfrac{\partial(L_1, L_2, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$ vom Range drei ist.

Die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{2} \Big\{ (-1)^i \frac{\delta L_2}{\delta x_i} \frac{\partial(\Phi, T_{3-i}, L_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})} - (-1)^i \frac{\delta L_1}{\delta x_i} \frac{\partial(\Phi, T_{3-i}, L_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})}$$
$$- (-1)^i \frac{\delta\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial(L_2, T_{i+1}, L_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})} \Big\}$$
$$- \frac{\partial L_1}{\partial p_3} \cdot \frac{d\Phi}{dx_3} \frac{\partial(T_1, T_2, L_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})} + \frac{\partial L_2}{\partial p_4} \frac{d\Phi}{dx_4} \frac{\partial(T_1, T_2, L_1)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1})} = 0,$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x_i} = \frac{\partial}{\partial x} + r_{1,1} \frac{\partial}{\partial x_3} + r_{2,1} \frac{\partial}{\partial x_4} + r_{0,1} \frac{\partial}{\partial x_5}; \quad \frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial x_5}\right],$$

in der wir p_3, p_4 mit Hilfe von $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ eliminieren, stellt die Involutionsbedingungen dar.

7. Genau so erhalten wir — unter entsprechenden Voraussetzungen — die Bedingungen dafür, daß zu einem System

$$\Phi_1(x; r_{0,k}; r_{1,k}; r_{2,k}) = 0, \quad \Phi_2(x; r_{0,k}; r_{1,k}; r_{2,k}) = 0, \quad \Phi_3(x; r_{0,k}; r_{1,k}; r_{2,k}) = 0$$

ein Involutionssystem $F_1(p) = 0$, $F_2(p) = 0$, $F_3(p) = 0$ bestimmt werden kann, aus dem mittels der Gleichungen

$$T_i = 0, \quad J_i \equiv \frac{\partial(F_1, F_2, F_3, T_i)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0, \quad \left[\frac{\partial(F_1, F_2, F_3, J_k)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} + 0\right] \quad (i = 1, 2)$$

das System der Φ rückgewonnen werden kann, und zwar ergibt sich, daß in der Matrix $\dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$ alle vierreihigen Determinanten verschwinden; daraus ergeben sich vier Bedingungen für Φ_1, Φ_2, Φ_3, die wir dadurch symmetrisch ausdrücken können, daß wir sagen, die Matrix

$$\left|\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,2}, r_{1,1})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,2}, r_{2,1})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,1}, r_{2,2})} \\
\dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{0,1}, r_{1,1})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{0,1}, r_{2,1})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,2})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{2,2})} \\
\dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,1}, r_{2,2})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{2,1}, r_{2,2})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,1})}, & \dfrac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{2,2}, r_{2,1})}
\end{array}\right|,$$

sei von niederem Range als dem Range zwei, wobei wir die Beziehungen

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{1,1}, r_{2,1})} = 0, \qquad \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)}{\partial(r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2})} = 0$$

besonders hervorheben wollen.

Für die Involutionsbedingung erhalten wir:

$$\sum_1^2{}_i \left\{ \frac{\delta \Phi_1}{\delta x_i} \frac{\partial(\Phi_2, T_{3-i}, L_1, L_2)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} - \frac{\delta \Phi_2}{\delta x_i} \frac{\partial(\Phi_1, T_{3-i}, L_1, L_2)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} \right.$$
$$\left. + \frac{\delta L_1}{\delta x_i} \frac{\partial(L_2, T_{3-i}, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} - \frac{\delta L_2}{\delta x_i} \frac{\partial(L_1, T_{3-i}, \Phi_1, \Phi_2)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} \right\}$$
$$- \sum_3^4{}_i \left\{ \frac{d \Phi_1}{d x_j} \frac{\partial(\Phi_2, T_1, T_2, L_2)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} - \frac{d \Phi_2}{d x_j} \frac{\partial(\Phi_1, T_1, T_2, L_2)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} \right\} \cdot \frac{\partial L_1}{\partial p_j}$$
$$- \left\{ \frac{d \Phi_1}{d x_j} \frac{\partial(\Phi_2, T_1, T_2, L_1)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} - \frac{d \Phi_2}{d x_j} \frac{\partial(\Phi_1, T_1, T_2, L_1)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} \right\} \frac{\partial L_2}{\partial p_j} = 0$$

$$\left[\frac{\delta}{\delta x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + r_{1,i} \frac{\partial}{\partial x_3} + r_{2,i} \frac{\partial}{\partial x_4} + r_{0,i} \frac{\partial}{\partial x_5}; \quad \frac{d}{d x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial x_5}\right],$$

und zwei entsprechende Gleichungen, wenn wir, was wir als möglich voraussetzen, mit L_1 und L_2 zwei vierreihige Determinanten aus der Matrix $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, T_1, T_2)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1}, r_{2,2})}$ und mit r_j, r_k, r_l, r_m vier der Größen $r_{0,1}$ $r_{0,2}$, $r_{1,1}$, $r_{1,2}$, $r_{2,1}$, $r_{2,2}$ bezeichnen, so daß

$$\frac{\partial(T_1, T_2, L_1, L_2)}{\partial(r_j, r_k, r_l, r_m)} \neq 0.$$

8. Wir haben somit im kurzen die Bedingungen aufgezeigt, unter denen Differentialgleichungen im fünfdimensionalen Raum zu den in (I) Vb behandelten Fällen gehören und es läßt sich aus den Betrachtungen auch der Weg entnehmen, den man einzuschlagen hat, um ein zugehöriges System von Differentialgleichungen mit einer Unbekannten und damit die integrallose Auflösung zu gewinnen.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, daß unser Verfahren sich auch auf den in (I) Vc erwähnten Fall ausdehnen läßt, bei dem wir aus $F(p) = 0$ mittels der Gleichungen

$$T_2 \equiv r_{0,k} - p_k - p_4 r_{1,k} = 0, \quad J^{(1)} \equiv \frac{\partial(F_1, T_1, T_2, T_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0, \quad J^{(2)} \equiv \frac{\partial(J^{(1)}, T_1, T_2, T_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3, p_4)} = 0$$

die Gleichungen $\Phi_1(x; r_{0,k}; r_{1,k}) = 0$, $\Phi_2(x; r_{0,k}; r_{1,k}) = 0$ gewinnen. Wir erhalten hierbei — ohne näher einzugehen — etwa die Gleichungen

$$K_1 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,1})} = 0, \quad K_2 \equiv \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,2})} = 0,$$

$$K_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(K_1, \Phi_2, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,2})} = 0, \quad \overline{K}_1^{(2)} \equiv \frac{\partial(K_1, \Phi_2, T_1, T_2, T_3)}{\partial(r_{0,1}, r_{0,2}, r_{1,1}, r_{1,2}, r_{2,2})} = 0$$

und die Koexistenz dieser Gleichungen mit den Gleichungen $T_k = 0$ gibt drei Bedingungen für Φ_1, Φ_2.

Ein Axiomensystem der Methode der kleinsten Quadrate.

Von

F. Bernstein und W. S. Baer in Göttingen.

§ 1.
Einleitung.

Die erste wissenschaftliche Begründung des von Legendre*) unter dem Namen „Methode der kleinsten Quadrate" in die Ausgleichungsrechnung eingeführten Rechenverfahrens hat C. F. Gauß**) gegeben; bei dieser seiner ersten Ableitung benutzt er das aus seiner Hypothese des arithmetischen Mittels abgeleitete *Fehlergesetz*

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

dessen Integral über ein Intervall a bis b die Wahrscheinlichkeit für das Zustandekommen eines Fehlers x zwischen den Grenzen a und b angibt. Weiter hat Laplace***) aus der Annahme, daß sich jeder zu begehende Fehler aus einer großen Anzahl sehr kleiner sog. Elementarfehler zusammensetze, das Fehlergesetz herzuleiten gesucht und hat, gestützt auf dieses, eine Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gegeben; seine Ableitung des Fehlergesetzes ist dann im wesentlichen von Bienaymé, Liapounoff, Markoff, Tschebyscheff†) in eine endgültige Form gebracht worden. Ferner hat C. F. Gauß††) die Methode der kleinsten Quadrate

*) Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1805—1806.

**) Theoria motus corporum coelestium etc, Hamburg 1809, Art. 186.

***) Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, Art. 20—21.

†) Vgl. z. B. das Literaturverzeichnis am Ende der von A. Markoff herausgegebenen Festschrift „Bicentenaire de la loi des grands nombres 1713—1913, Démonstration du second théorème limite du calcul des probabilités par la méthode des moments", St. Petersburg 1913.

††) Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, Comm. Goett. I, 1821—1826.

auch noch auf eine zweite Weise zu begründen versucht, ohne diesmal auf den obigen Ausdruck des Fehlergesetzes zurückzugehen; diese klassische Beweismethode, die in viele Lehrbücher*) der Wahrscheinlichkeitsrechnung übergegangen ist, benutzt, indem sie den Begriff des *Fehlerrisikos* in den Mittelpunkt stellt, außer den Grundbegriffen und Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur die Existenz und einige allgemeine Eigenschaften einer Fehlerfunktion. Diese wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe gleichfalls zu eliminieren, ist bisher unseres Wissens noch nicht einwandfrei gelungen**). Es wird nun im folgenden der Versuch gemacht, die Methode der kleinsten Quadrate unter Benutzung des von Gauß in seiner zweiten Begründung mit Erfolg verwandten Gewichtsbegriffes und *unter Vermeidung der Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* axiomatisch zu begründen, wobei die in § 2 aufgeführten Axiome möglichst nach dem Gesichtspunkte ausgewählt sind, daß sie dem inneren Charakter des Ausgleichungsproblems entsprechen. Nachdem in § 3 einige mathematische Hilfssätze über reelle Funktionen zusammengestellt worden sind, werden in § 4 aus dem Axiomensystem die Folgerungen gezogen, die zu den in der Methode der kleinsten Quadrate üblichen Relationen unmittelbar hinführen.

Die Vorteile dieser Begründung liegen darin, daß zunächst die prinzipiellen Schwierigkeiten vermieden werden, die bei der Einführung der Gleichberechtigung von Fällen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung jedesmal auftreten; ferner ist die Begründung unabhängig von jeder bisher benutzten speziellen Eigenschaft der Fehlerfunktion, wodurch die Tragweite der Methode wesentlich erweitert wird; dazu kommt, daß die benutzten Regeln für den Gebrauch des Gewichtsbegriffes einfacher als die Regeln für die Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ausfallen. Was die philosophische Kategorie des Gewichtsbegriffes angeht, so ist er offenbar dem Wahrscheinlichkeitsbegriff verwandt; es hängt aber ganz von dem gewählten Ausgangspunkte ab, welche Begriffsbildung man als die primitivere ansehen wird.

---

*) Es werde insbesondere das Lehrbuch von A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von H. Liebmann, Leipzig-Berlin 1912, zitiert.

**) Die kürzlich erschienene Untersuchung von R. Suppantschitsch „Zur Axiomatik der Methode der kleinsten Quadrate" [Sitzungsberichte der k. Akad. der Wissensch. in Wien, Math.-naturw. Klasse, 122, Abt. 2a (1913), S. 3—34] liegt in einer anderen Richtung.

§ 2.

Das Axiomensystem.

1. *Zuordnungsaxiom:* Jede Zuordnung irgendeines Wertes α zu irgendeiner festen Größe a derart, daß für jedes reelle λ auch $\lambda\alpha$ zu λa zugeordnet wird, heiße eine Annäherung und werde bezeichnet durch

$$a \sim \alpha, \quad \lambda a \sim \lambda\alpha.$$

2. *Gewichtsaxiom:* Jeder Annäherung werde als Gewicht eine *positive* Zahl, die alle möglichen Werte annehmen kann, zugeordnet und dies ausgedrückt durch

$$a \sim \alpha\ [p].$$

3. *Axiom der Unabhängigkeit vom Maßstabe:* Ist auf Grund des Zuordnungsaxioms

$$a \sim \alpha\ [p], \quad \lambda a \sim \lambda\alpha\ [p'],$$

so sei der Quotient $p':p$ lediglich von λ abhängig

$$p':p = f(\lambda),$$

wobei $f(\lambda)$ eine stetige Funktion von λ, aber nicht identisch 1 sein soll.

4. *Axiom der Unabhängigkeit von Annäherungen:* Zwei Annäherungen

$$a \sim \alpha\ [p], \quad b \sim \beta\ [q]$$

mögen voneinander unabhängig heißen, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Ist auf Grund des Zuordnungsaxioms für irgendwelche reellen Werte λ und μ

$$\lambda a \sim \lambda\alpha\ [p'], \quad \mu b \sim \mu\beta\ [q']$$

so bestimme sich das Gewicht r der „komponierten" Annäherung

$$\lambda a + \mu b \sim \lambda\alpha + \mu\beta\ [r]$$

eindeutig durch die Funktionalgleichung

$$\psi(r) = \psi(p') + \psi(q'),$$

wobei $\psi(x)$ eine reelle, eindeutige und stetige Funktion des Gewichtsargumentes allein sei.

5. *Axiom des arithmetischen Mittels:* Das arithmetische Mittel zweier unabhängigen Annäherungswerte für dieselbe feste Größe mit dem Gewicht 1 besitze als Annäherungswert für dieselbe feste Größe das Gewicht 2.

6. *Axiom der Größenordnung der Funktion $\psi(x)$:* Sind

$$a \sim \alpha_1\ [1], \ a \sim \alpha_2\ [1], \ \cdots, \ a \sim \alpha_n\ [1]$$

irgend n zu je zweien unabhängige Annäherungen für dieselbe feste Größe a je mit dem Gewichte 1, so habe das Gewicht r der „komponierten" Annäherung

$$na \sim \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \ [r]$$

die Größenordnung $\frac{1}{n}$ in dem Sinne, daß bei wachsender Anzahl n der Quotient von r und $\frac{1}{n}$ von einer Stelle an, d. h. für alle $n > n_0$, oberhalb einer positiven und unterhalb einer endlichen Schranke verbleibe.

7. *Ausgleichungsaxiom:* Sind $a_1, a_2, \cdots, a_m$ irgend m feste Größen und liegen für n lineare Ausdrücke in ihnen irgend n unabhängige Annäherungen vor

$$\begin{aligned} A_{11} a_1 + A_{21} a_2 + \cdots + A_{m1} a_m &\sim l_1 \ [p_1], \\ A_{12} a_1 + A_{22} a_2 + \cdots + A_{m2} a_m &\sim l_2 \ [p_2], \\ &\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots \\ A_{1n} a_1 + A_{2n} a_2 + \cdots + A_{mn} a_m &\sim l_n \ [p_n], \end{aligned}$$

wo $n > m$ und die A_{ik} bekannte Koeffizienten seien, so sei für irgendeinen linearen Ausdruck in den $a_1, a_2, \cdots, a_m$ diejenige „Komposition" der obigen n Annäherungen mit n zu bestimmenden Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, die auf der linken Seite diesen linearen Ausdruck in den $a_1, a_2, \cdots, a_m$ liefert, die *beste Annäherung (Ausgleichung)*, die das größte Gewicht besitzt.

§ 3.

Hilfssätze über reelle Funktionen.

Hilfssatz 1: *Der Funktionalgleichung*

$$c f(t x_1 x_2) = f(t x_1) f(t x_2),$$

in der $c \neq 0$ und $t \neq 0$ gegebene reelle Konstante sind, genügen alle Funktionen

$$f(x) = c \left(\frac{x}{t}\right)^{\gamma},$$

wo γ beliebig reell ist, und dies sind auch die sämtlichen für alle reellen oder auch nur für alle reell-positiven Argumente definierten reellen, eindeutigen und stetigen Funktionen, die diese Funktionalgleichung befriedigen und nicht identisch verschwinden.

Mit diesem bekannten Satze beweist man weiter, wie uns zuerst Herr S. Halberstadt mitgeteilt hat, den

Hilfssatz 2: *Die Gesamtheit der für alle $x > 0$ reellen, eindeutigen und*

stetigen Funktionen $\psi(x)$, bei denen es zu jedem Argumentenpaar $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ stets genau ein Argument $\xi = \xi(x_1, x_2) > 0$ gibt, sodaß

$$\psi(\xi) = \psi(x_1) + \psi(x_2) \tag{1}$$

gilt, und bei denen zugleich mit (1) *für alle reellen $\varrho > 0$ auch*

$$\psi(\varrho\xi) = \psi(\varrho x_1) + \psi(\varrho x_2) \tag{2}$$

erfüllt ist, wird geliefert durch

$$\psi(x) = kx^\gamma,$$

wo $k \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ beliebige reelle Konstanten bedeuten.

Beweis: Zunächst verschwindet $\psi(x)$ für $x > 0$ nicht identisch, da sonst entgegen der Voraussetzung (1) nicht ξ durch x_1 und x_2 eindeutig bestimmt wäre; also gibt es mindestens ein Argument $x_0 > 0$, so daß

$$\psi(x_0) \neq 0 \tag{3}$$

ist. Weiter folgt durch mehrmalige Anwendung der Voraussetzungen (1) und (2), daß es allgemein für jede*) ganze Zahl $l \geqq 1$ zu irgend l positiven Argumenten $x_1, x_2, \cdots, x_l$ ein Argument $\xi = \xi(x_1, x_2, \cdots, x_l) > 0$ gibt, derart, daß für alle $\varrho > 0$

$$\psi(\varrho\xi) = \psi(\varrho x_1) + \psi(\varrho x_2) + \cdots + \psi(\varrho x_l)$$

gilt; $x_1 = x_2 = \cdots = x_l = x_0$ liefert für jede**) ganze positive Zahl l die Existenz eines Argumentes $\xi_l > 0$, so daß für alle $\varrho > 0$

$$\psi(\varrho\xi_l) = l\,\psi(\varrho x_0) \tag{4}$$

ist. Gehören auf diese Weise zu den ganzen positiven Zahlen m und n die Argumente $\xi_m > 0$ und $\xi_n > 0$, so ist also für alle $\varrho > 0$

$$\psi(\varrho\xi_m) = m\,\psi(\varrho x_0), \quad \psi(\varrho\xi_n) = n\,\psi(\varrho x_0)$$

insbesondere für $\varrho = 1$ und $\varrho = \frac{\xi_m}{\xi_n} > 0$

$$\psi(\xi_m) = m\,\psi(x_0), \quad \psi(\xi_m) = n\,\psi\left(\frac{\xi_m}{\xi_n}x_0\right);$$

hieraus folgt

$$\psi\left(\frac{\xi_m}{\xi_n}x_0\right) = \frac{m}{n}\,\psi(x_0). \tag{5}$$

Wegen (3) nimmt daher $\psi(x)$ für $x > 0$ alle rational-positiven Multipla von $\psi(x_0)$ und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit alle reellen Werte an, die dasselbe Vorzeichen wie $\psi(x_0)$ haben.

Ferner nimmt $\psi(x)$ jeden solchen Wert genau einmal für $x > 0$ an; denn wäre

$$\psi(x') = \psi(x''), \qquad x' \neq x'',\ x' > 0,\ x'' > 0,$$

---

*) Für $l = 1$ ist insbesondere $\xi = x_1$.

**) Für $l = 1$ ist insbesondere $\xi_1 = x_0$ zu setzen.

so gäbe es nach (1) und (2) zu x' und x'' ein Argument $\xi' = \xi'(x', x'') > 0$, so daß für alle $\varrho > 0$

$$\psi(\varrho\xi') = \psi(\varrho x') + \psi(\varrho x'')$$

wäre, insbesondere für $\varrho = \frac{x'}{\xi'} > 0$

$$\psi(x') = \psi\left(\frac{x'^2}{\xi'}\right) + \psi\left(\frac{x'x''}{\xi'}\right);$$

es gäbe also entgegen der Voraussetzung (1) zu dem Argumentenpaar $\frac{x'^2}{\xi'} > 0$ und $\frac{x'x''}{\xi'} > 0$ zwei verschiedene Argumente $x' > 0$ und $x'' > 0$, für die

$$\psi(x') = \psi(x'') = \psi\left(\frac{x'^2}{\xi'}\right) + \psi\left(\frac{x'x''}{\xi'}\right)$$

wäre. Also ist $\psi(x)$ in der Tat einwertig, mithin nach dem Vorangehenden monoton und daher eine monoton-einwertige Funktion.

Weiter verschwindet $\psi(x)$ nirgends für $x > 0$; denn gesetzt, es wäre für $\bar{x} > 0$

$$\psi(\bar{x}) = 0,$$

so folgte aus (4) mit $l = 2$, $\varrho = \frac{\bar{x}}{x_0} > 0$

$$\psi\left(\frac{\bar{x}}{x_0}\xi_2\right) = 2\psi(\bar{x}) = 0 = \psi(\bar{x}),$$

und dies widerspräche wegen $\frac{\bar{x}}{x_0}\xi_2 \neq \bar{x}$ der eben bewiesenen Einwertigkeit von $\psi(x)$.

Endlich erfüllt $\psi(x)$ für alle $x_1 > 0$ und $x_2 > 0$ die Funktionalgleichung

$$\psi(x_0)\,\psi(x_0x_1x_2) = \psi(x_0x_1)\,\psi(x_0x_2). \tag{6}$$

Ist nämlich zunächst mindestens eines der beiden Argumente x_1 und x_2, etwa x_2, eines der vorher definierten $\frac{\xi_m}{\xi_n}$, für die (5) galt, so wird aus (4) mit $l = m$, $\varrho = \frac{x_0x_1}{\xi_n} > 0$ sowie $l = n$, $\varrho = \frac{x_0x_1}{\xi_n} > 0$

$$\psi\left(x_0x_1\frac{\xi_m}{\xi_n}\right) = m\,\psi\left(\frac{x_0^2x_1}{\xi_n}\right), \quad \psi(x_0x_1) = n\,\psi\left(\frac{x_0^2x_1}{\xi_n}\right);$$

da, wie bewiesen, $\psi\left(\frac{x_0^2x_1}{\xi_n}\right)$ wegen $\frac{x_0^2x_1}{\xi_n} > 0$ nicht verschwindet, so folgt hieraus in Verbindung mit (5)

$$\frac{\psi\left(x_0x_1\frac{\xi_m}{\xi_n}\right)}{\psi(x_0x_1)} = \frac{m}{n} = \frac{\psi\left(x_0\frac{\xi_m}{\xi_n}\right)}{\psi(x_0)}$$

oder

$$\psi(x_0)\,\psi\left(x_0x_1\frac{\xi_m}{\xi_n}\right) = \psi(x_0x_1)\,\psi\left(x_0\frac{\xi_m}{\xi_n}\right), \tag{7}$$

womit (6) zunächst für $x_2 = \frac{\xi_m}{\xi_n}$ bewiesen ist. Allgemein läßt sich weiter stets der eine Funktionswert, etwa $\psi(x_0 x_2)$, als Limes rational-positiver Multipla $\left(\frac{m}{n}\right)_\nu$ von $\psi(x_0)$ darstellen

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\frac{m}{n}\right)_\nu \psi(x_0) = \psi(x_0 x_2);$$

bei der Anwendung von (5) auf diese rationalen Zahlen $\left(\frac{m}{n}\right)_\nu$ erhält man daher

$$\lim_{\nu=\infty} \psi\left(x_0 \left(\frac{\xi_m}{\xi_n}\right)_\nu\right) = \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{m}{n}\right)_\nu \psi(x_0) = \psi(x_0 x_2)$$

und wegen des bewiesenen monoton-einwertigen Charakters von $\psi(x)$

$$\lim_{\nu=\infty} x_0 \left(\frac{\xi_m}{\xi_n}\right)_\nu = x_0 x_2;$$

(7), angewendet auf $\left(\frac{\xi_m}{\xi_n}\right)_\nu$, ergibt mithin durch den Grenzübergang $\nu = \infty$ wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\psi(x)$ allgemein

$$\psi(x_0)\, \psi(x_0 x_1 x_2) = \psi(x_0 x_1)\, \psi(x_0 x_2). \tag{6}$$

Nach dem Hilfssatz 1 dieses Paragraphen mit $f(x) = \psi(x)$, $c = \psi(x_0)$, $t = x_0$, dessen Voraussetzungen hier insbesondere wegen (6) sämtlich erfüllt sind, ist daher

$$\psi(x) = \psi(x_0) \left(\frac{x}{x_0}\right)^\gamma = k x^\gamma,$$

wo γ beliebig reell*) und wegen (3) also auch

$$k = \frac{\psi(x_0)}{x_0^{\,\gamma}} \neq 0$$

beliebig reell ist.

§ 4.

Die Methode der kleinsten Quadrate auf Grund des Axiomensystems.

I. Ist die beliebige Annähernng

$$a \sim \alpha\ [p]$$

gegeben, so ist bei beliebigem reellen λ das Gewicht p' der hieraus auf Grund des Zuordnungsaxioms gewonnenen Annäherung

$$\lambda a \sim \lambda \alpha\ [p']$$

---

*) Man erkennt unmittelbar, daß $\gamma = 0$ dem zu beweisenden Satze nicht Genüge leistet.

nach dem Axiom der Unabhängigkeit vom Maßstabe

$$p' = pf(\lambda),$$

wo $f(\lambda)$ eine positive, eindeutige und stetige Funktion von λ ist. Ist weiter auch μ eine beliebige reelle Zahl, so ist das Gewicht p'' der Annäherung

$$\mu \cdot \lambda a \sim \mu \cdot \lambda \alpha \ [p'']$$

in analoger Weise

$$p'' = p' f(\mu) = pf(\lambda) f(\mu);$$

andererseits ist dasselbe Gewicht p'' derselben Annäherung

$$\lambda\mu \cdot a \sim \lambda\mu \cdot \alpha \ [p'']$$

nach dem Vorangehenden auch

$$p'' = pf(\lambda\mu),$$

und da nach dem Gewichtsaxiom jeder Annäherung nur ein Gewicht > 0 zugeordnet wird, so gilt bei beliebigen λ und μ

$$pf(\lambda\mu) = pf(\lambda) f(\mu)$$

oder

$$f(\lambda\mu) = f(\lambda) f(\mu);$$

da nach dem Gewichtsaxiom $f(\lambda)$ nicht verschwindet, so ist nach dem Hilfssatz 1 des § 3

$$f(\lambda) = \lambda^{\varkappa};$$

nach dem Axiom der Unabhängigkeit vom Maßstabe ist $f(\lambda) \not\equiv 1$, daher die Konstante

$$\varkappa \neq 0.$$

II. Seien irgend zwei unabhängige Annäherungen

$$a \sim \alpha \ [p], \quad b \sim \beta \ [q]$$

und deren „komponierte" Annäherung

$$a + b \sim \alpha + \beta \ [r]$$

gegeben, so ist nach dem Axiom der Unabhängigkeit von Annäherungen das Gewicht r eindeutig bestimmt durch die Funktionalgleichung

$$\psi(r) = \psi(p) + \psi(q).$$

Nach I gilt weiter

$$\lambda a \sim \lambda\alpha \ [\lambda^{\varkappa} p], \quad \lambda b \sim \lambda\beta \ [\lambda^{\varkappa} q], \quad \lambda(a + b) \sim \lambda(\alpha + \beta) \ [\lambda^{\varkappa} r],$$

und es ist hier analog wie eben

$$\psi(\lambda^{\varkappa} r) = \psi(\lambda^{\varkappa} p) + \psi(\lambda^{\varkappa} q).$$

Wegen $\varkappa \neq 0$ durchläuft nun $\varrho = \lambda^{\varkappa}$ zugleich mit λ alle positiven Werte,

und da $\psi(x)$ nach dem Axiom der Unabhängigkeit von Annäherungen eine reelle, eindeutige und stetige Funktion ist, so folgt aus dem Hilfssatze 2 des § 3

$$\psi(x) = kx^{\gamma}, \quad k \neq 0, \quad \gamma \neq 0.$$

III. Seien ferner

$$a \sim \alpha_1 [1], \quad a \sim \alpha_2 [1]$$

zwei unabhängige Annäherungen für dieselbe feste Größe a mit dem Gewicht 1, so folgt nach I

$$\frac{1}{2} a \sim \frac{1}{2} \alpha_1 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\varkappa}\right], \quad \frac{1}{2} a \sim \frac{1}{2} \alpha_2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\varkappa}\right]$$

und weiter nach dem Axiom der Unabhängigkeit von Annäherungen

$$a \sim \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{1}{2} \alpha_2 [r],$$

wo für das Gewicht r nach II

$$kr^{\gamma} = k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\varkappa}\right)^{\gamma} + k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\varkappa}\right)^{\gamma} = 2k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\varkappa}\right)^{\gamma}$$

gilt. Nach dem Axiom des arithmetischen Mittels ist nun

$$r = 2,$$

also folgt

$$k\, 2^{\gamma} = 2k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\varkappa}\right)^{\gamma}$$

oder da $k \neq 0$ ist,

$$2^{\gamma} = 2^{1-\varkappa\gamma};$$

hieraus folgt

$$\gamma = 1 - \varkappa\gamma, \quad (\varkappa + 1)\gamma = 1.$$

IV. Sind weiter

$$a \sim \alpha_1 [1], \quad a \sim \alpha_2 [1], \cdots, \quad a \sim \alpha_n [1]$$

irgend n unabhängige Annäherungen für dieselbe feste Größe a je mit dem Gewichte 1, so ergibt sich für das Gewicht r der „komponierten“ Annäherung

$$na \sim \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n [r]$$

nach II

$$kr^{\gamma} = k \cdot 1^{\gamma} + k \cdot 1^{\gamma} + \cdots + k \cdot 1^{\gamma} = kn$$

oder wegen $k \neq 0$, $\gamma \neq 0$

$$r = n^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Dieses Gewicht r besitzt nun nach dem Axiom der Größenordnung der Funktion $\psi(x)$ die Größenordnung $\frac{1}{n}$; also ist

$$\frac{1}{\gamma} = -1, \quad \gamma = -1$$

und nach III daher

$$\varkappa + 1 = \frac{1}{\gamma} = -1, \quad \varkappa = -2.$$

V. Seien endlich für n lineare Ausdrücke in irgend m festen Größen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ irgend n unabhängige Annäherungen gegeben:

$$\begin{array}{l} A_{11} a_1 + A_{21} a_2 + \cdots + A_{m1} a_m \sim l_1 \ [p_1], \\ A_{12} a_1 + A_{22} a_2 + \cdots + A_{m2} a_m \sim l_2 \ [p_2], \\ \vdots \\ A_{1n} a_1 + A_{2n} a_2 + \cdots + A_{mn} a_m \sim l_n \ [p_n], \end{array}$$

wo $n > m$ und die A_{ik} bekannte Koeffizienten seien, so folgt hieraus, indem man diese Annäherungen mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ multipliziert,

$$\begin{array}{l} \lambda_1 (A_{11} a_1 + A_{21} a_2 + \cdots + A_{m1} a_m) \sim \lambda_1 l_1 \left[\frac{p_1}{\lambda_1^2}\right], \\ \lambda_2 (A_{12} a_1 + A_{22} a_2 + \cdots + A_{m2} a_m) \sim \lambda_2 l_2 \left[\frac{p_2}{\lambda_2^2}\right], \\ \vdots \\ \lambda_n (A_{1n} a_1 + A_{2n} a_2 + \cdots + A_{mn} a_m) \sim \lambda_n l_n \left[\frac{p_n}{\lambda_n^2}\right] \end{array}$$

und weiter durch „Komposition“ dieser Annäherungen

$$a_1 \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu A_{1\nu} + a_2 \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu A_{2\nu} + \cdots + a_m \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu A_{m\nu} \sim \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \cdots + \lambda_n l_n [r],$$

wo für das Gewicht r dieser „komponierten“ Annäherung nach II und IV

$$\frac{k}{r} = \frac{k\lambda_1^2}{p_1} + \frac{k\lambda_2^2}{p_2} + \cdots + \frac{k\lambda_n^2}{p_n}$$

gilt. Sucht man nun die „beste Annäherung“ für irgendeine der m festen Größen, etwa a_μ, so muß nach dem Ausgleichungsaxiom die Komposition der gegebenen n Annäherungen mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ erstens auf der linken Seite identisch a_μ liefern; es entstehen also durch Koeffizientenvergleichung von $a_1, a_2, \ldots, a_m$ die folgenden m linearen Gleichungen für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

$$\text{(A)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu A_{k\nu} = \begin{cases} 1 \text{ für } k = \mu, \\ 0 \text{ für } k = 1, 2, \cdots, m \text{ außer } k = \mu. \end{cases}$$

Zweitens besitzt die „beste Annäherung" für a_μ auch das größte Gewicht r, es sind also $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ so zu bestimmen, daß

$$\text{(B)} \qquad \frac{\lambda_1^2}{p_1} + \frac{\lambda_2^2}{p_2} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{p_n} = \text{Min.}$$

wird. Auf diesen Relationen (A) und (B) beruht aber die Behandlung der Methode der kleinsten Quadrate in ihrer üblichen*) Form.

Auch der Fall der bedingten Ausgleichung, wo außer den bisherigen Annäherungen noch einige exakte lineare Beziehungen durch die Ausgleichungswerte für $a_1, a_2, \ldots, a_m$ unter allen Umständen zu erfüllen sind, läßt sich in bekannter Weise hieran anschließen.

Göttingen, den 3. März 1914.

*) Vgl. z. B. A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von H. Liebmann, Leipzig-Berlin 1912, S. 222 ff.

Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum_0^\infty q^{\nu^2} x^\nu$.

Von

Felix Bernstein und Otto Szász in Göttingen.

Die Frage, wann ein unendlicher Kettenbruch

$$(1) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots, \qquad (a_\nu \neq 0)$$

dessen Elemente *ganze rationale* Zahlen seien, einen irrationalen Wert hat, bildet bekanntlich seit langem den Gegenstand mathematischer Untersuchungen.*) Für Kettenbrüche mit lauter positiven Elementen (eine endliche Anzahl negativer zugelassen), auf die wir uns hier beschränken wollen, ist das allgemeinste Resultat in dem Sternschen Satze enthalten:

Ist

$$(2) \qquad b_\nu \geqq a_\nu \quad \text{von einem gewissen } \nu \text{ an,}$$

so ist der Kettenbruch (1) irrational.

Im folgenden (§ 1) wird die Bedingung (2) durch eine allgemeinere ersetzt; um einen einfachen Spezialfall vor Augen zu haben, z. B. durch die folgende:

$$b_{3\nu-2} b_{3\nu-1} b_{3\nu} \geqq a_{3\nu-2} a_{3\nu-1} a_{3\nu}$$

von einem gewissen ν an.

In § 2 wird mit Hilfe dieses Resultates die Irrationalität der Jacobischen Thetareihe $\sum_0^\infty q^{\nu^2} x^\nu$ für alle rationalen Werte von x und gewisse

*) Vgl. A. Pringsheim, Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. Sitzungsber. d. math.-phys. Kl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. XXVIII (1898), S. 325—337. — Bezüglich der bisher bekannten Resultate und der Literaturnachweise vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, § 52. Im folgenden unter „Perron, Lehrbuch" zitiert.

rationale Werte von q nachgewiesen und damit insbesondere eine Untersuchung von Eisenstein weitergeführt.

§ 1.

Irrationalitätssatz. *Wenn die Elemente des Kettenbruches* (1) *positive ganze Zahlen sind, die für eine wachsende Zahlenfolge: $n_1, n_2, n_3, \cdots$ den Bedingungen genügen:*

$$(\alpha) \qquad b_{n_\nu+1} b_{n_\nu+2} \cdots b_{n_{\nu+1}} \geqq a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \cdots a_{n_{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

so konvergiert der Kettenbruch und sein Wert ξ_0 ist irrational.

Beweis: Nach einem Pringsheimschen Satze ist zur Konvergenz hinreichend, daß die Reihe $\sum_2^\infty \sqrt{\frac{b_{\nu-1} b_\nu}{a_\nu}}$ divergiert (vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 239, Satz 10). Wäre aber diese Reihe konvergent, so wäre

$$b_{\nu-1} b_\nu < a_\nu$$

für alle hinreichend großen Werte von ν, also auch, da $b_\nu \geqq 1$ ist:

$$b_{n_\nu+1} b_{n_\nu+2} \cdots b_{n_{\nu+1}} < a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \cdots a_{n_{\nu+1}}$$

für alle hinreichend großen Werte von ν; dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung (α), womit die Konvergenz des Kettenbruches bewiesen ist.

Offenbar konvergieren auch die Kettenbrüche:

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

und es ist nach Perron, Lehrbuch, S. 252, Formel (5):

$$(3) \qquad \xi_\nu (B_{\nu-1} \xi_0 - A_{\nu-1}) = - a_\nu (B_{\nu-2} \xi_0 - A_{\nu-2}).$$

Die Näherungszähler A_ν und -Nenner B_ν sind hier offenbar ganze Zahlen. Wegen $\xi_\nu > b_\nu$ folgt nun aus (α) sofort:

$$(4) \qquad \xi_{n_\nu+1} \xi_{n_\nu+2} \cdots \xi_{n_{\nu+1}} > a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \cdots a_{n_{\nu+1}}. \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

Ferner folgt aus (3), da $B_0 \xi_0 - A_0 = \xi_0 > 0$ ist, daß auch allgemein:

$$B_\nu \xi_0 - A_\nu + 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

ist. Setzt man nun in (3) für ν nacheinander $n_\nu + 1, n_\nu + 2, \cdots, n_{\nu+1}$, so erhält man unmittelbar:

$$\xi_{n_\nu+1} \xi_{n_\nu+2} \cdots \xi_{n_{\nu+1}} (B_{n_{\nu+1}-1} \xi_0 - A_{n_{\nu+1}-1}) = (-1)^{n_{\nu+1} - n_\nu} a_{n_\nu+1} a_{n_\nu+2} \cdots$$
$$a_{n_{\nu+1}} (B_{n_\nu-1} \xi_0 - A_{n_\nu-1}),$$

und hieraus mit Rücksicht auf (4):

$$\left|B_{n_{\nu+1}-1}\xi_0 - A_{n_{\nu+1}-1}\right| < \left|B_{n_\nu-1}\xi_0 - A_{n_\nu-1}\right| \quad (\nu = 1,2,3,\cdots).$$

Demnach sind die unendlich vielen positiven Zahlen:

$$\left|B_{n_\nu-1}\xi_0 - A_{n_\nu-1}\right| \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

alle voneinander verschieden und liegen unterhalb einer festen endlichen Schranke. Das ist aber wegen der Ganzzahligkeit der A_ν, B_ν nur für irrationales ξ_0 möglich (vgl. etwa Perron, Lehrbuch, S. 155, Fußnote), w. z. b. w.

Offenbar dürfen *bis zu einem festen Index n die a_ν, b_ν beliebige rationale Zahlen* sein, denn die Irrationalität des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_n^\infty$ zieht auch die Konvergenz und Irrationalität des Kettenbruches (1) nach sich.

Setzt man:

$$n_1 = n,\ n_\nu = n + \nu - 1 \qquad (\nu = 2, 3, \cdots),$$

so reduziert sich (α) auf die in der Einleitung zitierte Irrationalitätsbedingung (2).

§ 2.

Setzt man:

$$n_1 = n,\ n_\nu = n + 3(\nu - 1) \qquad (\nu = 2, 3, \cdots),$$

so reduziert sich (α) auf:

$$(\alpha') \qquad b_{n+3\nu-2}\, b_{n+3\nu-1}\, b_{n+3\nu} \geqq a_{n+3\nu-2}\, a_{n+3\nu-1}\, a_{n+3\nu} \quad (\nu = 1,2,3,\cdots).$$

Anwendung: Die auf einen Eisensteinschen Kettenbruch zurückgehende Entwicklung:

$$\sum_0^\infty q^{\nu^2} x^\nu = 1 + \frac{qx|}{|1} - \frac{q^3 x|}{|1} + \frac{q^3(1-q^2)x|}{|1} - \cdots - \frac{q^{4\nu-1}x|}{|1} + \frac{q^{2\nu+1}(1-q^{2\nu})x|}{|1} - \cdots$$

gilt bekanntlich (Perron, Lehrbuch, S. 353) für $|q| < 1$ und für alle x.

Sei nun:

$$q = \frac{r}{s},\ |r| < |s|,\ x = \frac{m}{n}, \qquad r,\ s,\ m,\ n \text{ ganze Zahlen,}$$

so folgt:

$$\sum_0^\infty \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu^2}\left(\frac{m}{n}\right)^\nu = 1 + \frac{\frac{r}{s}\frac{m}{n}\Big|}{|1} - \frac{\left(\frac{r}{s}\right)^3\frac{m}{n}\Big|}{|1} + \frac{\left(\frac{r}{s}\right)^3\left(1-\left(\frac{r}{s}\right)^2\right)\frac{m}{n}\Big|}{|1} - \cdots - \frac{\left(\frac{r}{s}\right)^{4\nu-1}\frac{m}{n}\Big|}{|1} + \frac{\left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu+1}\left(1-\left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu}\right)\frac{m}{n}\Big|}{|1} - \cdots$$

Nun gilt bekanntlich die Äquivalenz:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{c_1 a_1}{c_1 b_1},\ \frac{c_{\nu-1} c_\nu b_\nu}{c_\nu a_\nu}\right]_2^\infty \quad \text{für beliebige } c_\nu\ (c_\nu \neq 0). \tag{5}$$

Setzt man für den obigen Kettenbruch:

$$c_{2\nu-1} = s^{2\nu-1} n, \quad c_{2\nu} = s^{2\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so erhält man:

$$\sum_0^\infty \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu^2} \left(\frac{m}{n}\right)^\nu = 1 + \frac{rm|}{|sn} - \frac{r^2 m|}{|s^2} + \frac{r^3(s^2 - r^2) m|}{|s^3 n} - \cdots - \frac{r^{4\nu-1} m|}{|s^{2\nu}} + \frac{r^{2\nu+1}(s^{2\nu} - r^{2\nu}) m|}{|s^{2\nu+1} n} - \cdots. \tag{6}$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß s und n *positive* Zahlen sind. Ist nun:

(a) $$r > 0, \quad m > 0;$$

so erhält man aus (6) durch Extension (Perron, Lehrbuch, § 44) den Kettenbruch:

$$1 + \frac{rm|}{|sn - 1} + \frac{1|}{|1} + \frac{r^3 m|}{|s^2 - r^3 m} + \frac{r^3(s^2 - r^2) m|}{|s^3 n - 1} + \cdots + \frac{1|}{|1} + \frac{r^{4\nu-1} m|}{|s^{2\nu} - r^{4\nu-1} m} + \frac{r^{2\nu+1}(s^{2\nu} - r^{2\nu}) m|}{|s^{2\nu+1} n - 1} + \cdots.$$

Dieser Kettenbruch hat von einem gewissen Index an lauter positive Elemente, wenn die Ungleichung:

$$s^{2\nu} - r^{4\nu-1} m > 0$$

für alle hinreichend großen Werte von ν erfüllt ist; hierzu muß offenbar

$$s > r^2$$

sein. Ferner lautet jetzt Bedingung (α'):

$$(s^{2\nu} - r^{4\nu-1} m)(s^{2\nu+1} n - 1) \geqq r^{6\nu}(s^{2\nu} - r^{2\nu}) m^2,$$

oder:

$$\left(1 - \left(\frac{r^2}{s}\right)^{2\nu} \frac{m}{r}\right)\left(\left(\frac{s}{r^3}\right)^{2\nu} sn - \frac{1}{r^{6\nu}}\right) \geqq \left(1 - \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu}\right) m^2$$

für alle hinreichend großen Werte von ν; hierzu ist notwendig und auch hinreichend, daß $s > r^3$, also $\frac{r}{s} < \frac{1}{r^2}$ sei. Wir haben also das Resultat erhalten:

Sind r, s, m, n positive ganze Zahlen und ist:

$$s \geqq 2, \quad 0 < r^3 < s,$$

so ist die Reihe in (6) irrational.*)

---

*) Es ist klar, daß wenn der extendierte Kettenbruch konvergiert, dann auch der ursprüngliche konvergiert, u. z. gegen denselben Wert.

(b) Sei $r > 0, \quad m = -m' < 0.$

Mit Hilfe der Transformation (5) für

$$c_{2\nu-1} = s^{2\nu-2}, \quad c_{2\nu} = \frac{1}{c_{2\nu-1}} = s^{-2\nu+2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

erhält man jetzt aus (6):

$$\sum_0^\infty \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu^2} \left(\frac{m}{n}\right)^\nu = 1 - \frac{rm' |}{| sn} + \frac{r^3 m' |}{| s^2} - \frac{s^2 r^3 (s^2 - r^2) m' |}{| s^5 n} + \cdots + \frac{r^{4\nu-1} m' |}{| s^2}$$
$$- \frac{s^2 r^{2\nu+1}(s^{2\nu} - r^{2\nu}) m' |}{| s^{4\nu+1} n} + \cdots,$$

und hieraus durch Extension den Kettenbruch:

$$1 - \frac{rm' |}{| sn} + \frac{r^3 m' |}{| s^2 - 1} + \frac{1 |}{| 1} + \frac{s^2 r^3 (s^2 - r^2) m' |}{| s^5 n - s^2 r^3 (s^2 - r^2) m'} + \cdots + \frac{r^{4\nu-1} m |}{| s^2 - 1} + \frac{1 |}{| 1}$$
$$+ \frac{s^2 r^{2\nu+1}(s^{2\nu} - r^{2\nu}) m' |}{| s^{4\nu+1} n - s^2 r^{2\nu+1}(s^{2\nu} - r^{2\nu}) m'} + \cdots.$$

Dieser Kettenbruch hat von einem gewissen Index an lauter positive Elemente; ferner lautet jetzt Bedingung (α'):

$$(s^2 - 1) s^{4\nu+1} n - s^2 r^{2\nu+1} (s^{2\nu} - r^{2\nu}) m' \geqq r^{6\nu} s^2 (s^{2\nu} - r^{2\nu}) m'^2,$$

oder

$$sn(s^2 - 1) \left(\frac{s}{r^3}\right)^{2\nu} - \frac{s^2}{r^{4\nu-1}} \left(1 - \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu}\right) m' \geqq s^2 \left(1 - \left(\frac{r}{s}\right)^{2\nu}\right) m'^2$$

für alle hinreichend großen Werte von ν. Hierzu ist wiederum notwendig und hinreichend, daß $s > r^3$ sei.

Also die Reihe in (6) hat auch für:

$$s \geqq 2, \quad 0 < r^3 < s, \quad r,\ s,\ -m,\ n \text{ positive ganze Zahlen,}$$

einen irrationalen Wert.

Der Fall $r < 0$, $m > 0$ ist mit dem Fall (b), und der Fall $r < 0$, $m < 0$ mit dem Falle (a) äquivalent, denn es ist:

$$\sum_0^\infty \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu^2} \left(\frac{m}{n}\right)^\nu = \sum_0^\infty \left(\frac{-r}{s}\right)^{\nu^2} \left(\frac{-m}{n}\right)^\nu.$$

Für $s = r^3$ schließlich ist $\frac{r}{s} = \frac{1}{r^2}$ und dieser Fall ist in unseren Überlegungen enthalten.

Zusammenfassend gilt also der

Satz. *Wenn x eine beliebige rationale Zahl ist und r, s reelle ganze Zahlen sind, die den Bedingungen genügen:*

$$|s| \geqq 2, \quad |s| \geqq |r|^3,$$

so hat die unendliche Reihe $\sum_0^\infty \left(\frac{r}{s}\right)^{\nu^2} x^\nu$ *einen irrationalen Wert.*

Mit Hilfe des Sternschen Kriteriums folgt die Irrationalität nur für $r = 1$, wenn man außerdem x gewissen Bedingungen unterwirft. Derartige Bedingungen haben schon Eisenstein*), Stern**) und Glaisher***) gefunden. Unter diesen sind die Sternschen Bedingungen die allgemeinsten. Sie folgen aus einem allgemeineren Irrationalitätskriterium für unendliche Reihen, aber auch dieses führt über den Fall $r = 1$ nicht hinaus.†)

Bekanntlich bewies schon Lambert im Jahre 1767 mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left[\frac{x^2}{2\nu - 1}\right]_1^\infty$$

ganz streng die Irrationalität von e^x für jedes rationale x. Man kann dies jetzt auch aus dem Lagrangeschen Kettenbruch für e^x (aus d. J. 1776):

$$(7)\quad e^x = 1 + \frac{x|}{|1} - \frac{x|}{|2} + \frac{x|}{|3} - \frac{x|}{|2} + \cdots + \frac{x|}{|2\nu - 1} - \frac{x|}{|2} + \frac{x|}{|2\nu + 1} - \cdots$$

direkt erschließen. Aus (7) folgt nämlich:

$$e^{-\frac{m}{n}} = 1 - \frac{\frac{m}{n}\Big|}{|1} + \frac{\frac{m}{n}\Big|}{|2} - \frac{\frac{m}{n}\Big|}{|3} + \cdots - \frac{\frac{m}{n}\Big|}{|2\nu - 1} + \frac{\frac{m}{n}\Big|}{|2} - \cdots$$

$$= 1 - \frac{m|}{|n} + \frac{m|}{|2} - \frac{m|}{|3n} + \cdots - \frac{m|}{|(2\nu - 1)n} + \frac{m|}{|2} - \cdots,$$

und durch Extension erhält man hieraus für $m > 0$ den Kettenbruch

$$1 - \frac{m|}{|n} + \frac{m|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{m|}{|3n - m} + \frac{m|}{|1} + \cdots + \frac{m|}{|(2\nu - 1)n - m} + \frac{m|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots.$$

Nach unserem Kriterium folgt aber hieraus sofort die Irrationalität von e^x für jedes negative rationale x. Aus $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ folgt dann aber die Irrationalität für *jedes* rationale x.

---

*) G. Eisenstein, Transformations remarquables de quelques séries. Journ. f. Math. 27 (1844), S. 193—197; insbes. S. 193—194.

**) M. A. Stern, Über die Irrationalität des Wertes gewisser Reihen. Journ. f. Math. 37 (1848), S. 95—96. — Über Irrationalität von Reihen. Ebenda 95 (1883), S. 197—200.

***) J. W. L. Glaisher, On Arihmetical Irrationality. The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine, IV. Series, Vol. XLV (1873), p. 191—198. Die Glaisherschen Resultate sind in der älteren Sternschen Arbeit, die er offenbar nicht kannte, enthalten.

†) In einer demnächst in diesen Annalen erscheinenden Arbeit wird Szász diese Untersuchungen fortsetzen.

Bemerkungen zu Herrn Perrons Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche.

Von

Otto Szász in Göttingen.

Einleitung.

Die folgenden Ausführungen geben Ergänzungen zu einer vor kurzem erschienenen Arbeit des Herrn O. Perron.*)

Sei $\psi(x)$ eine im Intervall $(-\infty, +\infty)$ niemals abnehmende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen, aber derart, daß die Integrale:

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^{\varkappa-1}\, d\psi(x) = c_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots)$$

sämtlich existieren. Dann besitzt bekanntlich**) das Integral:

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

einen assoziierten Kettenbruch:

$$(3) \qquad \frac{k_1|}{|z+l_1} + \frac{k_2|}{|z+l_2} + \frac{k_3|}{|z+l_3} + \cdots,$$

und zwar ist k_1 positiv, die anderen k_ν negativ; setzt man

$$(4) \qquad \varphi_0 = 1, \quad \varphi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_\nu \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \cdots & c_{2\nu-1} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

*) Erweiterung eines Markoffschen Satzes über die Konvergenz gewisser Kettenbrüche, Math. Ann. 74 (1913), S. 545—554.

**) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 377. Auf dieses inhaltreiche Werk werde ich noch öfters hinweisen und es kurz unter Perron, „Lehrbuch" zitieren.

$$(5)\qquad \chi_1 = c_2,\quad \chi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{\nu-1} & c_{\nu+1} \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_\nu & c_{\nu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \cdots & c_{2\nu-2} & c_{2\nu} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots),$$

so ist (vgl. Perron, Lehrbuch, S. 376 u. 325):

$$(6)\qquad \left.\begin{aligned} k_1 &= \varphi_1, \quad k_\nu = -\frac{\varphi_{\nu-2}\,\varphi_\nu}{\varphi_{\nu-1}^2} \\ l_1 &= -\frac{\chi_1}{\varphi_1}, \quad l_\nu = \frac{\chi_{\nu-1}}{\varphi_{\nu-1}} - \frac{\chi_\nu}{\varphi_\nu} \end{aligned}\right\} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots).$$

Sind die Integrationsgrenzen endlich, also etwa $\psi(x)$ konstant für $x \leqq a$ und für $x \geqq b$, so kann man das Integral (2) durch $\int\limits_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$ ersetzen, und nach einem Satze des Herrn Markoff (vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 385) ist jetzt der Kettenbruch (3) für alle z, welche nicht dem Intervall $-b \leqq z \leqq -a$ angehören, konvergent und gleich dem Integral.

Ist nur eine der beiden Integrationsgrenzen unendlich, so genügt es offenbar, sich auf den Fall zu beschränken, daß die untere Integrationsgrenze endlich ($=a$) ist. Sodann besteht das allgemeinste Resultat in dem folgenden Satze des Herrn Perron (a. a. O. § 1):

Besitzt $\psi(x)$ beliebig große Wachstumsstellen, so ist für genügend große $\varkappa$: $\int\limits_a^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x) > 0$; ist ferner

$$(7)\qquad \liminf_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\frac{1}{\varkappa!}\int_a^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x)} = \text{endlich},$$

so ist der mit dem Integral

$$(8)\qquad \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

assoziierte Kettenbruch für $\Re(z) > -a$ konvergent und gleich dem Integral. Ist $a \geqq 0$, so ist der Kettenbruch sogar für alle z, die nicht dem Bereich $z \leqq -a$ angehören, konvergent und gleich dem Integral. Herr Perron bemerkte*), daß dies höchstwahrscheinlich auch für $a < 0$ der Fall ist.

Im folgenden beweise ich die Richtigkeit dieser Vermutung, und benutze das Perronsche Resultat nur, soweit es sich auf den Fall $a = 0$ bezieht, ohne weitere Konvergenzbetrachtungen anstellen zu müssen. Dies

*) A. a. O. S. 548, Fußnote. — $\Re(z)$ bedeutet den reellen Teil von z.

gelingt mit Hilfe eines Transformationssatzes (§ 1), der an sich von größter Einfachheit, bisher nicht bemerkt worden ist, und der sich nützlich erweist, um noch eine Fülle von Sätzen, die sich auf das Integral

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} \tag{9}$$

beziehen, unmittelbar auf das Integral (8) zu übertragen. In dieser Arbeit möchte ich hierauf nicht näher eingehen.

Ich bemerke, daß sich auch der Markoffsche Satz als Spezialfall aus unseren Betrachtungen von neuem ergibt, denn es braucht nicht gefordert zu werden, daß $\psi(x)$ beliebig große Wachstumsstellen besitze, vielmehr darf $\psi(x)$ von einer gewissen Stelle an konstant bleiben. Dies ist vom Standpunkte einer einheitlichen Ableitung aller dieser Sätze nicht ohne Interesse.

Für den allgemeinen Fall, daß beide Integrationsgrenzen unendlich sind, besitzt man noch keinen Konvergenzsatz; ein solcher wird in § 4 dieser Arbeit gegeben.

Ist $a \geqq 0$, so hat das Integral (8) auch einen korrespondierenden Kettenbruch (vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 377)

$$\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots \tag{10}$$

und zwar sind alle b_ν positiv; setzt man

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_\nu = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \cdots & c_\nu \\ c_3 & c_4 & \cdots & c_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \cdots & c_{2\nu-2} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots), \tag{11}$$

so folgt aus Perrons Lehrbuch, S. 304, Satz 5 und S. 375, Formel (6):

$$b_1 = \frac{1}{\varphi_1}, \quad b_{2\nu} = -\frac{\varphi_\nu^2}{\psi_\nu \psi_{\nu+1}}, \quad b_{2\nu+1} = \frac{\psi_{\nu+1}^2}{\varphi_\nu \varphi_{\nu+1}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots); \tag{12}$$

dabei ist φ_ν durch (4) definiert. Dieser Kettenbruch steht in enger Beziehung zu dem assoziierten Kettenbruch. Sind nämlich

$$\frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)}, \quad \frac{A_\nu(z)}{B_\nu(z)}$$

die Näherungsbrüche ν^{ter} Ordnung des Kettenbruches (3) bzw. des Kettenbruches (10), so ist

$$\frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)} = \frac{A_{2\nu}(z)}{B_{2\nu}(z)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots); \tag{13}$$

für die Integrale (8) und (2) wird sich ein zu (10) analoger Kettenbruch ergeben, welcher zu dem assoziierten Kettenbruch in derselben Beziehung steht, wie der Kettenbruch (10) für den Fall $a = 0$.

§ 1.

Ist rein formal die Reihe

$$(14)\qquad \frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_3}{z^3}+\cdots$$

gegeben, und bildet man mit Hilfe der Formeln (4), (5) und (6) den Kettenbruch (3)*), so nennt man diesen auch mit der Reihe (14) assoziiert. Er besitzt die charakteristische Eigenschaft (vgl. Perron, Lehrbuch, S. 376), daß die Entwicklung des Näherungsbruches ν^{ter} Ordnung $\frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)}$ nach fallenden Potenzen von z bis zur Potenz $z^{-2\nu}$ einschließlich mit der Reihe (14) übereinstimmt.

Ich formuliere nun den

Satz 1. *Wenn von den drei Beziehungen*

$$(\mathrm{I})\qquad \frac{k_1|}{|z+l_1}+\frac{k_2|}{|z+l_2}+\cdots \textit{ assoziiert mit } \frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots,$$

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{k_1|}{|z+\beta+l_1}+\frac{k_2|}{|z+\beta+l_2}+\cdots \textit{ assoziiert mit } \frac{d_1}{z}+\frac{d_2}{z^2}+\cdots,$$

$$(\mathrm{III})\qquad \frac{d_1}{z}+\frac{d_2}{z^2}+\cdots \textit{ formal gleich } \frac{c_1}{z+\beta}+\frac{c_2}{(z+\beta)^2}+\cdots$$

*irgend zwei statthaben, so hat auch die dritte statt.***)

Der Beweis läßt sich mit Hilfe einer von Herrn Perron mir freundlichst mitgeteilten Vereinfachung folgendermaßen führen:

Beziehung (I) besagt:

$$\frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)}=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_{2\nu}}{z^{2\nu}}+\frac{c'}{z^{2\nu+1}}+\cdots,$$

also auch

$$\frac{K_\nu(z+\beta)}{L_\nu(z+\beta)}=\frac{c_1}{z+\beta}+\frac{c_2}{(z+\beta)^2}+\cdots+\frac{c_{2\nu}}{(z+\beta)^{2\nu}}+\frac{c'}{(z+\beta)^{2\nu+1}}+\cdots;$$

wofür wir auch setzen können:

$$(\mathrm{I}')\qquad \lim_{z=\infty}\left[\frac{K_\nu(z+\beta)}{L_\nu(z+\beta)}-\left(\frac{c_1}{z+\beta}+\cdots+\frac{c_{2\nu}}{(z+\beta)^{2\nu}}\right)\right]z^{2\nu}=0$$

$$\text{für } \nu=1,2,3,\cdots.$$

---

*) Vorausgesetzt, daß $\varphi_\nu \neq 0$ $(\nu=1,2,3,\cdots)$ ist. Sind speziell die φ_ν durch (1) definiert, also die Reihe die formale Entwicklung des Integrals (2), so ist dies der Fall.

**) Man kann den Satz statt für die Transformation $z+\beta$ etwas allgemeiner für die Transformation $\frac{z}{\alpha}+\beta$ $(\alpha \neq 0)$ formulieren. — Unter „formal gleich" in (III) ist zu verstehen, daß die formale Entwicklung der zweiten Reihe nach fallenden Potenzen von z identisch wird mit der ersten Reihe. Es bestehen also die Gleichungen:

$$d_\varkappa=c_\varkappa-\binom{\varkappa-1}{1}\beta c_{\varkappa-1}+\binom{\varkappa-1}{2}\beta^2 c_{\varkappa-2}-\cdots+(-1)^{\varkappa-1}\beta^{\varkappa-1}c_1$$

$$(\varkappa=1,2,3,\cdots).$$

Ebenso ist Beziehung (II) gleichbedeutend mit:

$$\text{(II')} \qquad \lim_{z=\infty}\left[\frac{K_\nu(z+\beta)}{L_\nu(z+\beta)}-\left(\frac{d_1}{z}+\cdots+\frac{d_{2\nu}}{z^{2\nu}}\right)\right]z^{2\nu}=0$$

$$\text{für } \nu = 1, 2, 3, \cdots.$$

Schließlich besagt Beziehung (III):

$$\text{(III')} \qquad \lim_{z=\infty}\left[\left(\frac{d_1}{z}+\cdots+\frac{d_{2\nu}}{z^{2\nu}}\right)-\left(\frac{c_1}{z+\beta}+\cdots+\frac{c_{2\nu}}{(z+\beta)^{2\nu}}\right)\right]z^{2\nu}=0$$

$$\text{für } \nu = 1, 2, 3, \cdots;$$

und es ist klar, daß von den drei Beziehungen (I'), (II'), (III') je zwei die dritte zur Folge haben; somit ist der Satz bewiesen.

Ich leite aus diesem Satze eine speziellere Folgerung ab, auf die ich mich später beziehen werde. Offenbar ist die formale Entwicklung des Integrals

$$\int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x+\beta}$$

nach fallenden Potenzen von z gleich der entsprechenden Entwicklung des Integrals

$$\int_{a+\beta}^\infty \frac{d\psi(x-\beta)}{z+x}.$$

Denn es folgt ja durch eine einfache Transformation der Integrationsvariablen

$$\int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+\beta+x}=\int_{a+\beta}^\infty \frac{d\psi(x-\beta)}{z+x};$$

nun ist aber das erstere Integral formal gleich der Reihe $\sum_1^\infty \frac{c_\nu}{(z+\beta)^\nu}$ und das letztere Integral formal gleich einer Reihe $\sum_1^\infty \frac{d_\nu}{z^\nu}$; aus Satz 1 folgt daher der

Satz 1'. *Ist*

$$\frac{k_1\,|}{|\,z+l_1}+\frac{k_2\,|}{|\,z+l_2}+\cdots \text{ \textit{assoziiert mit} } \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x},$$

so ist

$$\frac{k_1\,|}{|\,z+\beta+l_1}+\frac{k_2\,|}{|\,z+\beta+l_2}+\cdots \text{ \textit{assoziiert mit} } \int_{a+\beta}^\infty \frac{d\psi(x-\beta)}{z+x};$$

dies gilt offenbar auch für $a=-\infty$.

§ 2.

Besitzt $\psi(x)$ beliebig große Wachstumsstellen und ist

$$\text{(15)} \qquad \liminf_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\frac{1}{\varkappa!}\int_0^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x)} = \text{endlich},$$

so konvergiert — wie Herr Perron bewies (a. a. O. Satz 2) — der Kettenbruch (10) für alle z, die nicht der negativ reellen Achse inkl. 0 angehören und ist gleich dem korrespondierenden Integral (9).

Um die Bedingung, daß $\psi(x)$ beliebig große Wachstumsstellen besitze, durch die weniger erfordernde zu ersetzen, daß $\psi(x)$ unendlich viele Wachstumsstellen aufweise, haben wir nur zu bemerken, daß die obige Voraussetzung von Herrn Perron nur bei der Kettenbruchentwicklung des Integrals (8) benutzt wurde, der Konvergenzbeweis des Kettenbruches (10) hingegen von dieser Voraussetzung frei ist. Ich werde im folgenden (§ 3) obigen Satz mit dieser Erweiterung benützen.*)

Mit Rücksicht auf die Beziehung (15) folgt hieraus, daß unter der Bedingung (15) auch der assoziierte Kettenbruch für alle z, die nicht dem Intervall $z \leqq 0$ angehören, konvergiert und gleich dem Integral ist.**)

Man beachte, daß die Bedingung (15) sicherlich erfüllt ist, wenn die obere Integrationsgrenze auch endlich ist; denn in diesem Falle ist offenbar:

$$(-1)^{\varkappa-1}c_\varkappa = \int_0^b x^{\varkappa-1}\,d\psi(x) \leqq b^{\varkappa-1}c_1 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots).$$

§ 3.

Die Sätze des § 2 will ich unter der Bedingung, daß

$$\text{(16)} \qquad \liminf_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\frac{1}{\varkappa!}\left|\int_a^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x)\right|} = \text{endlich}$$

ist, auf das Integral

$$\text{(17)} \qquad F(z) = \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

übertragen; hierbei ist a irgendeine reelle Zahl.

---

*) Es läßt sich leicht beweisen, daß die Bedingung (18) durch die etwas allgemeinere ersetzt werden kann: es soll eine Zahl G existieren, so daß

$$\overline{\lim_{\varkappa=\infty}}\inf \frac{1}{G^\varkappa\,\varkappa!}\int_{\varkappa G}^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x) = 0$$

ist; diese Erweiterung wird im folgenden nicht benützt.

**) Wenn die Bedingung nicht erfüllt ist, konvergiert er zwar auch (vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 398, Satz 6), aber möglicherweise nicht gegen das ihn erzeugende Integral (9).

Offenbar ist $\psi(x+a)$ eine im Intervall $(0, \infty)$ niemals abnehmende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen und es ist

(18) $$F(z-a) = \int_0^\infty \frac{d\psi(x+a)}{z+x}.$$

Ich will nun auf dieses Integral die in § 2 angeführten Perronschen Sätze anwenden, habe daher zu zeigen, daß unter der Voraussetzung (16) auch

(19) $$\liminf_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\frac{1}{\varkappa!}\int_0^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x+a)} = \text{endlich}$$

ist. Nun besagt aber die Beziehung (16), daß für unbegrenzt viele Werte von $\varkappa$ die Ungleichung besteht:

$$\left|\int_a^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x)\right| = |c_\varkappa| \leqq G^\varkappa \varkappa!,$$

wo G eine von $\varkappa$ unabhängige Zahl ist. Ich betrachte nur diese Werte von $\varkappa$; dann ist für $\nu \leqq \varkappa$:

$$|c_\nu| = \left|\int_a^\infty x^{\nu-1}\,d\psi(x)\right| \leqq \left|\int_a^1 x^{\nu-1}\,d\psi(x)\right| + \int_1^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x)$$

$$\leqq (|a|+1)^{\nu-1}c_1 + |c_\varkappa| + \left|\int_a^1 x^{\varkappa-1}\,d\psi(x)\right|$$

$$\leqq 2(|a|+1)^\varkappa c_1 + |c_\varkappa|,$$

also für genügend große Werte von $\varkappa$:

(20) $$|c_\nu| \leqq (|a| + G + 1)^\varkappa \varkappa! \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \varkappa).$$

Nun ist aber

$$\int_0^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x+a) = \int_a^\infty (x-a)^{\varkappa-1}\,d\psi(x)$$

$$\leqq |c_\varkappa| + \binom{\varkappa-1}{1}|a|\,|c_{\varkappa-1}| + \cdots + |a|^{\varkappa-1}c_1;$$

daher mit Rücksicht auf (20):

$$\int_0^\infty x^{\varkappa-1}\,d\psi(x+a) \leqq (|a| + 1 + G)^\varkappa (|a|+1)^\varkappa \varkappa!,$$

also ist die Bedingung (19) erfüllt. Bezeichnet man also mit

(21) $$\frac{k_1'|}{|z+l_1'} + \frac{k_2'|}{|z+l_2'} + \frac{k_3'|}{|z+l_3'} + \cdots$$

den assoziierten Kettenbruch des Integrals (18), so konvergiert derselbe für alle z, die nicht der negativ reellen Achse inklusive Null angehören und unter der Bedingung (16) ist er in diesem Bereich gleich dem Integral.

Ersetzt man wieder z duch $z+a$, so hat man also das Resultat:

Der Kettenbruch

$$(22)\qquad \frac{k_1'\;|}{|\,z+a+l_1'} + \frac{k_2'\;|}{|\,z+a+l_2'} + \frac{k_3'\;|}{|\,z+a+l_3'} + \cdots$$

konvergiert gegen das Integral (17) für alle z, die nicht dem Intervall $z \leqq -a$ angehören. Es bleibt noch zu zeigen, daß dieser Kettenbruch mit dem Integral (17) assoziiert ist. Dies ist nicht etwa trivial und darf nicht einmal aus dem Umstande gefolgert werden, daß der Kettenbruch (22) gegen das Integral (17) konvergiert, denn es ist noch nicht bewiesen, daß ein Kettenbruch dieser Form, falls er gegen das Integral (17) konvergiert, auch mit ihm assoziiert ist. Daß im vorliegenden Falle der Kettenbruch (22) mit dem Integral (17) assoziiert ist, folgt aber unmittelbar aus Satz 1′; es ist also

$$(23)\qquad k_\nu' = k_\nu,\quad a + l_\nu' = l_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots);$$

hierbei ist k_ν', l_ν' in eben solcher Weise aus den

$$c_\varkappa' = \int_0^\infty (-x)^{\varkappa-1}\, d\psi(x+a) \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots)$$

zu bilden, wie k_ν, l_ν aus den $c_\varkappa$ gebildet wurde (vgl. die Formeln (4), (5) und (6)).

Die Beziehungen (23) lassen sich auch direkt aus gewissen Eigenschaften der Hankelschen Determinanten ableiten.

Wir haben also das Resultat gewonnen:

Satz 2. *Wenn $\psi(x)$ eine niemals abnehmende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen ist, so konvergiert der mit dem Integral*

$$\int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

assoziierte Kettenbruch für alle z, die nicht dem Intervall $z \leqq -a$ angehören; unter der Voraussetzung (16) *ist er in diesem Bereich auch gleich dem Integral.*

In dem von Herrn Perron angeführten Beispiele (a. a. O., S. 553) ist also der mit dem Integral

$$\int_a^\infty \frac{|x|^\alpha G(x) e^{-x}}{z+x}\, dx \qquad (\alpha > -1,\ |G(x)| \leqq c)$$

assoziierte Kettenbruch für alle z, die nicht dem Intervall $z \leqq -a$ angehören, gleich dem Integral.

Es ergibt sich leicht noch eine andere Kettenbruchentwicklung des Integrals (17). Der mit dem Integral (18) korrespondierende Kettenbruch sei

$$(24)\qquad \frac{1\;|}{|\,b_1' z} + \frac{1\;|}{|\,b_2'} + \frac{1\;|}{|\,b_3' z} + \frac{1\;|}{|\,b_4'} + \cdots,$$

wobei $b_\nu' > 0$ ist. Nach einem Stieltjesschen Satze (vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 390, Satz 4) ist die Divergenz der Reihe $\sum b_\nu'$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Kettenbruch (24) für alle nicht der negativ reellen Achse inklusive 0 angehörenden z konvergiert und gleich dem Integral ist. Ersetzen wir wieder z durch $z + a$ und beachten § 2, so folgt der

Satz 3. *Damit für alle z, die nicht dem Intervall $z \leqq -a$ angehören, die Gleichheit besteht:*

$$(25)\qquad \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} = \frac{1\,|}{|\,b_1'(z+a)} + \frac{1\,|}{|\,b_2'} + \frac{1\,|}{|\,b_3'(z+a)} + \frac{1\,|}{|\,b_4'} + \cdots,$$

ist notwendig und hinreichend, daß $\sum_1^\infty b_\nu'$ divergiert; unter der Voraussetzung (16) *ist dies sicher der Fall.*

Hierbei sind die b_ν' aus den c_ν' in derselben Weise zu bilden, wie die b_ν aus den c_ν gebildet wurden (vgl. die Formeln (11), (12) und (4)).

Bezeichnet man die Näherungsbrüche ν^{ter} Ordnung der Kettenbrüche (21) und (24) bzw. mit $\frac{K_\nu'(z)}{L_\nu'(z)}$ und $\frac{A_\nu'(z)}{B_\nu'(z)}$, so ist offenbar

$$\frac{K_\nu'(z)}{L_\nu'(z)} = \frac{A_{2\nu}'(z)}{B_{2\nu}'(z)} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots);$$

nun ist mit Rücksicht auf die Beziehungen (23) der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung des Kettenbruches (3): $\frac{K_\nu'(z+a)}{L_\nu'(z+a)}$ und der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung des Kettenbruchs (25) ist $\frac{A_\nu'(z+a)}{B_\nu'(z+a)}$. Die Kettenbrüche (3) und (25) stehen also in derselben Beziehung zueinander, wie für $a = 0$ der assoziierte und der korrespondierende Kettenbruch.

§ 4.

Für den assoziierten Kettenbruch (3) des Integrals (2)

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

läßt sich durch weitere Ausgestaltung der Markoffschen Methode ein Konvergenzkriterium ableiten, ähnlich wie Herr Perron (a. a. O.) sein Kriterium für den assoziierten Kettenbruch des Integrals (8) bewies: nur muß $\Omega(x)$ geeignet gewählt werden.

Ich nehme an, daß für unbegrenzt viele Werte von $\varkappa$ die Ungleichung besteht:

$$(26)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2\varkappa}\, d\psi(x) = c_{2\varkappa+1} \leqq G^\varkappa \varkappa!,$$

wo G eine von $\varkappa$ unabhängige Zahl ist. Mit andern Worten, es ist:

$$\liminf_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\frac{c_{2\varkappa+1}}{\varkappa!}} = \text{endlich.}$$

Sodann setze ich

(27) $$\Omega(x) = \frac{-1}{\varphi(z)} \frac{\varphi(x) - \varphi(z)}{x + z},$$

wobei

$$\varphi(x) = \prod_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} (\nu G - x^2) = \varphi(-x)$$

ist. Da $\varphi(x) - \varphi(z)$ durch $x + z$ teilbar ist, so ist $\Omega(x)$ ein Polynom vom Grade $2\varkappa - 1$; sei $\varkappa \leqq \lambda$ und außerdem so gewählt, daß die Ungleichung (26) für diesen Wert von $\varkappa$ erfüllt ist; und zwar dürfen wir uns $\varkappa$ beliebig groß denken, wenn wir nur λ groß genug gewählt haben. Aus Perrons Lehrbuch, S. 379 Formel (17) und S. 368, Hilfssatz 3, folgt, daß die λ Wurzeln von $L_\lambda(-x)$ ungleich und reell sind. Bezeichnet man sie mit $x_1, x_2, \cdots, x_\lambda$, so ist:*)

(28) $$\begin{cases} \dfrac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)} > 0 & (i = 1, 2, \cdots, \lambda), \\ \displaystyle\sum_{1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)} x_i^{\varkappa-1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{\varkappa-1} d\psi(x) \end{cases}$$

(29) $$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z+x} - \Omega(x)\right) d\psi(x) \\ \displaystyle\qquad - \sum_{1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)} \left(\frac{1}{z+x_i} - \Omega(x_i)\right). \end{cases}$$

Wir denken uns jetzt unter z einen beliebigen rein imaginären konstanten Wert, $z = iv$, dann folgt aus (27)

(30) $$\frac{1}{iv + x} - \Omega(x) = \frac{1}{\varphi(iv)} \frac{\varphi(x)}{iv + x};$$

ferner ist:

(31) $$\varphi(iv) = \prod_{1}^{\varkappa}{}^{\nu} (\nu G + v^2).$$

Um nun $\dfrac{\varphi(x)}{iv + x}$ abzuschätzen, unterscheiden wir zwei Fälle; sei erstens

$$(p-1) G \leqq x^2 \leqq p G,$$

*) Vgl. Perron, Lehrbuch, S. 387; daselbst wurden diese Formeln zwar nur für endliche Integrationsgrenzen aufgestellt und benutzt, ihr Beweis ist aber frei von dieser Voraussetzung.

wo p eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \varkappa$ bedeutet. Dann ist

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| &= \prod_{1}^{p-1}{}_{\nu}(x^2 - \nu G)\cdot\prod_{p}^{\varkappa}{}_{\nu}(\nu G - x^2)^{*)}\\ &\leqq \prod_{1}^{p-1}{}_{\nu}(pG - \nu G)\cdot\prod_{p}^{\varkappa}{}_{\nu}(\nu G - (p-1)G)\\ &= G^{\varkappa}(p-1)!(\varkappa - p + 1)!\\ &\leqq G^{\varkappa}\varkappa!.\end{aligned}$$

Daher ist für $0 \leqq x^2 \leqq \varkappa G$:

$$|\varphi(x)| \leqq G^{\varkappa}\varkappa!;$$

also, mit Rücksicht auf (30) und (31):

$$(32)\qquad \left|\frac{1}{iv+x} - \Omega(x)\right| \leqq \frac{1}{|v|}\prod_{1}^{\varkappa}{}_{\nu}\frac{\nu G}{(\nu G + v^2)} = \frac{\varepsilon_{\varkappa}}{|v|} \text{ für } 0 \leqq x^2 \leqq \varkappa G$$

und**)

$$\lim_{\varkappa=\infty} \varepsilon_{\varkappa} = 0.$$

Sei zweitens $x^2 \geqq \varkappa G$; dann ist:

$$\left|\frac{\varphi(x)}{iv+x}\right| = \frac{1}{(v^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\prod_{1}^{\varkappa}{}_{\nu}(x^2 - \nu G) < \frac{x^{2\varkappa}}{(\varkappa G)^{\frac{1}{2}}},$$

daher ist mit Berücksichtigung von (30) und (31):

$$(33)\qquad \left|\frac{1}{iv+x} - \Omega(x)\right| < \varepsilon_{\varkappa}\frac{x^{2\varkappa}}{G^{\varkappa}\varkappa!} \text{ für } x^2 \geqq \varkappa G.$$

Aus (32) und (33) folgt nun zusammenfassend für alle x:

$$(34)\qquad \left|\frac{1}{iv+x} - \Omega(x)\right| < \frac{\varepsilon_{\varkappa}}{|v|} + \varepsilon_{\varkappa}\frac{x^{2\varkappa}}{G^{\varkappa}\varkappa!}.$$

Die Anwendung von (28), (29) und (34) liefert nun die Ungleichung:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(x)}{iv+x} - \frac{K_\lambda(iv)}{L_\lambda(iv)}\right| < \frac{2\varepsilon_{\varkappa}}{|v|}\int_{-\infty}^{\infty} d\psi(x) + \frac{2\varepsilon_{\varkappa}}{G^{\varkappa}\varkappa!}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2\varkappa}\,d\psi(x),$$

und nach unseren Voraussetzungen folgt hieraus sogleich:

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{K_\lambda(iv)}{L_\lambda(iv)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(x)}{iv+x}.$$

---

*) Für $p = 1$ ist das erste Produkt durch 1 zu ersetzen.

**) Hierbei ist $\varepsilon_{\varkappa} = \prod_{1}^{\varkappa}{}_{\nu}\frac{\nu G}{(\nu G + v^2)} = \frac{G^{\varkappa}\varkappa!}{\varphi(iv)}$ gesetzt.

Somit ist zunächst bewiesen, daß der Kettenbruch (3) für jeden rein imaginären Wert von z gegen das Integral (2) konvergiert. Nun ergibt sich aber leicht, daß dies überhaupt für jeden nicht reellen Wert von z der Fall ist. Es ist nämlich

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x+u)}{z+x+u},$$

wenn u irgend eine reelle Zahl bedeutet. Also auch

$$F(z-u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x+u)}{z+x}, \tag{35}$$

und aus Satz 1' folgt, daß dieses Integral mit dem Kettenbruch

$$\frac{k_1 |}{|z-u+l_1} + \frac{k_2 |}{|z-u+l_2} + \frac{k_3 |}{|z-u+l_3} + \cdots$$

assoziiert ist. Ich brauche also nur zu beweisen, daß dieser Kettenbruch für $z = iv$ (v reell $\neq 0$) gegen das Integral (35) konvergiert. Dies ist sicher der Fall, wenn nur für unendlich viele Werte von $\varkappa$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2\varkappa}\, d\psi(x+u) \leqq 4^{\varkappa}(G + |u|)^{\varkappa}\, \varkappa! \tag{36}$$

ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2\varkappa}\, d(x+u) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-u)^{2\varkappa}\, d\psi(x)\\ &\leqq \int_{-|u|}^{|u|} (2|u|)^{2\varkappa}\, d\psi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} (2x)^{2\varkappa}\, d\psi(x)\\ &\leqq (2|u|)^{2\varkappa} c_1 + 4^{\varkappa} c_{2\varkappa+1};\end{aligned}$$

mit Rücksicht auf (26) ist also (36) für unendlich viele Werte von $\varkappa$ erfüllt. Wir können unser Resultat so zusammenfassen:

Satz 4. *Sei $\psi(x)$ eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ niemals abnehmende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen, aber derart, daß die Integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x)^{\varkappa-1}\, d\psi(x) = c_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \cdots)$$

existieren. Wenn dann

$$\liminf_{\varkappa=\infty} \sqrt[\varkappa]{\frac{1}{\varkappa!} c_{2\varkappa+1}} = \text{endlich} \tag{37}$$

ist, so ist der mit dem Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

assoziierte Kettenbruch (3) *für alle nicht reellen Werte von z konvergent und gleich dem Integral.*

Ich bemerke noch, daß man mit Hilfe einer Extension (vgl. Perron, Lehrbuch, § 44) leicht einen Kettenbruch von der Form

$$\frac{1|}{|\beta_1 z + \alpha_1} + \frac{1|}{|\beta_2} + \frac{1|}{|\beta_3 z + \alpha_2} + \frac{1|}{|\beta_4} + \cdots \tag{38}$$

bilden kann, sodaß dessen Näherungsbrüche gerader Ordnung genau mit den aufeinander folgenden Näherungsbrüchen des Kettenbruches (3) übereinstimmen. Der Kettenbruch (38) spielt hier also eine ähnliche Rolle, wie der korrespondierende Kettenbruch für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}.$$

Beispiel: Bereits Tchebychef*) hat für das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ru^2}\,du}{z-u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-rx^2}\,dx}{z+x} \qquad (r>0) \tag{39}$$

die formale Entwicklung gefunden:

$$\frac{-2\sqrt{r\pi}|}{|-2rz} - \frac{2r|}{|-2rz} - \frac{4r|}{|-4rz} - \frac{6r|}{|-6rz} - \cdots; \tag{40}$$

für $r=1$ sind die Näherungsnenner dieses Kettenbruches die Hermiteschen Polynome. Der Kettenbruch ist offenbar äquivalent mit dem folgenden:

$$\frac{\sqrt{\frac{\pi}{r}}\Big|}{|z} - \frac{\frac{1}{2r}\Big|}{|z} - \frac{\frac{2}{2r}\Big|}{|z} - \frac{\frac{3}{2r}\Big|}{|z} - \cdots. \tag{41}$$

Daß dieser Kettenbruch mit dem Integral (39) wirklich assoziiert ist, ergibt sich leicht aus Perrons Lehrbuch, S. 314, Formel (26) wenn man darin $\alpha = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{1}{rz^2}$ setzt; denn das Integral (39) ist formal gleich der Reihe:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{z\sqrt{r}} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(z\sqrt{r})^3} + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{(z\sqrt{r})^5} + \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{z\sqrt{r}}\,\Omega\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{rz^2}\right),$$

wo Ω die Bedeutung von Perrons Lehrbuch, S. 313, Formel (24) hat. Es scheint aber, daß nicht einmal für diesen speziellen Fall die Konvergenz des Kettenbruches gegen das Integral nachgewiesen wurde. Dies folgt nun sofort aus Satz 4. Denn man findet leicht:

*) Oeuvres 1, p. 506.

$$c_{2\varkappa+1} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rx^2} x^{2\varkappa}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-rx^2} x^{2\varkappa}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-ru} u^{\varkappa - \frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{\Gamma\left(\varkappa + \frac{1}{2}\right)}{r^{\varkappa + \frac{1}{2}}} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\varkappa - 3)(2\varkappa - 1)}{(2r)^{\varkappa}} \sqrt{\frac{\pi}{r}}$$

$$< \frac{\varkappa!}{r^{\varkappa}} \sqrt{\frac{\pi}{r}},$$

also ist die Bedingung (37) erfüllt. Der Kettenbruch (40) und auch (41) konvergiert also für jeden nicht reellen Wert von z gegen das Integral (39).

Anmerkung. Die Entwicklung des Integrals (39) und sogar eines allgemeineren Integrals läßt sich auch auf einen einfacheren Fall zurückführen. Ist nämlich

$$\psi(x) = -\psi(-x),$$

so kann man statt des Integrals (2) ein Integral betrachten, welches nur von 0 bis ∞ erstreckt ist. Denn jetzt wird:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{d\psi(x)}{z+x} + \int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} = 2z\int_0^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z^2 - x^2} = -2z\int_0^{\infty} \frac{d\psi(\sqrt{x})}{x + (-z^2)};$$

sei nun der mit diesem Integral korrespondierende Kettenbruch:

$$\frac{-2z|}{|-b_1 z^2} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|-b_3 z^2} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots,$$

dann ist offenbar der mit ihm äquivalente Kettenbruch:

$$\frac{-\frac{2}{b_1}\Big|}{\Big| z} - \frac{\frac{1}{b_1 b_2}\Big|}{\Big| z} - \frac{\frac{1}{b_2 b_3}\Big|}{\Big| z} - \frac{\frac{1}{b_3 b_4}\Big|}{\Big| z} - \cdots$$

assoziiert mit dem Integral (2). Auch die Bedingung (37) geht jetzt in die Bedingung (15) über, denn es ist:

$$\int_0^{\infty} x^{\varkappa}\,d\psi(\sqrt{x}) = \int_0^{\infty} x^{2\varkappa}\,d\psi(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2\varkappa}\,d\psi(x).$$

Speziell im obigen Beispiel wird:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-rx^2}\,dx}{z+x} = -z\int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-rx}\,dx}{x + (-z^2)} = -z\sqrt{r}\int_0^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x}\,dx}{x + (-rz^2)}$$

und unser Resultat folgt nun sofort aus einer von Stieltjes stammenden Entwicklung (vgl. z. B. Perron, Lehrbuch, S. 392, Formel (21)), wenn man darin α durch $\frac{1}{2}$ und z durch $-rz^2$ ersetzt.

Sur la convergence et sur la sommation par les moyennes de Cesàro de $\lim_{z=\infty} \int_a^z f(x) \cos xy\, dx$.

Par

Michel Plancherel à Fribourg (Suisse).

§ 1.
Introduction.

L'objet principal de cette Note est la démonstration du théorème suivant:

Si $f(x)$ est une fonction réelle, définie dans l'intervalle (a, ∞), $a > 1$, si de plus $\int_a^\infty f(x)^2 \log^2 x\, dx$ est finie, la limite

$$\lim_{z=\infty} \int_a^z f(x) \cos xy\, dx$$

converge presque partout dans l'intervalle $-\infty < y < +\infty$ et représente dans cet intervalle une fonction $F(y)$ de carré intégrable, c'est à dire telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)^2 dy$$

existe.

Dans une note précédente sur le même sujet*), j'avais énoncé ce théorème comme vraisemblable. Or, récemment, M. G. H. Hardy**) a dé-

*) M. Plancherel, Zur Konvergenztheorie der Integrale $\lim_{z=\infty} \int_a^z f(x) \cos xy\, dx$ [Math. Ann. 74 (1913), p. 573—578, p. 578]. A la page 578, lignes 10 et 11, il faut lire $\log^2 x$ au lieu de $\log x$.

**) G. H. Hardy, On the summability of Fourier's series [Proc. Lond. Math. Soc. (2) 12 (1913), p. 365—372].

montré un théorème analogue pour les séries de Fourier, et il a eu l'amabilité d'attirer mon attention sur l'emploi de sa méthode dans le cas des intégrales de Fourier

$$\lim_{s=\infty}\int_a^s f(x)\cos xy\,dx.$$

J'utiliserai ici la méthode de M. Hardy; pour cela, il sera nécessaire d'étendre aux intégrales de Fourier le procédé de sommation de Cesàro et de démontrer pour elles les analogues des théorèmes de Fejér et de Lebesgue relatifs aux séries de Fourier. Cette extension, esquissée dans un travail antérieur*), présente un intérêt propre; je la développe dans le § 3.

Les raisonnements qui suivent sont basés sur quelques résultats de la théorie générale des représentations intégrales que je me permets de résumer dans les lignes suivantes.

Soit $f(x)$ une fonction réelle, définie dans l'intervalle $(0, \infty)$ et de carré intégrable (au sens de Lebesgue) dans cet intervalle, c'est à dire telle que $\int_0^\infty f(x)^2 dx$ ait une valeur finie. L'expression

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty d\xi\left(\int_0^x f(\xi)\cos t\xi\,dt\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(\xi)\frac{\sin x\xi}{\xi}\,d\xi$$

existe presque partout dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; elle définit une fonction paire $F(x)$ de carré intégrable dans cet intervalle. En particulier, si la limite

$$\lim_{t=\infty}\int_0^t f(\xi)\cos x\xi\,d\xi$$

existe presque partout, on a presque partout

(1) $$F(x) = \lim_{t=\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t f(\xi)\cos x\xi\,d\xi.$$

Nous nommerons $F(x)$ *la transformée de Fourier de* $f(x)$. Réciproquement, la transformée de Fourier de $F(x)$ n'est autre que $f(x)$. Si $g(x)$ est une seconde fonction de carré intégrable dans $(0, \infty)$ et si $G(x)$ désigne sa transformée de Fourier, on a la relation très importante

(2) $$\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx = \int_0^\infty F(x)\,G(x)\,dx.$$

*) M. Plancherel, Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies [Rend. Circ. Mat. Palermo 30 (1910), p. 289—335, p. 332—335].

Le lecteur pourra trouver la démonstration de ces résultats dans mon mémoire des Rend. di Palermo cité plus haut.

§ 2.

L'ordre de grandeur de $\int\limits_0^z f(x)\cos xy\,dx$.

Cet ordre de grandeur est donné par le théorème:

Si $f(x)$ est une fonction de carré intégrable dans l'intervalle $(0, \infty)$ *on a presque partout*

$$\lim_{z=\infty}\frac{1}{\log z}\int\limits_0^z f(x)\cos xy\,dx = 0.$$

Dans la notation de M. Landau*), ce théorème énoncerait que

$$\int\limits_0^z f(x)\cos xy\,dx = o(\log z) \qquad (z\to\infty).$$

Désignons par $F(x)$ la transformée de Fourier de $f(x)$ et par $G(x)$ la transformée de Fourier de la fonction

$$g(x) = \begin{cases}\cos xy, & 0 \leqq x \leqq z,\\ 0, & z < x < \infty.\end{cases}$$

Nous pouvons calculer $G(x)$ par la formule (1); nous obtenons

$$G(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^z \cos\xi y\cos\xi x\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin z(x+y)}{x+y}+\frac{\sin z(x-y)}{x-y}\right].$$

Si, donc, nous appliquons à $f(x)$ et $g(x)$ la relation (2), nous aurons en tenant compte de la parité de $F(x)$

$$\int\limits_0^z f(x)\cos xy\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F(x)\left[\frac{\sin z(x+y)}{x+y}+\frac{\sin z(x-y)}{x-y}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\frac{\sin z(x-y)}{x-y}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(y+\xi)\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi.$$

---

*) Rappelons que $f(x) = o(\varphi(x))$ $(x\to a)$ signifie que $\lim\limits_{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ et que $f(x) = O(\varphi(x))$ $(x\to a)$ signifie que $\lim\limits_{x=a}\sup\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right|$ est finie.

δ désignant un nombre positif arbitraire, nous décomposons la dernière intégrale en trois parties

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{+\delta} + \int_{+\delta}^{+\infty}.$$

La première et la troisième partie sont uniformément bornées en x, y. En effet, on obtient, par exemple, pour la première partie, en utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\Big(\int_{-\infty}^{-\delta} F(y+\xi)\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi\Big)^2 \leqq \Big(\int_{-\infty}^{-\delta}\Big|\frac{F(y+\xi)}{\xi}\Big|\,d\xi\Big)^2$$

$$\leqq \int_{-\infty}^{-\delta} F(y+\xi)^2 d\xi \cdot \int_{-\infty}^{-\delta}\frac{d\xi}{\xi^2} < \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)^2\,du.$$

Par conséquent,

$$\int_0^z f(x)\cos xy\,dx = O(1) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\delta}^{+\delta} F(y+\xi)\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Comme $O(1) = o\,(\log z)$, lorsque $z \to \infty$, la démonstration du théorème est ramenée à celle de

$$\int_{-\delta}^{+\delta} F(y+\xi)\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi = o\;(\log z) \qquad (z\to\infty),$$

presque partout. Cette dernière a été donnée par M. Hardy dans son mémoire cité plus haut. Pour être complet, nous nous permettons de la reproduire. Elle repose essentiellement sur le fait, démontré par Lebesgue*), que presque partout dans l'intervalle $-\infty < y < +\infty$

$$(3) \qquad \Phi(\xi) = \int_0^{\xi} |\varphi(\xi)|\,d\xi = o(\xi) \qquad (\xi\to 0)$$

lorsque $\varphi(\xi)$ est définie par

$$\varphi(\xi) = F(y+\xi) + F(y-\xi) - 2F(y).$$

Si nous remarquons que

$$F(y)\int_0^{+\delta}\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi = O(1)$$

*) Cf. H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques (Paris, Gauthier-Villars, 1906), p. 15; Ch. J. de la Vallée-Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, 2e édition (Paris, Gauthier-Villars, 1912), t. 2, p. 115, 116.

nous aurons encore

$$\int_{-\delta}^{+\delta} F(y+\xi)\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi = \int_0^{\delta}[F(y+\xi)+F(y-\xi)]\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi$$

$$= O(1) + \int_0^{\delta}[F(y+\xi)+F(y-\xi)-2F(y)]\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi$$

$$= O(1) + \int_0^{\delta}\varphi(\xi)\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Or, par décomposition de l'intégrale et par estimations très simples combinées avec une intégration par parties, nous obtenons successivement, en tenant compte de (3), presque partout

$$\int_0^{\delta}\varphi(\xi)\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi = \int_0^{\frac{1}{z}} + \int_{\frac{1}{z}}^{\delta} = O\Big(z\int_0^{\frac{1}{z}}|\varphi(\xi)|\,d\xi + \int_{\frac{1}{z}}^{\delta}\frac{|\varphi(\xi)|}{\xi}\,d\xi\Big)$$

$$= O\Big(zo\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big) + O\Big[\frac{\Phi(\delta)}{\delta} - z\Phi\Big(\frac{1}{z}\Big) + \int_{\frac{1}{z}}^{\delta}\frac{\Phi(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\Big]$$

$$= o(1) + O\Big[\frac{\Phi(\delta)}{\delta} - z\Phi\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big] + O\int_{\frac{1}{z}}^{\delta}\frac{o(\xi)}{\xi^2}\,d\xi$$

$$= O(1) + o(\log z) = o(\log z).$$

Par conséquent, presque partout,

$$\int_{-\delta}^{+\delta} F(y+\xi)\frac{\sin z\xi}{\xi}\,d\xi = o(\log z) \qquad (z\to\infty).$$

Remarquons que le théorème de Lebesgue et par conséquent la dernière partie de la démonstration exigent seulement que $F(y+\xi)$ soit intégrable dans $-\delta \leqq \xi \leqq +\delta$.

§ 3.

La sommation de Cesàro de $\int_0^{\infty} f(x)\cos xy\,dx$.

L'extension aux intégrales du procédé de sommation de Cesàro est immédiate. Nous dirons que l'intégrale $\int_0^{\infty} f(x)\cos xy\,dx$ (convergente ou

non) est sommable par les moyennes de Cesàro d'ordre δ, ou plus simplement est sommable ($C\delta$) lorsque

$$\lim_{z=\infty}\int_0^z\left(1-\frac{x}{z}\right)^\delta f(x)\cos xy\,dx$$

existe et est finie. Cette limite représente la valeur ($C\delta$) de l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\cos xy\,dx$. En particulier donc, l'intégrale précédente est sommable ($C0$) si

$$\lim_{z=\infty}\int_0^z f(x)\cos xy\,dx$$

converge.

Il est clair que si $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx$ est sommable ($C0$), elle est sommable ($C1$) et a même valeur. En effet

$$\int_0^z\left(1-\frac{x}{z}\right)\varphi(x)\,dx=\int_0^z\varphi(x)\,dx-\frac{1}{z}\int_0^z x\varphi(x)\,dx;$$

il suffit donc de montrer que l'existence de la limite pour $z=\infty$ du premier terme du second membre a pour conséquence

$$\lim_{z=\infty}\frac{1}{z}\int_0^z x\varphi(x)\,dx=0.$$

Or, on a

$$\frac{1}{z}\int_0^z x\varphi(x)\,dx=\frac{1}{z}\int_0^{\sqrt{z}}+\frac{1}{z}\int_{\sqrt{z}}^z.$$

Mais, d'après le second théorème de la moyenne

$$\left|\int_0^{\sqrt{z}} x\varphi(x)\,dx\right|\leqq\sqrt{z}\left|\int_\xi^{\sqrt{z}}\varphi(x)\,dx\right| \qquad 0\leqq\xi\leqq\sqrt{z},$$

$$\left|\int_{\sqrt{z}}^z x\varphi(x)\,dx\right|\leqq\sqrt{z}\left|\int_{\sqrt{z}}^{\xi'}\varphi(x)\,dx\right|+z\left|\int_{\xi'}^z\varphi(x)\,dx\right| \qquad \sqrt{z}\leqq\xi'\leqq z.$$

Donc

$$\left|\frac{1}{z}\int_0^z x\varphi(x)\,dx\right|\leqq\frac{1}{\sqrt{z}}\left(\left|\int_\xi^{\sqrt{z}}\right|+\left|\int_{\sqrt{z}}^{\xi'}\right|\right)\varphi(x)\,dx+\left|\int_{\xi'}^z\varphi(x)\,dx\right|.$$

Les deux premières intégrales du second membre sont bornées, quel que soit z; quant à la troisième elle tend vers zéro avec $\frac{1}{z}$ puisque ξ' tend vers ∞ avec z. On a donc bien

$$\lim_{z=\infty}\frac{1}{z}\int\limits_0^z x\varphi(x)\,dx = 0$$

lorsque $\lim\limits_{z=\infty}\int\limits_0^z \varphi(x)\,dx$ existe et est finie.

On peut établir pour les intégrales de Fourier un théorème analogue au théorème de Lebesgue sur la sommation $(C1)$ des séries de Fourier. Il s'énonce:

Soit $f(x)$ une fonction de carré intégrable dans l'intervalle $(0, \infty)$ et $F(x)$ sa transformée de Fourier.

L'intégrale

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F(x)\cos xy\,dx$$

converge $(C1)$ vers $f(y)$ en tout point où

$$|f(y+\xi) + f(y-\xi) - 2f(y)|$$

est pour $\xi = 0$ la dérivée de son intégrale indéfinie.

En particulier donc, elle converge $(C1)$ vers $f(y)$ en tout point où $f(y)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie et en tout point de continuité de $f(y)$. Sa convergence $(C1)$ est uniforme dans tout intervalle fini de continuité de $f(y)$.

Considérons en effet l'expression

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^z\left(1-\frac{x}{z}\right)F(x)\cos xy\,dx$$

et introduisons la fonction

$$G(x) = \begin{cases}\left(1-\frac{x}{z}\right)\cos xy, & 0 \leqq x \leqq z,\\ 0, & z < x < \infty\end{cases}$$

dont la transformée de Fourier $g(x)$ est, d'après (1)

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^z\left(1-\frac{\xi}{z}\right)\cos\xi x\cos\xi y\,d\xi$$

$$= \frac{1}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin^2 z\frac{x+y}{2}}{(x+y)^2} + \frac{\sin^2 z\frac{x-y}{2}}{(x-y)^2}\right].$$

La formule (2) appliquée à ces fonctions nous donne

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z\left(1-\frac{x}{z}\right)F(x)\cos xy\,dx=\frac{2}{z\pi}\int_0^\infty f(x)\left[\frac{\sin^2 z\frac{x+y}{2}}{(x+y)^2}+\frac{\sin^2 z\frac{x-y}{2}}{(x-y)^2}\right]dx.$$

Si nous convenons de définir $f(x)$ pour x négatif par la condition

$$f(-x)=f(x)$$

nous pouvons mettre le second membre de la relation précédente sous la forme

$$\frac{2}{z\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{\sin^2 z\frac{x-y}{2}}{(x-y)^2}\,dx=\frac{2}{z\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y+\xi)\frac{\sin^2\frac{z\xi}{2}}{\xi^2}\,d\xi$$

$$=\frac{2}{z\pi}\left[\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{+\infty}\right].$$

Une estimation analogue à celle que nous avons faite au § 2 pour des intégrales étendues aux mêmes intervalles $(-\infty,-\delta)$ et $(\delta,+\infty)$ nous montre que $\int_{-\infty}^{-\delta}$ et $\int_{\delta}^{+\infty}$ sont uniformément bornées en y, z. Par suite de la présence du facteur $\frac{1}{z\pi}$ les termes correspondants tendent uniformément vers zéro, lorsque $z\to\infty$. Tout revient donc à l'étude de la limite pour $z=\infty$ de

$$\frac{2}{z\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}f(y+\xi)\frac{\sin^2\frac{z\xi}{2}}{\xi^2}\,d\xi=\frac{2}{z\pi}\int_0^{\delta}[f(y+\xi)+f(y-\xi)]\frac{\sin^2\frac{z\xi}{2}}{\xi^2}\,d\xi.$$

Or, c'est à l'étude de cette même limite que l'on est conduit en étudiant la sommation $(C1)$ des séries de Fourier. Cette étude, abordée pour la première fois par Fejér, a été poursuivie par Lebesgue.*) Lebesgue a montré que non seulement cette limite est égale à $f(y)$ en tout point de continuité de $f(y)$ et qu'elle est uniforme dans tout intervalle fini de continuité de $f(y)$, mais encore qu'elle est égale à $f(y)$ en tout point où

$$\lim_{\xi=0}\frac{1}{\xi}\int_0^{\xi}|f(y+\xi)+f(y-\xi)-2f(y)|\,d\xi=0,$$

*) H. Lebesgue, Recherches sur la convergence des séries de Fourier [Math. Ann. 64 (1905), p. 251—280, p. 274]; Sur les intégrales singulières [Annales de Toulouse (3) 1 (1909), p. 25—117, p. 88—90]. Cf. encore Ch. J. de la Vallée-Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, 2e édition (Paris, Gauthier-Villars, 1912), t. 2, p. 163.

par conséquent en tout point où f est la dérivée de son intégrale indéfinie, c'est à dire presque partout. Comme nous avons établi que l'on a, uniformément dans $-\infty < y < +\infty$

$$\lim_{z=\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z\left(1-\frac{x}{z}\right)F(x)\cos xy\,dx = \lim_{z=\infty}\frac{2}{z\pi}\int_0^\delta[f(y+\xi)+f(y-\xi)]\frac{\sin^2\frac{z\xi}{2}}{\xi^2}\,d\xi,$$

il en découle que les résultats de Lebesgue s'étendent sans autre aux intégrales de Fourier; le théorème énoncé se trouve donc complètement démontré.

$F(x)$ étant la transformée de Fourier de $f(x)$, $f(x)$ est inversement la transformée de Fourier de $F(x)$. Par conséquent, d'après le théorème précédent, presque partout

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{t=\infty}\int_0^t\left(1-\frac{\xi}{t}\right)f(\xi)\cos\xi x\,d\xi.$$

Substituant cette valeur de $F(x)$ dans

$$f(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{z=\infty}\int_0^z\left(1-\frac{x}{z}\right)F(x)\cos xy\,dx$$

nous obtenons presque partout

$$f(y) = \frac{2}{\pi}\lim_{z=\infty}\int_0^z dx\cdot\lim_{t=\infty}\int_0^t f(\xi)\left(1-\frac{\xi}{t}\right)\left(1-\frac{x}{z}\right)\cos x\xi\cos xy\,d\xi.$$

Cette relation a lieu en particulier en tous les points de continuité de $f(y)$. Elle montre que la formule intégrale de Fourier

$$f(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(\xi)\cos x\xi\cdot\cos xy\,d\xi$$

a un sens, pour toute fonction de carré intégrable dans $(0,\infty)$ lorsqu'on somme les intégrales qui y figurent par les premières moyennes de Cesàro.

Il est clair que dans toutes ces considérations nous pourrions remplacer $\cos xy$ par $\sin xy$ et obtenir des résultats analogues. On déduirait encore, par exemple, que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx\int_0^\infty f(\xi)\cos x(\xi-y)\,d\xi$$

converge presque partout vers $f(y)$ (en particulier en tout point de continuité de f) lorsqu'on somme $(C1)$ les intégrales simples qui y figurent.

On étendrait de même sans nouvelle difficulté essentielle la théorie de la convergence $(C\delta)$ $(0<\delta<1)$ des séries de Fourier aux intégrales de Fourier étudiées dans ce travail. Les résultats seraient analogues.

§ 4.

La sommation (C0) de $\int_0^\infty f(x)\cos xy\,dx$.

Le théorème démontré au § 3 nous permet d'exprimer une condition nécessaire et suffisante pour la convergence $(C0)$ de l'intégrale de Fourier. On a, en effet,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z f(x)\cos xy\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z \left(1-\frac{x}{z}\right) f(x)\cos xy\,dx$$
$$+\frac{1}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^z x f(x)\cos xy\,dx.$$

La première intégrale du second membre converge presque partout vers $F(y)$, F désignant la transformée de Fourier de f. D'autre part, lorsqu'une intégrale converge $(C0)$, nous avons démontré qu'elle converge $(C1)$ vers la même limite. Nous pouvons donc conclure:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos xy\,dx,$$

dans laquelle $f(x)$ est de carré intégrable dans $(0, \infty)$, converge $(C0)$ presque partout vers la transformée de Fourier de $f(x)$, est que l'on ait presque partout

$$\lim_{z=\infty}\frac{1}{z}\int_0^z x f(x)\cos xy\,dx = 0$$

c'est à dire

$$\int_0^z x f(x)\cos xy\,dx = o(z) \qquad (z\to\infty).$$

Par suite, pour démontrer le théorème qui fait l'objet principal de cette note, à savoir que $\int_a^\infty f(x)\cos xy\,dx$ converge $(C0)$ presque partout, si $\int_a^\infty f(x)^2\log^2 x\,dx$ a une valeur finie, il nous suffira de montrer que sous cette hypothèse

$$\int\limits_a^z x f(x)\cos xy\,dx = o(z) \qquad (z\to\infty).$$

Désignons, à cet effet, par $g(x)$ la fonction

$$g(x)=\begin{cases}0, & 0\leqq x<a,\ a>1\\ f(x)\log x, & a\leqq x<\infty.\end{cases}$$

$g(x)$ est, par hypothèse, de carré intégrable dans $(0, \infty)$. Par suite, d'après le § 2, presque partout

$$\int\limits_0^z g(x)\cos xy\,dx = o(\log z) \qquad (z\to\infty).$$

En procédant d'une manière analogue à M. Hardy, nous obtenons presque partout,

$$\int\limits_a^z x f(x)\cos xy\,dx = \int\limits_a^z \frac{x}{\log x} g(x)\cos xy\,dx$$

$$= \frac{z}{\log z}\int\limits_a^z g(t)\cos ty\,dt - \int\limits_a^z dx\,\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\log x}\right)\int\limits_a^x g(t)\cos ty\,dt$$

$$= \frac{z}{\log z}\,o(\log z) + \int\limits_a^z O\left(\frac{1}{\log x}\right) o(\log x)\,dx$$

$$= o(z) + \int\limits_a^z o(1)\,dz = o(z).$$

L'hypothèse: $\int\limits_0^\infty f(x)^2\log^2 x\,dx$ finie, a donc comme conséquence

$$\int\limits_0^z x f(x)\cos xy\,dx = o(z) \qquad (z\to\infty)$$

presque partout. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(x)\cos xy\,dx$ converge donc $(C0)$ presque partout vers la transformée de Fourier de f, c'est à dire vers une fonction de carré intégrable dans $(-\infty, +\infty)$.

Le théorème est encore vrai si l'on remplace dans l'intégrale de Fourier $\cos xy$ par $\sin xy$. Il contient comme cas particuliers les résultats de ma première note.*)

---

* loc. cit. *), p. 315.

On peut se demander si l'on peut pour d'autres représentations intégrales que celles de Fourier obtenir des théorèmes de convergence de même nature. La réponse est affirmative. En transposant aux représentations intégrales la méthode de Hobson relative à la convergence des séries de fonctions orthogonales*), je démontrerai ailleurs que

$$\lim_{s=\infty} \int_a^s f(x)\, \varphi(x, y)\, dx$$

converge presque partout dans $0 < y < \infty$ sous la seule hypothèse:

$$\int_a^\infty f(x)^2 \log^3 x \, dx$$

finie, lorsque $\varphi(x, y)$ est une fonction permettant comme $\cos xy$ la représentation intégrale d'une fonction arbitraire, $\varphi(x, y)$ étant assujetie à quelques conditions particulières que je ne précise pas ici.

*) Cf. ma Note: Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales [Comptes Rendus 157 (2e semestre 1913), p. 539—542].

Über die Konvergenz des Picardschen Verfahrens der sukzessiven Approximation bei gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von

E. TREFFTZ in Aachen.

Picard hat gezeigt, daß man eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

mit der Anfangsbedingung $y = b$ für $x = a$ in folgender Weise durch sukzessive Approximation integrieren kann. Bildet man

$$y_{n+1} = b + \int_a^x f(x, y_n)\, dx,$$

wo die erste Näherung y_0 willkürlich gewählt werden kann, so konvergieren in genügender Nähe des Punktes $x = a$, $y = b$ die Funktionen y_n mit wachsendem n gegen eine Grenzfunktion, die die Differentialgleichung befriedigt. Voraussetzung der Konvergenz und der Eindeutigkeit des Verfahrens ist dabei, daß $f(x, y)$ in der Umgebung des Anfangspunktes endlich bleibt und der Lipschitzschen Bedingung:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N |y_1 - y_2|$$

genügt, wo N eine hinreichend groß zu wählende Konstante bedeutet.

Was die Konvergenz des Verfahrens angeht, so sind die ursprünglich von Picard gegebenen unteren Grenzen für das Intervall von x, in dem das Verfahren konvergiert, von Lindelöf und anderen erweitert worden.*) Eine Ergänzung zu diesen Betrachtungen liefert der folgende Satz, den ich hier beweisen will:

Man führe als unabhängige Variable in der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

*) Man vergleiche den Artikel von Painlevé, Enc. d. math. Wissensch. II A 4a, S. 198—200.

die Bogenlänge s der Integralkurve ein, indem man die Gleichung in der Form:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{ds} = g(x, y), \quad \frac{dy}{ds} = h(x, y), \qquad (g^2 + h^2 = 1)$$

schreibt. Setzt man dann von den reellen Funktionen $g(x, y)$ und $h(x, y)$ voraus, daß längs jeder Kurve in der xy-Ebene die Integrale

$$\text{(IIa)} \qquad \int g(x, y) \cdot ds \quad \textit{und} \quad \int h(x, y) \cdot ds$$

existieren,

so konvergiert das Picardsche Verfahren solange als die Lipschitzschen Differenzenquotienten:

$$\text{(IIb)} \qquad \left| \frac{g(x_1 y_1) - g(x_2 y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right| \quad \textit{und} \quad \left| \frac{h(x_1 y_1) - h(x_2 y_2)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \right|$$

für eine beliebig kleine, aber endliche Umgebung der Integralkurve endlich bleiben (Lipschitzsche Bedingung). Der Satz gilt unverändert auch für Systeme von Differentialgleichungen.

Hierzu ist zu bemerken, daß die Bedingungen (IIb):

$$|g(x_1 y_1) - g(x_2 y_2)| < N \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$|h(x_1 y_1) - h(x_2 y_2)| < N \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

etwas mehr verlangen als die Lipschitzsche Bedingung, wie sie oben formuliert war; während oben die Veränderlichkeit der für die Integralkurve vorgeschriebenen Richtung bloß für variables y bei konstantem x eingeschränkt wurde, beschränken wir sie jetzt für variables y *und* x. Wesentlich ist aber, daß wir diese Bedingung nicht mehr für ein von vornherein gegebenes endliches Gebiet zu stellen brauchen, sondern bloß noch für die unmittelbare Umgebung der Integralkurve.

Die Bedingung (IIa) ist notwendig, um die Existenz der Näherungskurven zu sichern, sie bedeutet keine wesentliche Einschränkung.*)

Um den genannten Satz gleich in der allgemeinsten Form zu beweisen, schreibe ich das System von p Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= f(x, y, z, u, \cdots, w), \\ \frac{dy}{ds} &= g(x, y, z, u, \cdots, w), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dw}{ds} &= h(x, y, z, u, \cdots, w) \end{aligned}$$

*) Ist nämlich für einen Punkt der Integralkurve die Bedingung (IIa) nicht erfüllt, so ist jedenfalls auch die Lipschitzsche Bedingung (IIb) nicht erfüllt; für Punkte außerhalb der Integralkurve können wir aber nötigenfalls $g(x, y)$ und $h(x, y)$ durch geeignete stetige Funktionen ersetzen, ohne dadurch an der Integralkurve etwas zu ändern.

in vektorieller Form,

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \bar{v}(\bar{t}),$$

indem ich unter $\bar{t}$ im p-dimensionalen Raum den Radiusvektor vom Anfangspunkte des Koordinatensystems zu dem Punkte mit den Koordinaten $x, y, z, u, \cdots, w$ verstehe. $\bar{v}(\bar{t})$ ist dann ein Einheitsvektor, der in jedem Punkte des Raumes die Richtung angibt, die dort für die Integralkurve vorgeschrieben ist.

Die Lipschitzsche Bedingung lautet in vektorieller Form:

$$|\bar{v}(\bar{t}_1) - \bar{v}(\bar{t}_2)| < N|\bar{t}_1 - \bar{t}_2|.$$

Die Konstante N, deren Endlichkeit nach unserer Behauptung eine hinreichende Konvergenzbedingung ist, wollen wir als Lipschitzsche Konstante bezeichnen.

Die Anfangsbedingungen nehmen wir in der Form $\bar{t} = 0$ für $s = 0$ an, was keine Einschränkung der Allgemeinheit ist.

Wir werden nun den Konvergenzbeweis in der Weise führen, daß wir zunächst in bekannter Weise für ein genügend kleines Gebiet in der Umgebung des Anfangspunktes die absolute Konvergenz des Verfahrens beweisen. Dann beweisen wir weiter: Konvergiert das Verfahren absolut für einen Wert $s = s_0$, so konvergiert es auch noch für alle Werte s zwischen s_0 und $s_0 + \delta$, wo δ bloß von dem Werte der Lipschitzschen Konstanten in der Umgebung des Punktes s_0 abhängt. Damit ist der behauptete Satz bewiesen. Denn es läßt sich, solange die Lipschitzsche Bedingung erfüllt ist, eine untere von Null verschiedene Grenze für δ angeben; die absolute Konvergenz kann also in keinem Punkte aufhören, wo nicht die Lipschitzsche Bedingung verletzt ist.

Wir beweisen also zunächst die Konvergenz für die Umgebung des Nullpunktes. Es ist

$$\bar{t}_1 = \int_0^s \bar{v}(\bar{t}_0)\,ds,$$

$$\bar{t}_{n+1} = \int_0^s \bar{v}(\bar{t}_n)\,ds,$$

also

$$\bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n = \int_0^s (\bar{v}(\bar{t}_n) - \bar{v}(\bar{t}_{n-1}))\,ds.$$

Ersetzen wir rechts den Integranden durch seinen maximalen Absolutwert, so erhalten wir unter Benutzung der Lipschitzschen Bedingung:

$$|\bar{v}(\bar{t}_n) - \bar{v}(\bar{t}_{n-1})| \leqq N \cdot |\bar{t}_n - \bar{t}_{n-1}|,$$

$$\text{Max}\,|\bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n| \leqq s \cdot N \cdot \text{Max}\,|\bar{t}_n - \bar{t}_{n-1}|.$$

Wählen wir das Intervall nun so klein, daß $s \cdot N$ ein echter Bruch ϑ wird, so folgt:

$$\operatorname{Max}|\bar{t}_{n+1}-\bar{t}_n| \leqq \vartheta \operatorname{Max}|\bar{t}_n-\bar{t}_{n-1}| \leqq \vartheta^2 \operatorname{Max}|\bar{t}_{n-1}-\bar{t}_{n-2}| \leqq \cdots$$
$$\leqq \vartheta^n \operatorname{Max}|\bar{t}_1-\bar{t}_0|,$$

woraus die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\bar{t}=\bar{t}_0+(\bar{t}_1-\bar{t}_0)+(\bar{t}_2-\bar{t}_1)+\cdots$$

in bekannter Weise folgt, und zwar für jedes Intervall, das ganz im Innern des Intervalles $0 \leqq s < \frac{1}{N}$ liegt.

Nun wollen wir die Konvergenz in einem erweiterten Gebiet beweisen. Sei $S(s=s_0)$ ein Punkt der Integralkurve im Innern des ermittelten Konvergenzgebietes, für den also die absolute Konvergenz des Verfahrens feststeht. Ist dann in der Umgebung des Punktes S die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, so gibt es eine Zahl P und ein zugehöriges σ derart, daß innerhalb der Kugel, die wir mit dem Radius σ um S schlagen, für je zwei Punkte $\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2$:

$$|\bar{v}(\bar{t}_2)-\bar{v}(\bar{t}_1)| < P|\bar{t}_2-\bar{t}_1|$$

ist.

Schlagen wir ferner um den Punkt S eine Kugel mit dem beliebig kleinen Radius $\varepsilon < \sigma$, so müssen von einem gewissen n, sagen wir $n=h$, ab die Punkte $s=s_0$ für alle Näherungskurven $\bar{t}_n$ $(n \geqq h)$ im Innern dieser Kugel liegen.

Bilden wir nun die sukzessiven Approximationen

$$\bar{t}_{n+1}=\int_0^s \bar{v}(\bar{t}_n)\,ds=\int_0^{s_0} \bar{v}(\bar{t}_n)\,ds+\int_{s_0}^s \bar{v}(\bar{t}_n)\,ds,$$

indem wir uns auf das Intervall von s_0 bis $s_0+\delta$ beschränken, so können die Endpunkte aller Kurven $\bar{t}_n$ für $n \geqq h$ offenbar nicht außerhalb der Kugel liegen, die wir mit dem Radius $\varepsilon+\delta$ um s_0 schlagen, denn die Punkte $s=s_0$ liegen für $n \geqq h$ in der Kugel mit dem Radius ε und von diesen können die Punkte $s=s_0+\delta$ höchstens den Abstand δ haben, da die Bogenlänge zwischen zwei Kurvenpunkten stets größer sein muß als ihr Abstand. Nehmen wir also $\delta < \sigma-\varepsilon$, so müssen für $n \geqq h$ alle Näherungskurven zwischen $s=s_0$ und $s=s_0+\delta$ innerhalb der Kugel mit dem Radius σ um den Punkt S liegen. Es gilt deshalb:

$$|\bar{v}(\bar{t}_n)-\bar{v}(\bar{t}_{n-1})| < P|\bar{t}_n-\bar{t}_{n-1}|$$

und wir erhalten:

$$\bar{t}_{n+1}-\bar{t}_n=\int_0^{s_0}\{\bar{v}(\bar{t}_n)-\bar{v}(\bar{t}_{n-1})\}\,ds+\int_{s_0}^{s}\{\bar{v}(\bar{t}_n)-\bar{v}(\bar{t}_{n-1})\}\,ds,$$
$$\operatorname{Max}|\bar{t}_{n+1}-\bar{t}_n| \leqq f_n(s_0)+P\cdot\delta\cdot\operatorname{Max}|\bar{t}_n-\bar{t}_{n-1}|.$$

$$f_n(s_0) = \left| \int_0^s \{\bar v(\bar t_n) - \bar v(\bar t_{n-1})\}\, ds \right| = |\bar t_{n+1}(s_0) - \bar t_n(s_0)|$$

ist dabei der Absolutbetrag der Differenz der n^{ten} und $n+1^{\text{ten}}$ Näherungskurve bei $s = s_0$. Es ist oben gezeigt worden, daß die Reihe

$$\sum f_n = \sum |\bar t_{n+1} - \bar t_n|$$

absolut konvergiert.

Wählen wir jetzt δ so klein, daß $\vartheta = P \cdot \delta$ ein echter Bruch wird, so folgt aus der obenstehenden Formel:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Max} |\bar t_{h+1} - \bar t_h| &= \operatorname{Max} |\bar t_{h+1} - \bar t_h|,\\
\operatorname{Max} |\bar t_{h+2} - \bar t_{h+1}| &\leqq \vartheta \operatorname{Max} |\bar t_{h+1} - \bar t_h| + f_{h+1},\\
\operatorname{Max} |\bar t_{h+3} - \bar t_{h+2}| &\leqq \vartheta^2 \operatorname{Max} |\bar t_{h+1} - \bar t_h| + \vartheta f_{h+1} + f_{h+2},\\
&\vdots\\
\operatorname{Max} |\bar t_{h+m+1} - \bar t_{h+m}| &\leqq \vartheta^m \operatorname{Max} |\bar t_{h+1} - \bar t_h| + \vartheta^{m-1} f_{h+1}\\
&\quad + \vartheta^{m-2} f_{h+2} + \cdots + \vartheta f_{h+m-1} + f_{h+m}.
\end{aligned}$$

Summieren wir hier von h bis $h+m$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_h^{h+m} |\bar t_{n+1} - \bar t_n| \leqq \sum_0^m \vartheta^\nu \operatorname{Max} |\bar t_{h+1} - \bar t_h| + f_{h+1} \sum_0^{m-1} \vartheta^\nu + f_{h+2} \sum_0^{m-2} \vartheta^\nu + \cdots\\
+ f_{h+m-1} \sum_0^1 \vartheta^\nu + f_{h+m}.
\end{aligned}$$

Hier vergrößern wir die rechte Seite, indem wir die über ϑ^ν zu nehmenden Summen von 0 bis ∞ nehmen; es ist also

$$\sum_h^{h+m} |\bar t_{n+1} - \bar t_n| \leqq \frac{1}{1-\vartheta} \operatorname{Max} |\bar t_{h+1} - \bar t_h| + \frac{1}{1-\vartheta} \sum_{h+1}^{h+m} f_n.$$

Da nun $\sum f_n$ absolut konvergent ist, so folgt, daß auch $\sum(\bar t_n - \bar t_{n-1})$ im Intervall von $s = s_0$ bis $s = s_0 + \delta$ absolut und gleichmäßig konvergent ist.

Das ist nun genau, was wir beweisen wollten. In der Tat, solange unsere Voraussetzung über die Lipschitzsche Bedingung erfüllt ist, läßt sich für P eine endliche obere Grenze und für das zugehörige σ eine von Null verschiedene untere Grenze angeben. Daraus folgt dann für δ der von Null verschiedene Minimalwert

$$\delta_0 = \frac{\sigma_{\min}}{P_{\max}}.$$

Es kann also keinen Punkt geben, wo die absolute Konvergenz aufhört, es sei denn, daß die Lipschitzsche Bedingung verletzt ist, was zu beweisen war.

Daß die so gewonnene Funktion auch wirklich der Differentialgleichung genügt, folgt genau wie bei Picard aus der gleichmäßigen Konvergenz des Verfahrens.

Zum Schlusse möchte ich folgendes bemerken: Unser Beweisverfahren ist offenbar nicht daran gebunden, daß man als unabhängige Variable gerade die Bogenlänge der Integralkurve einführt. Man kann den Beweis mit einer geringfügigen Modifikation auf den Fall übertragen, daß irgendeine Funktion der Bogenlänge $g(s)$ als Parameter gewählt wird, vorausgesetzt, daß $\frac{dg}{ds}$ nirgends Null werden kann. Daß diese Bedingung wirklich notwendig ist, erkennt man, wenn man z. B. x als unabhängige Variable nimmt. In diesem Falle kann man die Konvergenz nicht mehr beweisen, und zwar aus folgendem Grunde. Es kann z. B. bei einer Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ vorkommen, daß irgendeine der Näherungskurven durch einen Punkt hindurchgeht, in dem $f(x, y)$ so stark unendlich wird, daß das Integral $\int f(x,y)\,dx$ nicht mehr konvergiert; dann ist es aber offenbar überhaupt nicht mehr möglich, die nächste Näherung oberhalb dieses Wertes von x zu bilden*). Praktisch**) hilft man sich in diesem Falle damit, daß man x als Parameter beibehält, solange die Neigung der Näherungskurven gegen die x-Achse nicht zu steil wird. Dann dreht man das Koordinatensystem und nimmt das neue x als Parameter, bis auch hier die Näherungskurven zu steil gegen die x-Achse werden. So fährt man fort. Das ist nun offenbar gerade eine Einführung eines Parameters x in der Weise, daß $\frac{dx}{ds}$ nirgends Null wird. Damit ist also auch die Konvergenz des üblichen graphischen Verfahrens in jedem wünschenswerten Umfange bewiesen.

---

*) Diesen Umstand benutzt Painlevé, um ein Beispiel zu konstruieren, für das das Konvergenzintervall des Picardschen Verfahrens kleiner ist, als das Konvergenzintervall der Taylorentwicklung. Siehe Bull. Soc. Math. 27 (1899), S. 152.

**) Vgl. C. Runge, Über graphische Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung, Jahresber. D. Math.-Ver. 16 (1907).

Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die dazugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen.

Von

Emil Hilb in Würzburg*).

Die folgenden Untersuchungen schließen sich an das erste Kapitel der gleichnamigen Arbeit von Weyl**) an. Es sei in der Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{d^2u}{ds^2}+(\lambda^2+q(s))u=L(u)+\lambda^2 u=0$$

$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$, $\lambda_2 \neq 0$ und $q(s)$ für $s\geqq 0$ eine reelle stetige Funktion. $\eta(s)$ und $\vartheta(s)$ seien zwei partikuläre Integrale von (1), welche so gewählt sind, daß

$$(2)\qquad \eta(0)=0,\quad \left(\frac{d\eta(s)}{ds}\right)_{s=0}=1,\quad \vartheta(0)=1,\quad \left(\frac{d\vartheta(s)}{ds}\right)_{s=0}=0$$

ist. Als Greensche Funktion $G_a(s,t)$, welche für $s=0$ verschwindet, für $s=a$ einer reellen Randbedingung

$$(3)\qquad \left[\cos j\, G_a(s,t)+\sin j\frac{d}{ds}G_a(s,t)\right]_{s=a}=0$$

genügt, erhält man den Ausdruck

$$(4)\qquad \left.\begin{aligned} G_a(s,t)&=\eta(s)\,\beta_{l_a}(t),\ \text{wenn } s\leqq t\\ &=\eta(t)\,\beta_{l_a}(s),\ \text{wenn } s\geqq t\end{aligned}\right\}0\leqq {s \atop t}\leqq a,$$

wobei

$$(5)\qquad \beta_{l_a}(s)=\vartheta(s)+l_a\eta(s),\quad l_a=l_{a_1}+il_{a_2}$$

ist und $\beta_{l_a}(s)$ die Randbedingung (3) erfüllt. Weyl***) deutet l_a als einen Punkt der komplexen Zahlenebene l_1+il_2; durchläuft dann j in (3) die Werte von 0 bis π, so durchläuft l_a einen Kreis vom Radius

$$(6)\qquad r_a=\frac{1}{4\lambda_1\lambda_2\int\limits_0^a|\eta|^2ds}.$$

---

*) Herr O. Haupt in Karlsruhe unterstützte mich bei der rechnerischen Durchführung der asymptotischen Darstellungen.

) Math. Ann. 68, S. 220f. *) l. c. S. 225.

Dieser Kreis enthält alle anderen zu einem größeren Intervalle gehörigen Kreise in seinem Innern. Wächst a in das Unendliche, so nähern sich die Kreise einem *Grenzkreise* oder *Grenzpunkt*. Im Grenzkreisfalle sind alle Integrale von (1) im Intervalle $0\,\infty$ absolut quadratisch integrierbar, so daß man die gewöhnliche Theorie der Integralgleichungen anwenden kann. Speziell ergibt sich die Tatsache, daß man, wenn man für einen einzigen komplexen Wert von λ^2 auf den Grenzkreisfall kommt, dieses für jedes komplexe λ^2 geschieht.*)

Im Grenzpunktfall existiert dagegen nur eine einzige Lösung

$$\beta_L(s) = \vartheta(s) + L\eta(s), \tag{7}$$

welche im Intervalle $0\,\infty$ absolut quadratisch integrierbar ist. Die entsprechend (4) vermittelst $\beta_L(s)$ gebildete Greensche Funktion $G(s, t)$ führt auf eine *singuläre* Integralgleichung, deren ziemlich komplizierte Theorie Weyl heranzieht. *Wir wollen zeigen, wie einfach man ohne diese Theorie die gewünschten Entwicklungen direkt aus dem Cauchyschen Residuensatz***) *erhält.*

§ 1.

Hilfsformeln.

Es sei $f(s)$ eine reelle Funktion, die im Intervalle $0\,\infty$ zweimal stetig differenzierbar ist und für $s = 0$ verschwindet. Ist ferner für eine feste komplexe Zahl $\mu = \mu_1 + i\mu_2$

$$L(f) + \mu^2 f = -g(s), \tag{8}$$

so seien $|f(s)|$ und $|g(s)|$ im Intervall $0\,\infty$ quadratisch integrierbar. Dann ist

$$f(s) = \int_0^\infty G(\mu^2; s, t)\, g(t)\, dt, \tag{9}$$

wobei $G(\mu^2; s, t)$ die zum Intervalle $0\,\infty$ gehörige oben definierte Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u) + \mu^2 u = 0$ ist.

Um (9) zu beweisen, wählen wir $G_a(\mu^2; s, t)$ so, daß entsprechend (3)

$$\left[f(s)\frac{dG_a(\mu^2; s, t)}{ds} - \frac{df(s)}{ds}G_a(\mu^2; s, t)\right]_{s=a} = 0$$

ist. Dann wird

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^a G_a(\mu^2; s, t)\, g(t)\, dt \\ &= \int_0^a G(\mu^2; s, t)\, g(t)\, dt + (l_a - L)\int_0^a \eta(s)\,\eta(t)\, g(t)\, dt. \end{aligned} \tag{10}$$

---

*) l. c. S. 238.

**) Vgl. auch Hellinger, Neue Begründung der Theorie der quadratischen Formen, J. f. Math. 136, § 9.

Da L innerhalb des Kreises vom Radius r_a liegt, so ist

$$(11)\qquad |l_a - L| < \frac{1}{2\mu_1\mu_2\int\limits_0^a |\eta|^2 dt};$$

$\int\limits_0^a |\eta|^2 dt$ wird aber mit wachsendem a in dem vorliegenden Grenzpunktfalle unendlich, es folgt daher aus der Schwarzschen Ungleichung, daß der zweite Summand in (10) mit wachsendem a nach 0 konvergiert, so daß (10) in die zu beweisende Gleichung (9) übergeht. Analog zeigt man, daß

$$(12)\qquad G(\lambda^2; s, t) = G(\mu^2; s, t) + (\lambda^2 - \mu^2)\int\limits_0^\infty G(\lambda^2; s, \tau)\, G(\mu^2; t, \tau)\, d\tau$$

und

$$(13)\qquad \frac{f(s)}{\lambda^2 - \mu^2} = \int\limits_0^\infty \frac{G(\lambda^2; s, t)}{\lambda^2 - \mu^2} g(t)\, dt - \int\limits_0^\infty G(\lambda^2; s, t) f(t)\, dt$$

ist. Aus (12) ergibt sich vermittelst der *Neumannschen Reihe*, daß $G(\lambda^2; s, t)$, speziell auch L, für alle Werte λ^2 mit von 0 verschiedenem positiven imaginären Teile eine analytische Funktion von λ^2 ist, so daß wir den Cauchyschen Satz anwenden können.

§ 2.

Asymptotische Darstellungen.*)

Wir denken uns in $\int\limits_0^\infty G(\lambda^2; s, t) g(t)\, dt$ die reelle Größe s fest und a um eine endliche feste Zahl größer als $2s$. Dann gestattet die von Weyl herrührende geometrische Interpretation des Grenzpunktfalles eine bequeme asymptotische Darstellung dieses Ausdruckes für große Werte von $|\lambda|^2$.

Es ist nämlich für jeden Punkt des zum Intervalle $0a$ gehörigen Kreises analog zu (11)

$$(14)\qquad |l_a - L| < \frac{1}{2\lambda_1\lambda_2\int\limits_0^a |\eta|^2 dt},$$

ferner ist

$$(15)\qquad \eta = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda s + \frac{1}{\lambda^2} R(s) e^{\lambda_2 s},$$

wenn $\lambda_2 > 0$ und $|R(s)|$ unterhalb einer endlichen, von λ unabhängigen Grenze liegt; für eine solche Größe wollen wir im folgenden generell M

*) Will man das Entwicklungstheorem nur für 4 mal stetig differenzierbare Funktionen, so kann man die asymptotischen Darstellungen fast vollständig umgehen.

einführen, so daß M in den folgenden Ungleichungen als Symbol für verschiedene Größen dient. Um

$$(16)\qquad \left|\int_0^\infty G(\lambda^2; s, t)\, g(t)\, dt\right| = \left|\beta_L(s)\int_0^s \eta(t) g(t) dt + \eta(s)\int_s^\infty \beta_L(t) g(t)\, dt\right|$$

abzuschätzen, führen wir zunächst $\beta(s, \lambda, a)$ als Lösung von (1) ein, welche die Form (5) hat und in a verschwindet, so daß also

$$\beta(s, \lambda, a)_{s=a} = 0, \quad \left(\frac{d\beta(s, \lambda, a)}{ds}\right)_{s=a} = \frac{-1}{\eta(a)}$$

und

$$\beta(s, \lambda, a) = -\frac{e^{i\lambda(a-s)} - e^{-i\lambda(a-s)} + \frac{1}{\lambda} R_2(s)\, e^{\lambda_2(a-s)}}{e^{i\lambda a} - e^{-i\lambda a} + \frac{1}{\lambda} R_3(a)\, e^{\lambda_2 a}}$$

ist.

Ist also $0 < \lambda_2 \leqq 1$, so ist

$$|\beta(s, \lambda, a)| < \frac{M}{\lambda_2},$$

ist $1 \leqq \lambda_2$, so ist

$$|\beta(s, \lambda, a)| < M e^{-\lambda_2 s}.$$

Ferner ist, wenn wir statt $\beta_L(s)$ vorübergehend $\beta_L(s, \lambda)$ schreiben,

$$|\beta(s, \lambda, a) - \beta_L(s, \lambda)| = |l_a - L|\, |\eta(s)|$$
$$= \left|\frac{\eta(s)\lambda^2}{2\lambda_1\lambda_2\left\{\frac{\sin 2i\lambda_2 a}{4i\lambda_2} - \frac{\sin 2\lambda_1 a}{4\lambda_1} + \frac{R(a)}{\lambda} e^{\lambda_2 a}\right\}}\right|,$$

also

$$|l_a - L|\,|\eta(s)| < \frac{M|\lambda|}{\lambda_1\lambda_2}, \text{ wenn } \lambda_2 < 1,$$
$$< \frac{M|\lambda|\, e^{-\lambda_2(2a-s)}}{\lambda_1}, \text{ wenn } \lambda_2 > 1 \text{ ist.}$$

Es sei nun $\int_0^\infty |g(t)|^2 dt \leqq 1$, dann wird

$$\left|\int_0^s \eta(t) g(t)\, dt\right| < \sqrt{\int_0^s |\eta(t)|^2 dt} < \frac{M}{|\lambda|}, \text{ wenn } \lambda_2 < 1,$$
$$< \frac{M}{|\lambda|}\frac{e^{\lambda_2 s}}{\sqrt{\lambda_2}}, \text{ wenn } \lambda_2 > 1.$$

Es folgt also

$$(17)\qquad \left|\beta_L(s)\int_0^s \eta(t) g(t)\, dt\right| < \frac{M}{\lambda_1\lambda_2}, \text{ wenn } \lambda_2 < 1 \text{ ist,}$$
$$< \frac{M}{\lambda_1\sqrt{\lambda_2}}, \text{ wenn } \lambda_2 > 1 \text{ ist.}$$

Um den zweiten Summanden in (16) abzuschätzen, benutzen wir die Ungleichung*)

$$\text{(18)}\qquad \int_s^\infty |\beta_L(t,\lambda)|^2\,dt \leqq \frac{1}{8\lambda_1^2\lambda_2^2\int\limits_0^s|\eta|^2\,dt},$$

also ist

$$\text{(19)}\qquad \left|\eta(s)\int_s^\infty \beta_L(t,\lambda)\,g(t)\,dt\right| < \frac{|\eta(s)|}{\sqrt{8}\,\lambda_1\lambda_2\sqrt{\int\limits_0^s|\eta|^2\,dt}} < \frac{M}{\lambda_1\lambda_2},\ \text{wenn } \lambda_2<1,$$

$$< \frac{M}{\lambda_1\sqrt{\lambda_2}},\ \text{wenn } \lambda_2>1.$$

Es ist also schließlich

$$\text{(20)}\qquad \left|\int_0^\infty G(\lambda^2;s,t)\,g(t)\,dt\right| < \frac{M}{\lambda_1\lambda_2},\ \text{wenn } \lambda_2<1,$$

$$< \frac{M}{\lambda_1\sqrt{\lambda_2}},\ \text{wenn } \lambda_2>1.$$

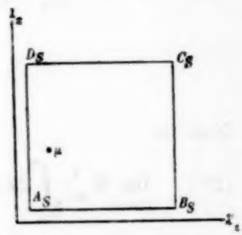
Dabei ist M eine endliche, von λ unabhängige Größe, die im Laufe der Abschätzung als Symbol für ganz verschiedene Größen dieses Charakters geschrieben wurde.

§ 3.

Der Cauchysche Residuensatz.

Wir betrachten in der komplexen λ-Ebene ein Quadrat Q_S von der Seitenlänge S, dessen Seiten zu den Achsen $\lambda_1\,\lambda_2$ parallel sind, speziell sei für die Ecke A_S

$$\text{(21)}\qquad \lambda_1=\lambda_2=e^{-S^{\frac{1}{4}}}.$$



Es ist

$$\text{(22)}\qquad \int_0^\infty G(\mu^2;s,t)\,g(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{Q_S}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\int_0^\infty G(\lambda^2;s,t)\,g(t)\,dt.$$

Wächst S, so konvergiert der Beitrag, den die Seiten B_SC_S und C_SD_S zu dem Integrale der rechten Seite von (22) liefern, nach 0, so daß also, *wenn wir den Weg* $D_SA_SB_S$ *mit* W_S *bezeichnen,*

*) l. c. S. 228 vor Gleichung (30).

$$(23)\qquad \int_0^\infty G(\mu^2; s, t) g(t)\,dt = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{W_S} \frac{d\lambda}{\lambda-\mu}\int_0^\infty G(\lambda^2; s, t) g(t)\,dt$$

wird. Analog ist

$$(24)\qquad 0 = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{W_S} \frac{d\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^\infty G(\lambda^2; s, t) g(t)\,dt,$$

also folgt durch Addition von (23) und (24) unter Benutzung von (9) und (13)

$$(25)\qquad f(s) = \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{W_S} \frac{2\lambda\,d\lambda}{\lambda^2-\mu^2}\int_0^\infty G(\lambda^2; s, t) g(t)\,dt$$

$$= \lim_{S=\infty} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{W_S} \frac{2\lambda\,d\lambda\, f(s)}{\lambda^2-\mu^2} + \int_{W_S} 2\lambda\,d\lambda \int_0^\infty G(\lambda^2; s, t) f(t)\,dt\right].$$

$f(s)$ ist reell, es kommt also in (25) nur der rein imaginäre Teil der Integrale in Betracht. Da nun, wenn $\Re h(z)$ den reellen Teil einer Funktion $h(z)$ bedeutet,

$$(26)\qquad \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{2\pi i}\int_{W_S} \frac{2\lambda\,d\lambda\, f(s)}{\lambda^2-\mu^2} = \frac{1}{2} f(s),$$

so folgt

$$(27)\qquad f(s) = \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i}\int_{W_S} 2\lambda\,d\lambda \int_0^\infty G(\lambda^2; s, t) f(t)\,dt$$

$$= \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i}\int_{W_S} 2\lambda\,d\lambda \left[\int_0^s \big(\eta(t)\,\vartheta(s) - \vartheta(t)\,\eta(s)\big) f(t)\,dt\right.$$

$$\left. + \eta(s)\int_0^\infty \big(\vartheta(t) + L\eta(t)\big) f(t)\,dt\right].$$

Nun ist

$$(28)\qquad \lim_{S=\infty} \Re \frac{1}{\pi i}\int_{W_S} 2\lambda\,d\lambda \left[\int_0^s \big(\eta(t)\,\vartheta(s) - \vartheta(t)\,\eta(s)\big) f(t)\,dt\right] = 0.$$

Um dieses zu zeigen, ist noch der imaginäre Teil u_2 der Funktion

$$u_1 + i u_2 = \eta(t)\,\vartheta(s) - \vartheta(t)\,\eta(s)$$

abzuschätzen. Es ist

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + (q(s) + \lambda_1^2 - \lambda_2^2)\, u_2 + 2\lambda_1 \lambda_2 u_1 = 0$$

und $(u_2(t))_{t=s} = 0$, $\left(\frac{d u_2(t)}{dt}\right)_{t=s} = 0$, also, wenn v und w zwei partikuläre Integrale der Differentialgleichung $\frac{d^2 u}{dt^2} + (q(s) + \lambda_1^2 - \lambda_2^2) u = 0$,

$$u_2 = \frac{1}{w(t)\frac{d}{dt}v(t) - v(t)\frac{d}{dt}w(t)} 2\lambda_1\lambda_2 \int_s^t \big(w(t)\,v(\sigma) - w(\sigma)\,v(t)\big)\, u_1(\sigma)\, d\sigma,$$

wobei nach (21) $\lambda_1\lambda_2 < S e^{-S^{\frac{3}{4}}}$. Da nun die Funktionen v, w, u_1 von dem Charakter e^{S^s} sind, so folgt durch eine leichte Rechnung (28). Also ist schließlich*)

$$(29) \qquad f(s) = \lim_{S=\infty} \Re \frac{2}{\pi i} \int_{W_S} \lambda\, \eta(s) \int_0^\infty \big(\vartheta(t) + L\eta(t)\big) f(t)\, dt\, d\lambda.$$

*) Den Polen von L entsprechen gewöhnliche Eigenfunktionen, die man, sofern dieses zweckmäßig erscheint, in bekannter Weise isolieren kann.

Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen.

Von

ERICH STIEMKE in Berlin.

Eine reelle Größe a nenne ich *positiv*, wenn $a > 0$ ist, *nicht negativ*, wenn $a \geqq 0$ ist. Mehrere Größen nenne ich *nicht negativ*, wenn keine negativ ist, *positiv*, wenn außerdem mindestens eine positiv ist, *durchweg positiv*, wenn jede positiv ist. Dann ist

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

positiv, wenn $a_0, a_1, \cdots a_n$ positiv, $b_0, b_1, \cdots b_n$ durchweg positiv sind. Umgekehrt gelten die beiden folgenden Sätze, auf die ich durch Untersuchungen über unendliche Moduln geführt worden bin:

I. *Wenn in keiner linearen Verbindung von gegebenen homogenen linearen Gleichungen die Koeffizienten positiv sind, so haben die Gleichungen eine durchweg positive Lösung.*

II. *Wenn in keiner linearen Verbindung von gegebenen homogenen linearen Gleichungen die Koeffizienten durchweg positiv sind, so haben die Gleichungen eine positive Lösung.*

Wenn die Gleichungen keine Lösung haben, so läßt sich jede lineare Funktion von $x_0, x_1, \cdots x_n$ aus ihren linken Seiten zusammensetzen, also auch eine mit (durchweg) positiven Koeffizienten.

Wenn die Gleichungen nur eine Lösung haben, $b_0, b_1, \cdots b_n$, so sei etwa $b_0 > 0$. Dann lassen sich aus ihnen die Gleichungen

$$b_0 x_1 - b_1 x_0 = 0, \quad \cdots \quad b_0 x_n - b_n x_0 = 0$$

zusammensetzen. Wäre $b_1 \leqq 0$, so hätte die erste Gleichung positive Koeffizienten. Daher ist $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, $\cdots$ $b_n > 0$.

Für den Fall von zwei Unbekannten ist damit der Satz I bereits bewiesen. Angenommen er sei auch schon für n Unbekannte als richtig erkannt. Ist nun diese Anzahl $n + 1$, so unterscheide ich zwei Fälle:

1) Aus dem System P der $m + 1$ gegebenen Gleichungen folge eine Gleichung der Form

$$u_0 = x_0 - a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n = 0,$$

worin $a_1, \cdots a_n$ positiv sind. Dann ersetze man eine der Gleichungen durch $u_0 = 0$ und setze den Wert $x_0 = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ in die übrigen Gleichungen ein. Dadurch gehen sie über in ein System Q von m Gleichungen $u_1 = 0, \cdots u_m = 0$ zwischen den n Unbekannten $x_1, \cdots x_n$. Die $m+1$ Gleichungen $u_0 = 0, u_1 = 0, \cdots u_m = 0$ sind den $m+1$ gegebenen Gleichungen P völlig äquivalent.

In keiner linearen Verbindung der m Gleichungen des Systems Q sind die Koeffizienten positiv. Nach dem Induktionsschluß haben daher die Gleichungen Q eine durchweg positive Lösung $x_1 = b_1, \cdots x_n = b_n$. Aus $u_0 = 0$ folgt weiter

$$x_0 = b_0 = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n > 0.$$

Daher haben auch die $m+1$ Gleichungen P eine durchweg positive Lösung.

2) Keine lineare Verbindung der Gleichungen P habe die Form $u_0 = 0$.

Wir können den Beweis auf den Fall beschränken, wo die Gleichungen P mehrere Lösungen haben, dann besitzen sie auch eine solche, worin $x_0 = 0$ ist. Setzt man nun $x_0 = 0$, so erhält man aus P ein System R von $m+1$ Gleichungen zwischen n Unbekannten $x_1, \cdots x_n$.

Keine lineare Verbindung $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ der Gleichungen R hat positive Koeffizienten. Denn in der analogen Verbindung

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

der Gleichungen P sind $a_1, \cdots a_n$ positiv. Daher kann nach der Voraussetzung über P nicht $a_0 \geqq 0$ sein. Es kann aber auch nicht $a_0 < 0$ sein, weil sonst diese Gleichung die Form $a_0 u_0 = 0$ hätte.

Nach dem Induktionsschluß haben daher die Gleichungen R eine durchweg positive Lösung $x_1 = c_1, \cdots x_n = c_n$. In Verbindung mit $x_0 = c_0 = 0$ ergibt sich daraus eine Lösung der Gleichungen P.

Es kann aber nicht in jeder Lösung dieser Gleichungen $x_0 = 0$ sein. Denn sonst wäre $x_0 = 0$ eine lineare Verbindung der Gleichungen P mit positiven Koeffizienten. Daher haben die Gleichungen P eine Lösung $d_0, d_1, \cdots d_n$, worin $d_0 > 0$ ist. Folglich haben sie auch die Lösung

$$b_0 = c_0 + \varepsilon d_0, \; b_1 = c_1 + \varepsilon d_1, \cdots b_n = c_n + \varepsilon d_n.$$

Ist ε positiv und hinlänglich klein, so ist jeder dieser $n+1$ Werte positiv.

Aus dem Satze I folgt unmittelbar der Satz II. Die gegebenen Gleichungen seien

$$(1) \qquad a_{\alpha 0} x_0 + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots).$$

Ein vollständiges System ihrer Lösungen sei

$$(2) \qquad b_{\beta 0}, \; b_{\beta 1}, \; \cdots \; b_{\beta n} \qquad (\beta = 0, 1, 2, \cdots).$$

Dann bilden umgekehrt die Größen

(3) $$a_{\alpha 0},\ a_{\alpha 1},\ \cdots\ a_{\alpha n}$$

ein *vollständiges* System von Lösungen der Gleichungen

(4) $$b_{\beta 0}x_0 + b_{\beta 1}x_1 + \cdots + b_{\beta n}x_n = 0.$$

Angenommen keine lineare Verbindung der Gleichungen (1) habe durchweg positive Koeffizienten. Dann wird in Satz II behauptet, daß sie eine positive Lösung haben. Im andern Falle hätte nämlich keine lineare Verbindung der Gleichungen (4) positive Koeffizienten. Daher wäre nach Satz I eine lineare Verbindung der Größen (3) durchweg positiv, d. h. eine lineare Verbindung der Gleichungen (1) hätte durchweg positive Koeffizienten.

Man kann die bewiesenen Sätze noch etwas schärfer formulieren. Ist die Gleichung $x_0 = 0$ eine Folge der Gleichungen (1), so will ich x_0 eine *singuläre* Unbekannte nennen, im andern Falle eine *reguläre*. Sind die Unbekannten sämtlich singulär, so pflegt man zu sagen, die Gleichungen besitzen keine Lösung.

III. *Wenn in keiner linearen Verbindung von gegebenen homogenen linearen Gleichungen die regulären Unbekannten positive Koeffizienten haben, so besitzen die Gleichungen eine Lösung, worin die Werte dieser Unbekannten durchweg positiv sind.*

IV. *Wenn in keiner linearen Verbindung von gegebenen homogenen linearen Gleichungen die regulären Unbekannten durchweg positive Koeffizienten haben, so besitzen die Gleichungen eine Lösung, worin die Werte dieser Unbekannten positiv sind.*

Einige Sätze über ebene, ein- und mehrteilige Elementarkurven vierter Ordnung.

Von

C. Juel in Kopenhagen.

Die nachstehenden Sätze enthalten diejenigen Eigenschaften der Elementarkurven vierter Ordnung, welche für das Verständnis der folgenden Arbeit: „Über die auf einer Elementarfläche dritter Ordnung liegenden Gerade" nötig sind. Für die einleitenden teilweise ganz einfachen Sätze in § 1 habe ich die Beweise ganz unterdrückt. Ich verweise in dieser Beziehung auf die ausführliche Darstellung in einer Arbeit: „Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung", welche neuerlich in den Abhandlungen der königlich-dänischen Akademie der Wissenschaften erschienen ist*). Daselbst handelt es sich indessen nur um einteilige Kurven, so daß die hier über mehrteilige Kurven vierter Ordnung gegebenen Sätze neu sind. Für diese Sätze habe ich die Beweise ausführlicher mitgenommen.

§ 1.
Einleitende Sätze.

Die in dieser Arbeit betrachteten Kurven sind ebene Elementarkurven. Eine Elementarkurve ist eine aus einer endlichen Zahl von Konvexbögen zusammengesetzte Kurve, die aber auch ins Unendliche gehen kann. Sie soll außerdem überall, mit Ausnahme einer endlichen Zahl von Punkten, eine bestimmte mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente haben. Wenn nicht anders ausdrücklich gesagt wird, nehmen wir doch die Kurve ohne die genannten Ausnahmepunkte „Winkelpunkte" an. Die Kurve soll endlich — wenn nicht anders ausdrücklich gesagt wird — kein Geradenstück enthalten.

---

*) D. Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Skrifter, 7. Række. Naturv. og mathem. Afdeling XI, 2 (April 1914).

Ein innerer Punkt eines Konvexbogens ist ein gewöhnlicher Kurvenpunkt. Nicht gewöhnliche oder singuläre Punkte können nur da auftreten, wo zwei Konvexbogen zusammenstoßen. Man sieht, daß es auf einer Elementarkurve neben gewöhnlichen Punkten nur drei Arten von singulären Punkten geben kann, die man, mit den gebräuchlichen Namen, als Inflexionspunkte, Dornspitzen und Schnabelspitzen bezeichnet.

Es können zwei Elementarbogen auch so zusammenstoßen, daß ein Winkelpunkt entsteht. Man erhält so, wie leicht ersichtlich, drei Arten von Winkelpunkten, die wir hinreichend deutlich als Dorne, Schnäbel und Hüte bezeichnen können.

Einen Winkelpunkt kann man in ersichtlicher Weise durch einen kleinen Konnexbogen *σ abrunden*. Durch die Abrundung, die beliebig klein gemacht werden kann, treten in der unmittelbaren Nähe des Winkelpunktes 2, 1 oder 0 Inflexionspunkte auf, je nachdem der Winkelpunkt ein Dorn, ein Schnabel oder ein Hut ist. Eine Elementarkurve kann beliebig viele, auch unendlich viele Doppelpunkte haben. Ist O ein solcher Punkt (mit getrennten oder zusammenfallenden Tangenten), kann man auf einem der durch O gehenden Bogen anfangend einen Teil der Kurve durchlaufen, bis man wieder in O gelangt. Den durchgelaufenen Zweig nennen wir einen zu O gehörigen *Pseudozweig*; der übrige Teil ist der zum ersteren *komplementare* Pseudozweig. Sind die Tangenten in O getrennt und ist O ein gewöhnlicher Punkt auf den beiden durch O gehenden Bogen, so wird O entweder auf den beiden zu O gehörigen Pseudozweigen ein Schnabel, oder aber er wird auf dem einen Zweig ein Hut, auf dem anderen ein Dorn sein. Die Änderungen, welche eintreten, wenn O auf dem einen oder auf den beiden durch O gehenden Bogen ein Inflexionspunkt ist, sind ersichtlich.

Für gewisse Anzahlbestimmungen ist ein Satz erfolgreich, den ich den *elementaren Korrespondenzsatz* nenne. Er läßt sich kurz so formulieren: *Durchläuft ein Punkt M stetig und in einem bestimmten Sinne eine stetige, einteilige und rektifizierbare Kurve und durchläuft ein von M abhängiger Punkt N (einmal oder mehrmal) stetig dieselbe Kurve, im entgegengesetzten Sinne, und entspricht einem beliebigen Punkte der Kurve p oder q Punkte N resp. M, je nachdem er als ein Punkt M oder N aufgefaßt wird, dann fallen entsprechende Punkte $p + q$ mal miteinander zusammen.*

Dieser Satz ist in der Tat eine Folge des sehr bekannten Satzes, daß eine immer wachsende stetige Funktion jeden Zwischenwert einmal und nur einmal annimmt.

Für den Gebrauch des Satzes ist die Bemerkung von entscheidender Bedeutung, daß man nur an *einer* Stelle und dort auch nur mit *einem*

Paar von entsprechenden Punkten den Bewegungssinn zu betrachten nötig hat.

Eine Elementarkurve hat seiner Definition zufolge nur eine endliche Zahl von Punkten mit einer Geraden gemein. Die höchste Zahl von Schnittpunkten nennen wir die *Realitätsordnung*, oder einfacher, wenn wie hier kein Mißverständnis aufkommen kann, die *Ordnung* der Kurve. Analog definiert man die *Klasse* einer Kurve. Das Auftreten von zusammenfallenden Lösungen macht hier, wo nur die drei oben genannten Arten von singulären Punkten auftreten, keine Schwierigkeiten.

Zwei Elementarkurven können beliebig viele auch unendlich viele Punkte miteinander gemein haben. Man hat aber die folgenden bekannten von v. Staudt herrührenden Sätze:

Wenn zwei unpaare Elementarkurven einander in einer paaren Zahl von Punkten schneiden, dann müssen sie jedenfalls wenigstens noch einen Punkt miteinander gemein haben,

und

Wenn zwei Elementarkurven, von welchen wenigstens die eine paar ist, einander in einer unpaaren Zahl von Punkten schneiden, dann müssen sie jedenfalls wenigstens noch einen Punkt miteinander gemein haben.

Es ist in jedem einzelnen Fall nachzusehen, wie man zusammenfallende Punkte zu zählen hat.

Man hat noch den folgenden, ebenfalls von v. Staudt herrührenden Satz:

Die Zahl der Inflexionspunkte einer Elementarkurve ist paar oder unpaar, je nachdem die Kurve paar oder unpaar ist.

In diesem Satze wird eine Schnabelspitze als ein Inflexionspunkt gerechnet.

§ 2.

Sätze über Elementarkurven dritter und vierter Ordnung.

Die Elementarkurve dritter Ordnung kann wesentlich als bekannt vorausgesetzt werden*). Sie ist entweder einteilig oder zweiteilig; im letzten Falle ist der paare Zweig ein Oval und der unpaare Zweig hat drei Inflexionspunkte. Aus einem Punkte P eines unpaaren Zweiges gehen zwei außerhalb P berührende Gerade an denselben Zweig, und außerdem noch zwei an das Oval. Aus einem Punkte P des Ovales kann aber keine außerhalb P berührende Gerade gehen.

Hat die Kurve einen Doppelpunkt O, so muß sie einteilig sein. Von den zum Doppelpunkte gehörigen Pseudozweigen ist der eine ein Oval mit einem Winkelpunkt als Hut; der unpaare Pseudozweig hat einen nicht in O liegenden Inflexionspunkt. Aus einem Punkte P des unpaaren Pseudo-

*) a. a. O. S. 26—30.

zweiges gehen zwei außerhalb P berührende Gerade, von welchen die eine und nur die eine das Oval berührt.

Fallen die Tangenten in O zusammen, so entsteht in O eine Spitze. Die Kurve hat wieder einen und nur einen Inflexionspunkt, aber aus einem beliebigen Punkte P der Kurve geht nur eine außerhalb P berührende Tangente.

In den obigen Sätzen wird — mit leicht verständlicher Ausdrucksweise — ein Nachbarpunkt eines Inflexionspunktes als von diesem verschieden angenommen.

Indem wir jetzt zu den Kurven vierter Ordnung übergehen, werden wir erst beweisen:

1. *Eine einteilige Elementarkurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte und Spitzen hat wenigstens eine Doppeltangente.*

Es kann dieser Satz durchaus nicht als evident betrachtet werden. Wenn er aber bewiesen ist, dann gibt es Geraden welche die Kurve nicht schneiden, und man kann offenbar — jedenfalls nach Ausführung einer projektiven Transformation — die Kurve als ganz im Endlichen liegend annehmen, und die übrigen hier genannten Sätze über diese Kurve werden wesentlich evident.

Versuchen wir also anzunehmen, daß die Kurve keine Doppeltangenten hat. Es ist dann ersichtlich, daß jede Tangente der Kurve dieselbe in zwei getrennten außerhalb des Berührungspunktes fallenden Punkten P_1 und P_2 schneiden wird — es wird hierbei wieder ein Nachbarpunkt eines Inflexionspunktes als von diesem verschieden betrachtet.*)

Es sei nun M ein Punkt, der auf einem solchen von zwei Inflexionspunkten W_1 und W_2 begrenzten Bogen α liegt, der keinen weiteren Inflexionspunkt enthält; die Kurve muß Inflexionspunkte haben, sonst wäre sie zweiter Ordnung. Geht M stetig und in einem bestimmten Sinne auf α von W_1 nach W_2, so wird jeder der Punkte P sich stetig ändern und immer in demselben Sinn, weil α keinen Inflexionspunkt im Innern enthält. Man sieht aber, daß beide im entgegengesetzten Sinne von M laufen müssen: nähert M sich dem Punkt W_2, so wird nämlich einer der Punkte P, sagen wir P_2, sich W_2 im entgegengesetzten Sinne nähern; ebenso sieht man, daß M und P_1 im entgegengesetzten Sinne laufen. Man lasse nun M, in demselben Sinne wie vorher laufend, den Punkt W_2 überschreiten, um auf einen neuen singularitätsfreien Bogen $\alpha_2 = W_2 W_3$ einzutreten — wo W_3 entweder ein neuer Inflexionspunkt oder auch mit W_1 identisch ist. Bei dem Übergang ändert P_1 seinen Sinn, nicht aber P_2. Es laufen also

*) Analoge Voraussetzungen werden wir auch ohne es ausdrücklich zu sagen, in ähnlichen leicht erkennbaren Stellen im folgenden machen.

jetzt nicht P_1 und P_2 beide im entgegengesetzten Sinne von M. Dies enthält einen Widerspruch gegen das obige, denn α_1 und α_2 sind in der hier in Betracht kommenden Beziehung gleichwertig. Die Voraussetzung, daß die Kurve keine Doppeltangente hat, ist also unzulässig.

Wir können uns also stets, ohne der Allgemeinheit zu schaden, eine Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte als im Endlichen liegend denken. Die Berührungspunkte A und B mit einer Doppeltangente t zerlegen dann die Kurve in zwei Bogen α und β, welche beide auf derselben Seite von t liegen, und von welchen der eine — sagen wir α — innerhalb des durch β und das Geradenstück $\overline{AB}$ begrenzten Gebietes liegt; wir nennen α den zu t gehörigen *inneren Bogen.*

2. Es ist nun aus einer Figur ziemlich evident, *daß ein innerer Bogen immer zwei und nur zwei Inflexionspunkte enthält,* und

3. *daß sämtliche Inflexionspunkte einer Elementarkurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte und Spitzen sich in „Inflexionspaaren" auf inneren Bogen verteilen müssen.**)

Es ist wesentlich darauf aufmerksam zu machen, daß eine Wendetangente eines inneren Bogens AB nicht durch einen der Punkte A oder B gehen kann; eine solche Gerade müßte nämlich die aus β und $\overline{AB}$ gebildete Begrenzung in wenigstens noch einem Punkte schneiden und würde dann mehr denn vier Punkte mit $\alpha + \beta$ gemein haben.

Wir gehen nun zu den Kurven mit Doppelpunkten über und erkennen leicht, daß aus einem Doppelpunkte A einer einteiligen Kurve vierter Ordnung entweder zwei oder auch keine Tangenten gehen, welche außerhalb A berühren. Es folgt der Satz aus dem Korrespondenzsatze, indem man diejenigen zwei Punkte einander zuordnet, welche mit A in einer Geraden liegen. Man sieht aber sogleich, daß der Satz wie der Beweis auch dann gültig bleibt, wenn A kein Doppelpunkt ist, sondern ein außerhalb der Kurve liegender Punkt mit der Eigenschaft, daß jede durch M gehende Gerade die Kurve höchstens in zwei außerhalb A liegenden Punkten schneidet. Wir werden einen solchen Punkt einen *uneigentlichen Doppelpunkt* nennen (im Gegensatz zu einem gewöhnlichen oder „eigentlichen" Doppelpunkte). Hat die Kurve einen uneigentlichen Doppelpunkt, so wird sie deren natürlich unendlich viele haben, welche ein oder mehrere Gebiete füllen werden.

Man hat also:

4. *Aus einem Doppelpunkte O — gleichviel ob er eigentlich oder uneigentlich ist — gehen zwei oder keine Tangenten an eine einteilige Kurve vierter Ordnung.* Ob diese andere Doppelpunkte hat oder nicht, ist gleichgültig.

*) Ausführliche Beweise finden sich a. a. O. S. 30—33.

Es gilt der Satz auch, wenn O eine Spitze ist; wenn aber die Kurve noch weitere Spitzen $O_1 \cdots$ hat, dann bleibt der Satz nur richtig, wenn man die Verbindungsgeraden $O O_1 \cdots$ den aus O gehenden Tangenten hinzurechnet.

Eine Doppeltangente wird entweder einen Zweig zweimal oder auch zwei getrennte Zweige berühren. Man hat nun:

5. *Zwei Zweige einer Kurve vierter Ordnung ohne Spitzen, welche keinen Punkt miteinander gemein haben, werden vier Tangenten oder auch keine miteinander gemein haben.*

Es seien die zwei (selbstverständlich paaren) Zweige α und β gegeben. Gehen aus keinem Punkte von α Tangenten an β, dann haben α und β keine Tangenten miteinander gemein. Gehen aber aus *einem* Punkte von α Tangenten an β, dann muß dasselbe für jeden Punkt von α der Fall sein, weil α weder von β noch von einer Wendetangente von β geschnitten wird. Weil $\alpha + \beta$ vierter Ordnung ist, sind alle Punkte von α uneigentliche Doppelpunkte von β. Aus einem beliebigen Punkte M von α gehen also — wenn Doppeltangenten von $\alpha + \beta$ vorhanden sind — zwei Tangenten an β. Es schneide nun eine durch M gehende Tangente an β den Zweig α außer in M noch in einem Punkte N. Die Abhängigkeit $M - N$ ist $2-2$ deutig, und haben α und β eine Tangente miteinander gemein, welche in A und B berührt, dann sieht man, daß in der Nähe von A der Punkt M und einer der entsprechenden Punkte N im entgegengesetzten Sinne laufen. Die Bedingungen für den Gebrauch des elementaren Korrespondenzsatzes sind demnach erfüllt, und es müssen M und N viermal zusammenfallen, womit der Satz bewiesen ist.

Es ist ganz gleichgültig, ob α und β Doppelpunkte haben oder nicht.

Aus (1) folgt, daß eine einteilige Kurve vierter Ordnung ohne Doppeltangenten und Spitzen wenigstens einen Doppelpunkt haben muß. Man hat aber noch den weitergehenden Satz:

6. *Eine einteilige Kurve vierter Ordnung ohne Doppeltangenten und Spitzen muß wenigstens zwei Doppelpunkte haben*; die zwei Doppelpunkte können jedoch in einem Selbstberührungspunkte zusammenfallen.

Weil die Kurve wenigstens einen Doppelpunkt A hat, kann man sie in zwei von A ausgehende Pseudozweige α und β zerlegen. Wir nehmen nun eine Abrundung der hervortretenden Winkelpunkte vor, und nennen die zwei jetzt getrennten Zweige α^* und β^*.

Sind nun α^* und β^* beide unpaar, dann müssen sie, wenn die Tangenten in A getrennt sind, einander schneiden, d. h. $\alpha + \beta$ hat wenigstens einen von A verschiedenen Doppelpunkt. Sind sie aber beide paar, dann müssen sie entweder zweiter oder auch vierter Ordnung sein. Es kann aber höchstens der eine zweiter Ordnung sein, wenn nicht A auf

den beiden durch A gehenden Bogen ein Inflexionspunkt ist — ein Fall, den wir bis auf weiteres auslassen. Es kann nämlich höchstens der eine von den zwei auf α und β in A auftretenden Winkelpunkten ein Hut sein, so daß durch die Abrundung wenigstens ein neuer Inflexionspunkt auf $\alpha^* + \beta^*$ auftreten muß; der entsprechende Zweig kann also nicht zweiter Ordnung sein. Ist z. B. α^* vierter Ordnung, wird diese eine Doppeltangente haben müssen, wenn sie keinen Doppelpunkt hat. Diese könnte nach Aufhebung der Abrundung, wodurch $\alpha^* + \beta^*$ in $\alpha + \beta$ übergeht, wenn sie überhaupt verschwindet, nur in eine aus A an $\alpha + \beta$ gehende Tangente übergehen. Wenn sich keine solche Tangente findet, dann ist der Satz bewiesen. Rückständig ist nur der Fall, daß α^* und β^* beide paar sind, und daß aus A zwei Tangenten an $\alpha + \beta$ gehen. Dann hätten aber α^* und β^* wenigstens eine Tangente gemein, welche einer der aus A zu $\alpha + \beta$ gehenden Tangenten benachbart wäre. Es hätten aber dann α^* und β^* noch drei andere Tangenten miteinander gemein (§ 5), und von diesen könnte durch Aufhebung der Abrundung höchstens die eine verschwinden. Die Forderung, daß $\alpha + \beta$ keine Doppeltangenten haben muß, läßt sich also nur erfüllen, wenn $\alpha + \beta$ wenigstens zwei Doppelpunkte hat. Der ausgelassene Fall, nämlich daß A ein Inflexionspunkt auf den beiden durch A gehenden Bogen ist, sei durch die Bemerkung abgemacht, daß auftretende Doppelpunkte nicht durch eine beliebig kleine Verschiebung eines Inflexionspunktes beeinflußt werden können.

7a. *Sind A und B zwei eigentliche Doppelpunkte einer einteiligen Kurve vierter Ordnung, und gehen aus diesen Punkten nicht gleichviele Tangenten, welche außerhalb A und B berühren, dann hat die Kurve noch einen von A und B verschiedenen eigentlichen Doppelpunkt.*

Man verbinde nämlich einen beliebigen Punkt M der Kurve mit A und mit B durch Gerade, welche bzw. nochmals in N und N' schneiden mögen. Wenn nun z. B. aus A keine Tangenten gehen, dagegen zwei aus B, dann laufen entsprechende Punkte M und N in demselben, M und N' dagegen im entgegengesetzten Sinne. Weil demnach entsprechende Punkte M und N' im entgegengesetzten Sinne laufen, müssen sie zweimal zusammenfallen, womit angezeigt ist, daß außerhalb A und B ein — und nur ein — eigentlicher Doppelpunkt zu finden ist. Der Schluß gilt nicht, wenn die Doppelpunkte A und B nicht ausdrücklich als eigentliche vorausgesetzt werden, weil dann die Gerade AB die Kurve in zwei Punkten schneiden kann, in welche die zwei eben genannten entsprechenden Punkte N und N' zusammenfallen werden. Wenn aber die Gerade keinen Punkt außerhalb A und B mit der Kurve gemein hat, dann können N und N' nur in einem neuen Doppelpunkt zusammentreffen, d. h.:

7b. *Der Satz 7a bleibt auch noch gültig, wenn die Doppelpunkte A und B nicht als eigentliche vorausgesetzt werden, wenn noch die Bedingung hinzugefügt wird, daß die Gerade AB keinen Punkt außerhalb A und B mit der Kurve gemein hat.*

8. *Hat eine einteilige Kurve vierter Ordnung ω ohne Spitzen zwei und nur zwei eigentliche Doppelpunkte A und B mit getrennten Tangenten, dann gehen aus jedem von diesen Punkten zwei Tangenten an ω.*

Die zwei von A ausgehenden Pseudozweige seien φ und ψ; nachdem die in A auftretenden Winkelpunkte abgerundet sind, nennen wir sie φ^* und ψ^*. Sind nun φ und ψ beide unpaar, also dritter Ordnung, dann muß B ein Schnittpunkt von φ und ψ sein, und es gehen aus diesem Punkte, weil keine Spitzen vorhanden sind, zwei Tangenten an φ^*. Die eine und nur die eine von diesen kann mit BA zusammenfallen, wenn die Abrundung von φ aufgehoben wird. Also gehen infolge der §§ 4 und 7a zwei Tangenten aus A und ebenso zwei aus B an ω.

Sind aber φ^* und ψ^* beide paar, dann kann B nicht ein Schnittpunkt von φ^* und ψ^* sein, denn dies würde einen neuen Doppelpunkt von ω mit sich führen. B muß deshalb entweder auf φ oder auf ψ ein Doppelpunkt sein, es sei auf φ. Die zwei von B ausgehenden Pseudozweige von φ seien φ_1 und φ_2, und nach der Abrundung in B φ_1^* und φ_2^*. Von diesen wird der eine, sagen wir φ_2^*, nicht durch A gehen, und für diesen muß A ein uneigentlicher Doppelpunkt sein. Aus A gehen nun zwei Tangenten an φ_2^*, denn sonst würde jede durch A gehende Gerade zwei Punkte mit φ_2^* gemein haben, und dies ist jedenfalls für die φ_1 in A berührende Tangente unzulässig. Von den aus A an φ_2^* gehenden Tangenten kann nun höchstens die eine mit AB zusammenfallen, wenn die Abrundung von φ_2^* in B aufgehoben wird, so daß wenigstens eine Tangente aus A an φ_2 geht. Aber dann gehen infolge (4) und (7a) zwei Tangenten an ω aus A sowie auch aus B.

Eine mehrteilige Elementarkurve vierter Ordnung kann beliebig viele, auch unendlich viele Zweige haben. Wir machen jedoch die Voraussetzung, daß die Zahl der Zweige endlich ist. Jeder Zweig kann zweiter oder dritter oder vierter Ordnung sein.

Man hat nun den Satz:

9. *Hat eine einteilige oder mehrteilige Kurve ω vierter Ordnung ohne Spitzen zwei und nur zwei Doppelpunkte A und B (mit getrennten Tangenten), dann gehen aus A und aus B an ω entweder gleichviele Tangenten, welche außerhalb A und B berühren, oder es gehen aus dem einen Doppelpunkte vier Tangenten, aus dem anderen keine Tangente.*

Ist die Kurve einteilig, so zeigt der vorstehende Satz 8, daß aus A und aus B immer zwei Tangenten an ω gehen.

Hat die Kurve die getrennten Zweige $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, ist es erstens nicht möglich, daß A ein Schnittpunkt zweier Zweige α und β, B ein Schnittpunkt zweier anderen Zweige γ und δ sein kann: Wenn nämlich α und β sich nur in A, und γ und δ sich nur in B schneiden, dann müssen alle diese Zweige unpaar sein, aber dann würden auch z. B. α und γ sich in einem neuen Doppelpunkte von ω schneiden. In derselben Weise sieht man, daß A und B nicht die zwei Schnittpunkte eines Zweiges α mit zwei anderen Zweigen β und γ sein können. Endlich ist es auch nicht möglich, daß A ein Doppelpunkt eines Zweiges α, während B ein Schnittpunkt zweier anderen Zweige β und γ ist. Es müßten dann β und γ beide unpaar, α aber paar sein. Wenn nun aus A zwei Tangenten an α gehen, dann würde jede von diesen wenigstens sechs Punkte mit $\alpha + \beta + \gamma$ gemein haben, und dasselbe würde für jede durch A gehende Gerade der Fall sein, wenn aus A keine Tangente an α geht.

Es bleiben also nur die folgenden vier Fälle zu betrachten:

a) A und B sind Doppelpunkte desselben Zweiges α,

b) A und B sind die Schnittpunkte zweier Zweige α und β,

c) A ist ein Doppelpunkt auf einem Zweig α, B ein Doppelpunkt auf einem anderen Zweig β,

d) A ist ein Doppelpunkt auf einem Zweig α, B ein Schnittpunkt von α mit einem anderen Zweig β.

a) Aus A sowie aus B gehen infolge (8) zwei Tangenten an α, der wie die anderen Zweige $\beta, \gamma, \cdots$ paar sein muß. Für alle die letztgenannten müssen A und B beide uneigentliche Doppelpunkte sein. Aus A gehen also entweder zwei oder auch keine Tangenten an β; wenn aber das letztere der Fall wäre, dann würde jede durch A gehende Gerade zwei Punkte mit β gemein haben und die Gerade AB würde wenigstens sechs Punkte mit $\alpha + \beta$ gemein haben. Weil wir in diesem Schluß β mit $\gamma, \delta, \cdots$ und A mit B umtauschen können, folgt, daß aus A sowie gleichzeitig aus B $2s$ Tangenten an ω gehen, wenn ω s Zweige hat.

b) Die Zweige α und β müssen beide paar sein. In diesem Falle kann keine Tangente an ω weder aus A noch aus B gehen, denn eine solche würde offenbar mehr denn vier Punkte mit ω gemein haben. Die Kurve kann außer α und β keinen weiteren Zweig enthalten.

c) Die Zweige α und β sind wieder paar. Man sieht ganz wie im ersten Falle, daß aus A sowie auch aus B zwei Tangenten an jeden Zweig $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ gehen müssen, so daß aus A und aus B $2s$ Tangenten gehen, wenn die Kurve s Zweige hat.

d) In diesem Falle müssen α und β beide unpaar, weil sie nur einen Punkt miteinander gemein haben, also dritter Ordnung sein. Jede durch A

gehende Gerade schneidet $\alpha + \beta$ in vier Punkten; deshalb hat ω keine andere Zweige als α und β. Aus dem Doppelpunkte A auf α kann selbstverständlich keine Tangente an α, aber auch keine Tangente an β gehen, denn diese würde mehr denn vier Punkte mit $\alpha + \beta$ gemein haben. Der Schnittpunkt B von α mit β kann nicht auf der Schleife von α liegen, denn dieselbe müßte als Kurve zweiter Ordnung (mit einem Winkelpunkte) noch einen Punkt mit β gemein haben. B liegt also auf dem unpaaren Pseudozweig von α, und aus B gehen deshalb zwei Tangenten an α sowie auch zwei Tangenten an β.

10. *Hat eine einteilige oder mehrteilige Kurve ω vierter Ordnung ohne Spitzen nur einen eigentlichen Doppelpunkt A, und ist B ein uneigentlicher Doppelpunkt, dann gehen entweder aus A und aus B gleichviele Tangenten an ω, oder auch gehen aus A vier Tangenten, aus B keine Tangente.*

Der Doppelpunkt A ist entweder ein Doppelpunkt eines paaren Zweiges α, oder auch ein Schnittpunkt zweier unpaaren Zweige φ und ψ; alle anderen Zweige müssen jedenfalls paar sein.

Im ersten Falle gehen aus A zwei Tangenten an α, denn sonst würde jede durch A gehende Gerade, also auch AB, zwei von A verschiedene Punkte mit α gemein haben, was der Definition des uneigentlichen Doppelpunktes widerspricht. Aber auch aus B gehen zwei Tangenten an α. Zerlegen wir nämlich α in die zwei von A ausgehenden Pseudozweige α_1 und α_2, und bilden wir daraus durch Abrundung der in A auftretenden Winkelpunkte die Kurven α_1^* und α_2^*. Es wird nun eine der Geraden BA naheliegende Gerade l die Kurve α_1^* berühren müssen; sonst würde l auch mit α_2^* einen A naheliegenden Punkt gemein haben müssen, so daß sie mit α_1^* nur einen Punkt gemein haben könnte, und das ist unmöglich, weil α_1^* nur paar sein kann. An α_1^* geht also aus B eine und deshalb zwei Tangenten, und von diesen muß die eine auch α_1 berühren. Weil demnach aus B eine Tangente an $\alpha_1 + \alpha_2$ geht, dann müssen zufolge (4) zwei Tangenten vorhanden sind. Für alle übrigen Zweige sind A und B uneigentliche Doppelpunkte, und es kann nicht jede durch A (oder durch B) gehende Gerade mit irgendeinem dieser Zweige Punkte gemein haben. Deshalb gehen durch A sowie auch durch B zwei Tangenten an jeden Zweig der Kurve.

Im zweiten Falle sind φ und ψ beide dritter Ordnung, und es gehen aus A zwei Tangenten an φ und zwei an ψ. Die Kurve kann außer φ und ψ keinen weiteren Zweig haben, denn eine Gerade, welche B mit einem Punkte des neuen Zweiges verbindet, würde mehr denn zwei Punkte mit der Kurve gemein haben. Aus demselben Grunde sieht man, daß aus B keine Tangenten an φ oder an ψ gehen können.

Endlich hat man noch:

11. *Sind A und B zwei uneigentliche Doppelpunkte einer einteiligen oder mehrteiligen Kurve ω vierter Ordnung ohne Spitzen, und hat die Gerade AB keinen Punkt mit der Kurve gemein, dann gehen aus A und aus B gleichviele Tangenten an ω.*

Ein beliebiger Zweig von ω kann nicht von jeder durch A gehenden Geraden geschnitten werden, weil die Gerade AB keinen Punkt mit dem Zweig gemein hat. Deshalb gehen aus A — und ebenso aus B — zwei Tangenten an jeden Zweig von ω.

Kopenhagen, Februar 1914.

Distanzschätzungen im Funktionenraum. I.*)

Von

Ph. Frank und G. Pick in Prag.

Die Gesamtheit der reellen, im Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ integrablen Funktionen der reellen Veränderlichen x betrachtet man als „Punkte" eines Funktionenraums**). Die Funktionen $\varphi = \varphi(x)$, welche der Normierungsbedingung

$$\int_0^1 \varphi^2 \, dx = 1$$

genügen, liegen auf der „Einheitssphäre" dieses Raums. Beschränken wir uns ferner auf positive Funktionen, so kommt nur jener Teil der Einheitssphäre in Betracht, welcher dem „ersten" Oktanten der Kugel des gewöhnlichen Raums entspricht. Die sphärische Distanz zweier normierten Funktionen φ, ψ ist der kleinste positive Winkel ϑ, der durch die Gleichung

$$\cos \vartheta = \int_0^1 \varphi \psi \, dx$$

definiert ist. Für positive Funktionen wird also diese Distanz den Betrag $90^0 \left(\frac{\pi}{2}\right)$ nicht übersteigen.

Beschränken wir uns aber weiter auf *konvexe* Funktionen, so erfüllen sie nur einen Teil jenes Ausschnitts, und es erhebt sich die Frage, wie groß höchstens der sphärische Abstand zweier solchen konvexen Funktionen ist. Die Antwort lautet: der fragliche Abstand wird höchstens $60^0 \left(\frac{\pi}{3}\right)$. Dem Beweise dieses Satzes und verwandter weitergehender Sätze

*) Vgl. zwei vorläufige Mitteilungen C. R. de l'Ac. d. sc. 158 (1914), p. 104 und p. 549.

**) Über den von Pincherle eingeführten Terminus *Funktionalraum* vgl. dessen Referat II A 11 „Funktionaloperationen und -Gleichungen" in der Enzykl. der math. Wissenschaften. S. auch Kowalewski, C. R. 151 (1910), p. 1338.

ist die folgende Abhandlung gewidmet. Entkleidet man die Sätze der Redeweise der Geometrie der Funktionen, so sind sie zu charakterisieren als Aussagen über die Schranken, innerhalb deren das Integral

$$\int_0^1 \varphi\psi\, dx$$

normierter, positiver, im übrigen noch auf verschiedene Weise näher bestimmter Funktionen φ, ψ variiert.

§ 1.

Die Sphärik des Funktionenraums.

Betrachtet man die integrablen*) Funktionen der von 0 bis 1 veränderlichen Größe x als Punkte eines Funktionenraums, so ist das *Distanzquadrat* zweier Funktionen f, g definiert durch

$$\int_0^1 (f-g)^2\, dx.$$

Sieht man die identisch verschwindende Funktion als Anfangspunkt an, so wird man von den *normierten* Funktionen φ, die also die Bedingung

$$\int_0^1 \varphi^2\, dx = 1$$

befriedigen, kurz sagen, daß sie die Einheitssphäre um den Anfangspunkt erfüllen. Es ist dann weiter nahegelegt, das Integral

$$\int_0^1 \varphi\psi\, dx$$

als *Kosinus der sphärischen Distanz* der beiden normierten φ, ψ zu definieren, also

$$\cos(\varphi, \psi) = \int_0^1 \varphi\psi\, dx.$$

Orthogonale Funktionen haben die sphärische Distanz $90^0 \left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Sind φ, ψ irgend zwei linear unabhängige Funktionen, so wird man

$$\chi = u\varphi + v\psi$$

mit beliebigen Parametern u, v als eine Funktion ansehen, die mit φ, ψ und dem Anfangspunkt in derselben „Ebene“ liegt. Sind φ, ψ, χ alle drei

---

*) Auch die Quadrate der Funktionen sollen integrabel sein, was natürlich implizit durch die Normierungsbedingung vorgeschrieben wird.

23*

normiert, so wird also χ auf dem durch φ, ψ bestimmten *„Hauptkreis"* der Einheitssphäre liegen. Man hat dann aber

$$u^2 + 2uv \cos(\varphi, \psi) + v^2 = 1.$$

Wir zeichnen in einer Ebene einen Kreis mit dem Radius 1, und deuten u, v als Koordinaten in einem System mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt und dem Achsenwinkel (φ, ψ). Dann ist die obige Gleichung die Gleichung eben dieses Kreises, und wenn wir χ den Punkt mit den Koordinaten (u, v) zuordnen, so ist die definierte sphärische Distanz zweier Funktionen

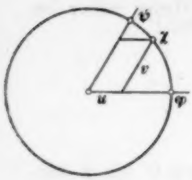


Fig. 1.

$$\chi = u\varphi + v\psi, \quad \chi_1 = u_1\varphi + v_1\psi$$

gerade durch den (kleinsten) Bogen zwischen den entsprechenden Punkten gegeben. Mit den Distanzen auf einem Hauptkreis der Einheitssphäre, den wir also als einen Kreis im gewöhnlichen Sinn auffassen dürfen, kann demnach gerechnet werden, wie mit Bogen auf einem wirklichen Kreis.

Wir lösen für spätere Zwecke die Aufgabe: Auf dem Hauptkreis durch φ, ψ soll die Funktion χ aufgestellt werden, welche von φ die gegebene sphärische Distanz ϑ hat und auf demselben von φ ausgehenden Halbkreis liegt wie ψ. Die zweite Bedingung verlangt, daß in

$$\chi = u\varphi + v\psi$$

v positiv ist. Man hat nun, wenn $(\varphi, \psi) = \vartheta_0$ gesetzt wird,

$$\cos\vartheta = u + v\cos\vartheta_0,$$
$$1 = u^2 + 2uv\cos\vartheta_0 + v^2,$$

woraus

$$v = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}, \quad u = \frac{\sin(\vartheta_0 - \vartheta)}{\sin\vartheta_0},$$

also

$$\chi = \frac{\varphi \cdot \sin(\vartheta_0 - \vartheta) + \psi \cdot \sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}$$

folgt. (Ersetzt man hierin ϑ durch $-\vartheta$, so erhält man die Funktion mit der gleichen Distanz von φ auf dem anderen Halbkreise.)

Insbesondere ist die zu φ orthogonale Funktion dieser Art gegeben durch $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also

$$\chi = \frac{\psi - \varphi\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0},$$

die Funktion, welche die Distanz zwischen φ und ψ halbiert, durch $\vartheta = \frac{\vartheta_0}{2}$, also

$$\chi = \frac{\varphi + \psi}{2\cos\frac{\vartheta_0}{2}}.$$

Wir betrachten jetzt drei normierte Funktionen φ, ψ, χ, die nicht gerade auf demselben Hauptkreis liegen sollen, und bezeichnen zur Abkürzung ihre Distanzen mit

$$(\psi, \chi) = a, \quad (\chi, \varphi) = b, \quad (\varphi, \psi) = c.$$

Fassen wir die beiden von φ ausgehenden, nach ψ, χ verlaufenden Hauptkreise ins Auge und bestimmen auf jedem die zu φ orthogonale auf der Seite von ψ oder χ gelegene Funktion (Fig. 2). Die sphärische Distanz dieser beiden Funktionen wollen wir als Winkel A der Kreisbogen $\widehat{\varphi\psi}$ und $\widehat{\varphi\chi}$ ansehen. Nun sind diese Funktionen, wie wir vorhin ermittelt haben,

$$\frac{\psi - \varphi \cos c}{\sin c}, \quad \frac{\chi - \varphi \cos b}{\sin b},$$

also ergibt sich

$$\cos A = \int_0^1 \frac{\psi - \varphi \cos c}{\sin c} \cdot \frac{\chi - \varphi \cos b}{\sin b}\, dx$$

$$= \frac{\cos a - \cos c \cos b - \cos b \cos c + \cos c \cos b}{\sin c \sin b},$$

d. h.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Da nun aus dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie ihre anderen Formeln und überhaupt alle Sätze über (Eulersche) sphärische Dreiecke hergeleitet werden können, so gelten alle Distanzgleichungen und Distanzungleichungen der gewöhnlichen Sphärik unverändert auch für die Distanzen auf der Sphäre des Funktionenraums.

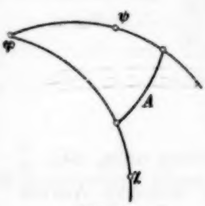


Fig. 2.

Für spätere Zwecke verzeichnen wir hier eine Formel, welche die Länge m_a der Mittellinie eines sphärischen Dreiecks durch die drei Seiten ausdrückt (Fig. 3). Wendet man auf beide Teildreiecke den Kosinussatz an, so erhält man leicht

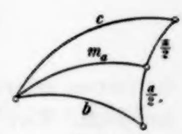


Fig. 3.

$$\cos m_a = \frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \frac{a}{2}}.$$

§ 2.

Sätze über die sphärische Distanz konvexer Funktionen.

Es sei jetzt $\varphi(x)$ eine konvexe (genauer: nicht konkave), positive, normierte Funktion. $x_1 < x_2 < x_3$ seien drei Argumente des Inter-

valls $\overline{01}$. Die Eigenschaft, konvex zu sein, wird ausgedrückt durch die Relation

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \varphi(x_1) \\ 1 & x_2 & \varphi(x_2) \\ 1 & x_3 & \varphi(x_3) \end{vmatrix} \leqq 0.$$

(Wir wollen überhaupt von drei Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), mit $x_1 < x_2 < x_3$, sagen, daß sie *konvex liegen*, wenn

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \leqq 0.)$$

In jedem Punkte der Kurve

$$y = \varphi(x)$$

läßt sich (mindestens) eine Stützgerade zeichnen, „über" der kein Punkt der Kurve liegt (Fig. 4).

Fig. 4.

Betrachten wir die Gesamtheit aller dieser konvexen Kurven näher, so bemerken wir sofort zwei äußerste solche Funktionen, eine die möglichst steil vom Nullpunkt an ansteigt, und wegen der Normierung im Punkt $(1, \sqrt{3})$ endigen muß: die Funktion $x\sqrt{3}$, und eine möglichst steilen Falls: $(1-x)\sqrt{3}$ (Fig. 5). Der Kosinus der sphärischen Distanz dieser beiden Funktionen ist

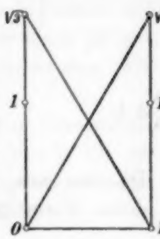


Fig. 5.

$$3\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{2},$$

die Distanz selbst also 60^0 oder $\frac{\pi}{3}$. Es liegt die Vermutung nahe, *daß* $\frac{\pi}{3}$ *der größte Wert ist, den die sphärische Distanz zweier konvexen Kurven überhaupt erreichen kann* (Satz I).

Die betrachteten speziellen Funktionen gehören zur Klasse der linearen Funktionen $\overline{\varphi}$*), die offenbar einen einzigen Hauptkreis erfüllen, da sie jedenfalls in der Form

$$\overline{\varphi} = \lambda + \mu x = u \cdot x\sqrt{3} + v \cdot (1-x)\sqrt{3}$$

darstellbar sind. Insbesondere entstehen aus dieser Formel die positiven unter ihnen, wenn u und v nicht negativ sind. Die Normierungsbedingung lautet hier

$$u^2 + uv + v^2 = 1.$$

*) Mit $\overline{\varphi}$, $\overline{\psi}$, $\cdots$ sollen lineare Funktionen, mit $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\psi}$, $\cdots$ solche, deren Bildkurve aus zwei geradlinigen Stücken besteht, bezeichnet werden.

Durch $u = v$ erhält man die Funktion, welche den Bogen der positiven Funktionen $\bar{\varphi}$ halbiert. Es ergibt sich die Funktion

$$\bar{\varphi} = 1,$$

von welcher die Enden des Bogens also die Entfernung 30^0 oder $\frac{\pi}{6}$ haben. Man wird vermuten, *daß $\frac{\pi}{6}$ die größte Entfernung ist, die eine beliebige konvexe Funktion von der Funktion* 1 *haben kann* (Satz Ia).

Beschränken wir uns nun schließlich auf monotone, etwa auf zunehmende (genauer: nicht abnehmende) konvexe Funktionen. Die geradlinigen unter ihnen erfüllen den Hauptkreisbogen zwischen den Funktionen $x\sqrt{3}$ und 1. Den Mittelpunkt dieses Bogens bildet nach § 1 die Funktion

$$\frac{1 + x\sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

Man wird vermuten: II) *Die sphärische Distanz zweier steigender Funktionen ist höchstens gleich* $30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

IIa) *Die Distanz zwischen einer beliebigen steigenden Funktion und der Funktion* $\frac{1 + x\sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$ *ist höchstens gleich* $15^0\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Es ist hier wie immer die Rede von konvexen, positiven, normierten Funktionen, was wir nicht jedesmal ausdrücklich beisetzen wollen.

Der Beweis der in diesem Paragraphen vermutungsweise aufgestellten Sätze und ihrer Verallgemeinerungen ist das eigentliche Ziel der nachfolgenden Auseinandersetzungen.

§ 3.

Orientierung über die Lage der Kurven $y = \varphi(x)$ in der xy-Ebene.

Die positiven konvexen normierten Funktionen erfüllen den in der nebenstehenden Figur schraffierten Ebenenteil. Daß nämlich durch jeden Punkt dieses Teils solche Funktionen hindurchgehen, folgt so. Man verbinde die Endpunkte des Intervalls $\overline{0\,1}$ der Abszissenachse mit irgendeinem Punkt der oberen Begrenzungsstrecke. Die aus diesen geradlinigen Strecken zusammengesetzte Kurve repräsentiert eine positive, konvexe, normierte Funktion $\widehat{\varphi}$, und offenbar geht durch jeden Punkt des Gebiets (mindestens) eine solche. Daß andererseits durch keinen außerhalb gelegenen Punkt eine Kurve $y = \varphi(x)$ hindurchgeht, folgt für die Punkte des unteren gleichschenkligen Dreiecks so. Die fragliche Kurve müßte

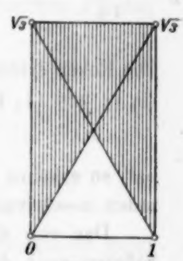


Fig. 6.

in dem Punkt eine Stützgerade haben. Diese Stützgerade selbst aber stellt dann eine Funktion $\bar{f}$ dar, die unternormiert ist, d. h. es ist

$$\int_0^1 \bar{f}^2\,dx < 1.$$

Um so mehr ist die Kurve unternormiert. Für einen Punkt oberhalb des Gebiets aber umschließt jede durchgehende konvexe Kurve diejenige $y = \widehat{f}(x)$, die aus seinen Verbindungsstrecken mit den Enden des Intervalls besteht. Für diese aber ist offenbar

$$\int_0^1 \widehat{f}^2\,dx > 1.$$

um so mehr für die Kurve selbst, die also auch nicht normiert sein kann.

Wir betrachten jetzt nur zunehmende konvexe Funktionen. Soll die Endordinate möglichst groß sein, so müssen wir die Anfangsordinate möglichst klein, die Kurve möglichst wenig konvex, d. i. geradlinig annehmen; wir kommen so wieder auf die Funktion $x\sqrt{3}$, also auf die Endordinate $\sqrt{3}$. Andererseits kann die Anfangsordinate offenbar nicht größer als 1 sein, und wenn sie diesen Wert hat, so ergibt sich die Funktion 1, und gleichzeitig der kleinste mögliche Wert für die Endordinate: 1.

Nun wollen wir die Gesamtheit der eben betrachteten Funktionen erweitern, indem wir überhaupt alle diejenigen positiven, konvexen, normierten Funktionen $\varphi(x)$ ins Auge fassen, deren Endordinate mindestens gleich Eins ist:

$$\varphi(1) \geqq 1,$$

und unter denen die steigenden Funktionen offenbar sämtlich enthalten sind. Insbesondere suchen wir diejenigen aus zwei geraden Linien zusammengesetzten Funktionen $\widehat{\varphi}$ auf, welche 0 als Anfangs-, 1 als Endwert haben. Ist $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Ecke einer solchen Funktion bzw. der sie darstellenden gebrochenen Linie, so ergibt sich leicht aus der Normierung

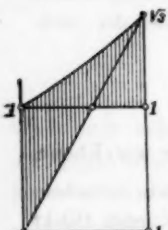


Fig. 7.

$$(\mathfrak{y}+1)(\mathfrak{y}-\mathfrak{x}) = 2.$$

Die Ecken erfüllen also (Fig. 7) einen Hyperbelbogen, der durch die Punkte $(0, 1)$ und $(1, \sqrt{3})$ begrenzt wird; da die Hyperbel die Asymptoten

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y} = -1$$

hat, so erkennt man, daß dieser Bogen zwischen seiner Sehne und der Geraden $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ verläuft.

Das von diesem Hyperbelbogen nach oben, von vier geradlinigen Stücken nach den Seiten und unten begrenzte fünfeckige Gebiet (in Fig. 7

schraffiert) wird von den Kurven, deren Endordinate mindestens gleich 1 ist, erfüllt. Man erkennt das ganz ähnlich, wie die entsprechende frühere Behauptung.

Analoges wie für zunehmende gilt augenscheinlich für abnehmende Funktionen.

§ 4.

Hilfsmittel für den Beweis.

Der Beweis der in § 2 aufgestellten Sätze erfolgt so, daß man ihn zunächst für die Sätze Ia) und IIa) erbringt; aus diesen folgen die Sätze I) und II) unmittelbar. Denn, wenn schon feststeht, daß eine beliebige konvexe Funktion von $\varphi = 1$ höchstens den Abstand $\frac{\pi}{6}$ hat, so können zwei beliebige solche Funktionen φ, ψ untereinander keinen größeren Abstand als $\frac{\pi}{3}$ haben, weil in einem sphärischen Dreieck (Fig. 8) die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte. Noch schärfer: die obere Grenze $\frac{\pi}{3}$ kann nur erreicht werden von zwei Funktionen, welche mit 1 auf demselben Hauptkreis liegen und zwar auf verschiedenen Seiten von 1 in möglichst großer Distanz $\frac{\pi}{6}$. Wir werden sehen, daß nur das Paar $x\sqrt{3}, (1-x)\sqrt{3}$ diesen Anforderungen genügt.

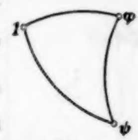


Fig. 8

Ganz ähnlich verhält sich die Sache bei der Gesamtheit der monotonen (zunehmenden) Funktionen.

Was nun den Beweis der Sätze Ia) und IIa) anlangt, so beruht er einerseits auf der Zuziehung von Hilfsfunktionen aus den Klassen $\overline{\varphi}$ und $\widehat{\varphi}$, andererseits auf der massengeometrischen Deutung der auftretenden Integrale. Ist φ eine beliebige positive Funktion, so ist

$$M = M(\varphi) = \int_0^1 \varphi\, dx$$

die von der Kurve $y = \varphi(x)$ über dem Segment $\overline{01}$ bestimmte Fläche, kurz die Fläche von φ. Ferner ist

$$2\, M_x = 2\, M_x(\varphi) = \int_0^1 \varphi^2\, dx$$

das doppelte statische Moment dieser Fläche in bezug auf die x-Achse.*)

*) $\int_0^1 \varphi^2 dx$ ist ja auch das durch π dividierte Volumen, das durch Rotation der Fläche um die x-Achse entsteht; beide Deutungen sind durch die Guldinsche Regel verknüpft.

Da wir φ normiert voraussetzen, ist dieses Moment gleich $\frac{1}{2}$. Endlich ist

$$M_y = M_y(\varphi) = \int_0^1 x\varphi\, dx$$

das statische Moment derselben Fläche in bezug auf die y-Achse. Also ist die sphärische Distanz zwischen φ und der Funktion 1 gegeben durch $M(\varphi)$. Die Distanz zwischen φ und der Funktion $x\sqrt{3}$ ist

$$M_y(\varphi)\cdot\sqrt{3}.$$

Endlich ist die Distanz zwischen φ und einer beliebigen

$$\overline{\varphi} = \lambda + \mu x$$

gleich

$$\lambda M(\varphi) + \mu M_y(\varphi).$$

§ 5.

Beweis des Satzes Ia).

Die Kurve $y = x\sqrt{3}$ schneidet die Kurve $y = \varphi(x)$ einer beliebigen konvexen Funktion φ in einem einzigen Punkt (wobei von den Endpunkten nicht gesprochen wird) und zwar von unten nach oben. Die beiden Flächenteile, die in Fig. 9 mit I, II bezeichnet sind, haben gleiche Momente in bezug auf die x-Achse, weil $x\sqrt{3}$ und φ beide normiert sind:

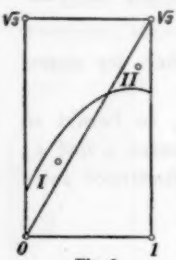


Fig. 9.

$$M_x(\mathrm{I}) = M_x(\mathrm{II}).$$

Es seien (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) die Schwerpunkte von I, II. Die Punkte

$$(0, 0),\ (\xi_1, \eta_1),\ (\xi_2, \eta_2)$$

sind offenbar in konvexer, und zwar nicht geradliniger Lage. Also ist

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 < 0.$$

Multiplizieren wir hier mit dem Produkt der Flächen von I und II, so erhalten wir, da ja stets

$$M\cdot\xi = M_y,\quad M\cdot\eta = M_x$$

ist, zunächst

$$M_y(\mathrm{I})\, M_x(\mathrm{II}) - M_y(\mathrm{II})\, M_x(\mathrm{I}) < 0,$$

also nach Kürzung durch $M_x(\mathrm{II}) = M_x(\mathrm{I})$

$$M_y(\mathrm{I}) < M_y(\mathrm{II}),$$

woraus folgt

$$M_y(\varphi) < M_y(x\sqrt{3})$$

Man erhält auf dem gleichen Wege

$$M_y(\varphi) > M_y([1-x]\sqrt{3}).$$

Betrachten wir nun alle $\widehat{\varphi}$ mit der Ecke auf der Verbindungsstrecke von $(0, \sqrt{3})$ und $(1, \sqrt{3})$ (vgl. § 3). Sie bilden ein Kontinuum (Kurvenbogen im Funktionenraum), beginnend mit $x\sqrt{3}$, endigend mit $(1-x)\sqrt{3}$. $M_y(\widehat{\varphi})$ ändert sich stetig, also muß es ein $\widehat{\varphi}$ geben, so daß

$$M_y(\widehat{\varphi}) = M_y(\varphi)$$

ist. Wenn φ nicht geradezu mit diesem $\widehat{\varphi}$ zusammenfällt, so ergibt sich eine Figur der Art, daß $\widehat{\varphi}$ die φ überragt, nach beiden Seiten, oder aber mindestens nach der einen dafür von φ überschritten werden muß (Fig. 10). Denn von einer Geraden, die an der x-Achse beginnt, kann die konvexe Kurve nur einmal geschnitten werden, wenn sie nicht (teilweise) mit ihr zusammenfällt, wo sie dann überhaupt nicht von einer auf die andere Seite übergeht. Es seien (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) die Schwerpunkte der drei Flächenstücke I, II, III, und es seien M_1, M_2, M_3 ihre Flächen. Man hat, da φ und $\widehat{\varphi}$ beide normiert sind,

Fig. 10.

$$M_1\eta_1 - M_2\eta_2 + M_3\eta_3 = 0,$$

und da sie gleiche Momente in bezug auf die y-Achse besitzen,

$$M_1\xi_1 - M_2\xi_2 + M_3\xi_3 = 0.$$

Die drei Schwerpunkte liegen konvex; also ist

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{vmatrix} < 0,$$

da Geradlinigkeit ausgeschlossen ist. Multipliziert man die drei Zeilen mit M_1, M_2, M_3, und vereinigt entsprechend, so ergibt sich

$$(M_1 - M_2 + M_3)(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) < 0,$$
$$(M_1 - M_2 + M_3)(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) < 0,$$

oder mindestens eine dieser beiden Relationen, wenn eine der Flächengrößen M_1 oder M_3 verschwindet. Nun ist aber

$$\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 < 0, \quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 < 0,$$

weil $(0, 0)$, (ξ_2, η_2), (ξ_3, η_3) und ebenso $(0, 0)$, (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) konvex liegen. Also folgt

$$M_1 - M_2 + M_3 > 0,$$

und daraus

$$M(\varphi) > M(\widehat{\varphi}).$$

Der Kosinus der sphärischen Distanz zwischen φ und $\overline{\varphi} = 1$ ist also größer als der zwischen $\widehat{\varphi}$ und $\overline{\varphi} = 1$; die entsprechenden Distanzen selbst stehen im umgekehrten Größenverhältnis. Um also die von $\overline{\varphi} = 1$ möglichst entfernten konvexen Kurven zu erhalten, müssen wir nur unter den betrachteten $\widehat{\varphi}$ suchen. Alle diese haben aber augenscheinlich denselben Inhalt

$$\frac{\sqrt{3}}{2},$$

also von $\overline{\varphi} = 1$ die Distanz $\frac{\pi}{6}$ oder 30^0. Damit ist der Satz Ia) und somit nach § 4 auch der Satz I) bewiesen.

Aus diesen Überlegungen folgt aber noch, daß jene Funktionen $\widehat{\varphi}$ die einzigen sind, welche die größtmögliche Distanz $\frac{\pi}{6}$ von $\overline{\varphi} = 1$ besitzen. Da nun, wenn $\widehat{\varphi}$ eine solche Funktion bedeutet, die Funktion

$$u \cdot 1 + v \cdot \widehat{\varphi}$$

für dieselbe Abszisse eine Ecke hat, wie $\widehat{\varphi}$ selbst, so können zwei jener $\widehat{\varphi}$ nicht mit $\overline{\varphi} = 1$ auf *einem* Hauptkreis liegen, außer $x\sqrt{3}$ und $(1-x)\sqrt{3}$, bei denen dies auch wirklich zutrifft. Damit ist auch die im § 4 angegebene Verschärfung des Satzes dargetan.

§ 6.

Beweis des Satzes IIa).

Der Beweis hat im wesentlichen den nämlichen Gedankengang wie der vorige, weicht aber allerdings im einzelnen einigermaßen ab. Wir beweisen den Satz IIa) übrigens gleich von der erweiterten Gesamtheit aller konvexen Kurven, deren Endordinate nicht kleiner als 1 ist (vgl. § 3). Hier verwenden wir insbesondere die $\widehat{\varphi}$ mit der Anfangsordinate 0 und der Endordinate 1, die in § 3 beschrieben sind. Ihre Ecke $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ variiert auf dem dort angegebenen Bogen der Hyperbel

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{x})(\mathfrak{y} + 1) = 2$$

und sie bilden ein Kontinuum (Kurvenbogen des Funktionenraums), begrenzt von den Funktionen $x\sqrt{3}$ und 1. Vergleicht man nun wieder (Fig. 11) eine beliebige zunehmende Funktion mit $x\sqrt{3}$ und mit 1, so ergibt sich, genau wie in § 5,

Fig. 11.

$$M_y(1) < M_y(\varphi) < M_y(x\sqrt{3}).$$

Also muß auch hier ein mittleres $\widehat{\varphi}$ existieren, für das

$$M_y(\widehat{\varphi}) = M_y(\varphi).$$

Für diese Funktion aber ergibt die Schlußweise des vorigen Paragraphen

$$M(\varphi) > M(\widehat{\varphi}).$$

Nun ist der Kosinus der sphärischen Distanz zwischen φ und $\frac{1+x\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ (vgl. § 2) gegeben durch

$$\frac{M(\varphi)+M_y(\varphi)\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

also geht aus den letzten Relationen hervor, daß dieser Kosinus für φ größer ausfällt, als für $\widehat{\varphi}$. Somit sind auch diesmal die Funktionen möglichst großer Distanz von $\overline{\varphi} = \frac{1+x\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ unter den $\widehat{\varphi}$ zu suchen. Man findet aber

$$\int_0^1 \overline{\varphi}\cdot\widehat{\varphi}\,dx = \frac{(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})(\mathfrak{x}+1+\sqrt{3})+2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Zieht man davon

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

ab, so erhält man

$$\int_0^1 \overline{\varphi}\,\widehat{\varphi}\,dx - \cos\frac{\pi}{12} = \frac{(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})(\mathfrak{x}+1+\sqrt{3})-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})(\mathfrak{x}+1+\sqrt{3})-\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})(\mathfrak{y}+1)}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

da wegen der Normierung

$$(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})(\mathfrak{y}+1) = 2$$

ist. Es ergibt sich also

$$\int_0^1 \overline{\varphi}\,\widehat{\varphi}\,dx - \cos\frac{\pi}{12} = -\frac{(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})(\mathfrak{y}-[\sqrt{3}-1]\mathfrak{x}-1)}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{3}-1)}.$$

Der Hyperbelbogen, auf dem die Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ liegen, verläuft (vgl. § 3) *zwischen* den Geraden

$$\mathfrak{y}-\mathfrak{x}=0, \quad \mathfrak{y}-[\sqrt{3}-1]\mathfrak{x}-1=0$$

mit Ausnahme seiner Endpunkte, welche auf der ersten dieser Geraden liegen. Die obige Differenz ist also stets positiv und verschwindet nur an den Endpunkten. Also ist die sphärische Distanz zwischen $\widehat{\varphi}$ und $\frac{1+x\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ stets kleiner als $\frac{\pi}{12}$ oder 15^0 mit Ausnahme der beiden End-

punkte des Kontinuums der $\widehat{\varphi}$, d. i. für die Funktionen $x\sqrt{3}$ und 1, für die sie gleich $\frac{\pi}{12}$ ausfällt. Offenbar ist damit Satz IIa) und II) gleich in der schärferen Fassung bewiesen.

§ 7.

Folgerungen.

Es ist klar, daß man den in § 6 durchgeführten Beweis fast wörtlich auf monoton *abnehmende* konvexe Funktionen übertragen kann. Auch kann durch Einführung von $(1-x)$ statt x der eine Fall auf den anderen zurückgeführt werden. Man erhält also folgende Sätze: III) *Die sphärische Distanz zweier abnehmenden Funktionen ist höchstens gleich* $30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$; IIIa) *Die sphärische Distanz einer beliebigen abnehmenden Funktion und der speziellen* $\frac{1+(1-x)\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ *ist höchstens gleich* $15^0\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Auch ist wieder zu konstatieren, daß die gegenseitige Maximaldistanz von 30^0 nur von den Funktionen 1 und $(1-x)\sqrt{3}$ erreicht wird.

Die sämtlichen Sätze sind offenbar leicht auf jedes andere Grundintervall als $\overline{0\,1}$ zu übertragen. Was sich dabei überhaupt nicht ändert, sind die gefundenen Maximalwerte der sphärischen Distanz. Was an Stelle der speziellen Funktionen tritt, die in unseren Sätzen vorkommen, ist ohne Schwierigkeit zu ermitteln. Wir stellen dies in folgender Tabelle zusammen:

Intervall	$\overline{\varphi} =$				
0 bis 1	1	$x\sqrt{3}$	$(1-x)\sqrt{3}$	$\frac{1+x\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$\frac{1+(1-x)\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
α bis β	$\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha}}$	$\frac{(x-\alpha)\sqrt{3}}{\sqrt{\beta-\alpha}^3}$	$\frac{(\beta-x)\sqrt{3}}{\sqrt{\beta-\alpha}^3}$	$\frac{(\beta-\alpha)+(x-\alpha)\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\beta-\alpha}^3}$	$\frac{(\beta-\alpha)+(\beta-x)\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\beta-\alpha}^3}$.

Betrachten wir nun wieder konvexe Funktionen im Intervall $\overline{0\,1}$, aber speziell solche, die *symmetrisch* zu beiden Seiten von $x=\frac{1}{2}$ verlaufen. Sind $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ irgend zwei solche (nicht notwendig verschiedene) Funktionen, so hat man

$$\int_0^1 \Phi(x)\cdot\Psi(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \Phi(x)\,\Psi(x)\,dx.$$

Führt man hier durch

$$x = 2x_1$$

eine neue Variable ein, und setzt

$$\Phi(2x_1) = \varphi(x_1), \quad \Psi(2x_1) = \psi(x_1),$$

und läßt schließlich den Index wieder weg, so erhält man

$$\int_0^1 \Phi(x)\,\Psi(x)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,\psi(x)\,dx.$$

Damit ist das Studium dieser symmetrischen Funktionen auf das der monoton zunehmenden zurückgeführt. Man hat nur zu beachten, daß die einer gegebenen zunehmenden Funktion $\varphi(x)$ entsprechende symmetrische Funktion $\Phi(x)$ folgendermaßen anzusetzen ist:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(2x) & \text{von } x = 0 \text{ bis } x = \frac{1}{2} \\ \varphi(2-2x) & \text{von } x = \frac{1}{2} \text{ bis } x = 1. \end{cases}$$

Die Sätze über sphärische Distanzen werden demnach hier so lauten: IV) *Die sphärische Distanz zweier symmetrischen konvexen Funktionen ist höchstens gleich* $30^0\left(\frac{\pi}{6}\right)$, *und zwar wird diese Schranke nur erreicht durch die Funktionen* 1 *und* $\left\{\begin{matrix} 2x\sqrt{3} \\ 2(1-x)\sqrt{3} \end{matrix}\right\}$; IVa). *Die sphärische Distanz zwischen einer beliebigen symmetrischen konvexen Funktion und der speziellen* $\left\{\begin{matrix} \dfrac{2+2x\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ \dfrac{2+2(1-x)\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \end{matrix}\right\}$ *ist höchstens gleich* $15^0\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Die sechs Sätze I) bis IIIa) sind Spezialfälle zweier allgemeinerer zusammengehöriger Sätze, zu deren Erörterung wir nun übergehen.

§ 8.

Einschränkung des Funktionenbereiches durch Randbedingungen.

Die Randwerte einer konvexen Funktion $\varphi(x)$, das heißt die Zahlen $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ sind an die Schranke

$$\varphi(0),\ \varphi(1) \leqq \sqrt{3}$$

gebunden. Dies lehrt der Anblick des in § 3 ermittelten Gebietes der x, y-Ebene, das von den Kurven

$$y = \varphi(x)$$

erfüllt wird.

Aber weiter: Ist $\varphi(0) \geqq p$, so existiert für $\varphi(1)$ eine hierdurch bedingte obere Schranke unter $\sqrt{3}$. Es gibt nämlich eine und nur eine

Funktion $\bar{\varphi}(x)$ mit $\bar{\varphi}(0) = p$; für die Bestimmung von $\bar{\varphi}(1)$ hat man ja wegen der Normierung

$$\bar{\varphi}(1)^2 + p \cdot \bar{\varphi}(1) + p^2 = 3,$$

und diese quadratische Gleichung hat für $p \leqq \sqrt{3}$ eine und nur eine nicht negative Wurzel, die wir q_p nennen wollen (Fig. 12). Ist nun $\varphi(0) \geqq p$, so kann nicht $\varphi(1)$ gleichzeitig $> q_p$ sein; es wäre sonst für alle $0 < x \leqq 1$

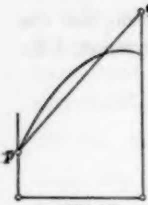


Fig. 12.

$$\varphi(x) > \bar{\varphi}(x),$$

also $\varphi(x)$ sicher übernormiert. Somit ist

$$\varphi(1) \leqq q_p.$$

Genau ebenso ist durch eine gegebene untere Schranke q für $\varphi(1)$ eine obere, p_q, für $\varphi(0)$ bedingt.

Man erhält sehr bequeme Formeln für diese Schranken, wenn man die Funktionen $\bar{\varphi}$ durch ihre sphärischen Abstände ϑ von $x\sqrt{3}$ gegeben denkt. Anfangs- und Endordinate einer so definierten, passend durch $\bar{\varphi}_\vartheta$ zu bezeichnenden Funktion haben die Werte

$$2 \sin \vartheta, \quad 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right)$$

und ϑ ist an das Intervall

$$0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{3}$$

gebunden. Es gilt also der Satz, daß aus

$$\varphi(0) \geqq 2 \sin \vartheta \quad \text{stets} \quad \varphi(1) \leqq 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right),$$

und aus

$$\varphi(1) \geqq 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right) \quad \text{stets} \quad \varphi(0) \leqq 2 \sin \vartheta$$

folgt.

Wenn also für beide Werte $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ untere Schranken p, q $(\leqq \sqrt{3})$ gegeben werden, und man bestimmt, was dann immer möglich ist, zwei positive Winkel ϑ_0, ϑ_1, kleiner als $\frac{\pi}{3}$, so daß

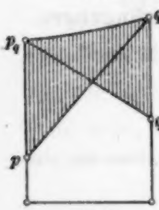


Fig. 13.

$$p = 2 \sin \vartheta_0, \quad q = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta_1\right),$$

so existiert, wenn $\vartheta_1 < \vartheta_0$, überhaupt keine zugehörige konvexe Funktion; wenn $\vartheta_1 = \vartheta_0$, eine einzige, nämlich $\bar{\varphi}_{\vartheta_0}$; wenn aber $\vartheta_1 > \vartheta_0$, dann gibt es eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit zugehöriger Funktionen. In diesem letzten Falle ist stets

$$p_q > p, \quad q_p > q.$$

Diese Mannigfaltigkeit konvexer Funktionen bestimmt ein Flächenstück in der xy-Ebene, welches von den entsprechenden Kurven

$$y = \varphi(x)$$

erfüllt wird (Fig. 13). Wir konstruieren die Geraden $y = \overline{\varphi}_{\vartheta_0}(x)$ und $y = \overline{\varphi}_{\vartheta_1}(x)$; es ist

$$\overline{\varphi}_{\vartheta_0}(0) = p = 2\sin\vartheta_0, \quad \overline{\varphi}_{\vartheta_1}(1) = q = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta_1\right)$$

und andererseits

$$\overline{\varphi}_{\vartheta_0}(1) = q_p = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta_0\right), \quad \overline{\varphi}_{\vartheta_1}(0) = p_q = 2\sin\vartheta_1.$$

Diese beiden Funktionen begrenzen den Bogen des Hauptkreises der $\overline{\varphi}$, dessen Punkten Funktionen unserer Mannigfaltigkeit entsprechen. Wir wollen nun jene $\widehat{\varphi}$ suchen, die beiden Randbedingungen

$$\widehat{\varphi}(0) = p, \quad \widehat{\varphi}(1) = q$$

genügen. Es sei $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ die Ecke der Kurve $y = \widehat{\varphi}(x)$, so gibt die Normierung

$$(\mathfrak{y} + p + q)(\mathfrak{y} + [p - q]\mathfrak{x} - p) = 3 - p^2 - pq - q^2.$$

Im allgemeinen stellt diese Gleichung eine Hyperbel dar mit den Asymptoten

$$\mathfrak{y} + p + q = 0, \quad \mathfrak{y} + (p - q)\mathfrak{x} - p = 0,$$

von denen die zweite die Verbindungslinie der Endpunkte der Funktionen $\widehat{\varphi}$, nämlich $(0, p)$ und $(1, q)$ ist, während die erste eine Parallele zur x-Achse unter ihr darstellt. Da die Hyperbel durch die Punkte $(0, p_q)$ und $(1, q_p)$ hindurchgeht, weil die beiden Funktionen $\overline{\varphi}_{\vartheta_0}$ und $\overline{\varphi}_{\vartheta_1}$ ja Grenzfälle der $\widehat{\varphi}$ bilden*), so ist klar, daß der in Betracht kommende Bogen der Hyperbel *zwischen* den Geraden

$$\mathfrak{y} + (p - q)\mathfrak{x} - p = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{y} + (p_q - q_p)\mathfrak{x} - p_q = 0$$

liegt, und nur seine Endpunkte *auf* der zweiten Geraden hat.

Ausgeartet ist der Fall $q = p$, also auch $p_q = q_p$ (Fig. 14). Die Bedingung wird da

$$(\mathfrak{y} + 2p)(\mathfrak{y} - p) = 3 - 3p^2$$

oder

$$\mathfrak{y}^2 + p\mathfrak{y} + p^2 = 3.$$

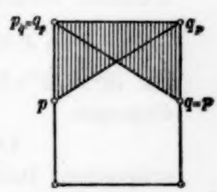


Fig. 14.

Sie zerfällt in zwei Gerade parallel zur x-Achse, von denen aber nur die eine

$$\mathfrak{y} = p_q$$

eine Strecke im Gebiet hat, die also den Ort von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ darstellt.

---

*) Das Kontinuum (der Kurvenbogen) der $\widehat{\varphi}$ hat geradezu $\overline{\varphi}_{\vartheta_0}$ und $\overline{\varphi}_{\vartheta_1}$ zu Endpunkten.

Das fünfeckige Gebiet*) unterhalb des Ortes der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, rechts und links von Teilen der Geraden $x = 0$, $x = 1$, nach unten aber von Teilen der Geraden $y = \bar{\varphi}_{\vartheta_0}(x)$, $y = \bar{\varphi}_{\vartheta_1}(x)$ begrenzt, wird von unseren Kurven überstrichen. Daß es von diesen Kurven ganz in Anspruch genommen wird, zeigen schon die betrachteten $\hat{\varphi}$ für sich. Daß keine φ-Kurve über das Gebiet hinausreicht, folgt daraus, daß sie dann jedenfalls $\hat{\varphi}$-Kurven ganz einschließen müßte, also sicher übernormiert wäre. Daß andererseits keine φ-Kurve nach unten das Gebiet verlassen kann, folgt daraus, daß sie dann eine Stützgerade besitzen müßte, welche die beiden seitlichen Begrenzungsgeraden oberhalb $(0, p)$ bzw. $(1, q)$ trifft, und zum Teil unterhalb des Gebietes verläuft. Eine solche Gerade aber stellt an sich eine unternormierte Funktion dar, um so mehr das vorausgesetzte φ selbst. Denn eine lineare normierte Funktion unserer Mannigfaltigkeit, also

$$u\bar{\varphi}_{\vartheta_0} + v\bar{\varphi}_{\vartheta_1}$$

mit positiven u, v hat für jene Abszisse x_1, für die $\bar{\varphi}_{\vartheta_0}(x_1) = \bar{\varphi}_{\vartheta_1}(x_1)$ wird, also für die einspringende Ecke des Fünfecks, den Wert

$$(u + v)\,\bar{\varphi}_{\vartheta_0}(x_1).$$

Da nun

$$u^2 + 2uv\cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) + v^2 = 1$$

ist, hat man

$$(u + v)^2 = 1 + 2uv\,(1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0)) > 1,$$

woraus das Behauptete folgt; denn man sieht, daß alle linearen Funktionen der Mannigfaltigkeit *oberhalb* der einspringenden Ecke des Fünfecks verlaufen.

§ 9.

Allgemeine Sätze.

Die Sätze, die wir nun aussprechen und beweisen werden, beziehen sich auf eine Teilmannigfaltigkeit konvexer Funktionen, wie sie soeben betrachtet worden ist. Es sei also

$$p = 2\sin\vartheta_0, \quad q = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta_1\right), \quad (\vartheta_1 > \vartheta_0),$$

und es seien wieder $\bar{\varphi}_{\vartheta_0}$, $\bar{\varphi}_{\vartheta_1}$ die linearen Funktionen, die bzw. den Bedingungen

$$\bar{\varphi}_{\vartheta_0}(0) = 2\sin\vartheta_0, \quad \bar{\varphi}_{\vartheta_1}(1) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta_1\right)$$

entsprechen. Dann gilt:

V) *Der sphärische Abstand irgend zweier positiven, konvexen Funktionen, die den beiden Randbedingungen*

$$\varphi(0) \geqq 2\sin\vartheta_0, \quad \varphi(1) \geqq 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta_1\right)$$

---

*) S. Fig. 13 und 14, wo das Gebiet jedesmal schraffiert ist.

genügen, ist höchstens gleich $\vartheta_1 - \vartheta_0$, *und diese obere Schranke wird nur von den Funktionen* $\bar{\varphi}_{\vartheta_0}$, $\bar{\varphi}_{\vartheta_1}$ *erreicht.*

V a) *Der sphärische Abstand irgend einer positiven, konvexen Funktion, die den beiden Randbedingungen* $\varphi(0) \geqq 2 \sin \vartheta_0$, $\varphi(1) \geqq \sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta_1\right)$ *genügt, von der Funktion* $\bar{\varphi}_{\frac{\vartheta_0+\vartheta_1}{2}} = \dfrac{\bar{\varphi}_{\vartheta_0} + \bar{\varphi}_{\vartheta_1}}{2\cos\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{2}}$ *ist höchstens gleich* $\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2}$.

Aus dem Satz V a) folgt der Satz V) wieder, wie in den früheren Spezialfällen, weil die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks mindestens so groß ist als die dritte Seite. Auch ist zu sehen, daß zwei Funktionen die obere Distanzschranke nur erreichen, wenn sie beide von $\bar{\varphi}_{\frac{\vartheta_0+\vartheta_1}{2}}$ den Höchstabstand $\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2}$ haben, und zu entgegengesetzten Seiten dieser Funktion auf demselben Hauptkreis liegen.

Um nun V a) zu beweisen, verfahren wir so. Die Distanz der beliebigen Funktion φ von $\bar{\varphi}_{\frac{\vartheta_0+\vartheta_1}{2}}$ ist die Mittellinie des sphärischen Dreiecks mit den Ecken φ, $\bar{\varphi}_{\vartheta_0}$, $\bar{\varphi}_{\vartheta_1}$. Bezeichnen wir die Seiten $(\varphi, \bar{\varphi}_{\vartheta_0})$ und $(\varphi, \bar{\varphi}_{\vartheta_1})$ zur Abkürzung mit b und c, die dritte Seite $\vartheta_1 - \vartheta_0$ kurz mit a, so ist nach der Formel am Schluß von § 1 die fragliche Distanz gleich

$$\frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \frac{a}{2}},$$

wie ja auch leicht direkt festgestellt werden kann. Was wir also zu beweisen haben, ist:

$$\frac{\cos b + \cos c}{2 \cos \frac{a}{2}} \geqq \cos \frac{a}{2}$$

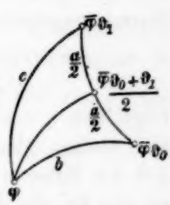


Fig. 15.

oder

$$\cos b + \cos c - \cos a - 1 \geqq 0.$$

Wir untersuchen die Richtigkeit der Behauptung zunächst für eine der im vorigen Paragraphen betrachteten Funktionen $\widehat{\varphi}$. Für ein $\widehat{\varphi}$ mit der Ecke $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ berechnet man leicht

$$\cos b = \frac{p(\mathfrak{y}+p)}{2}\mathfrak{x} + \frac{(q_p - p)(2\mathfrak{y}+p)}{6}\mathfrak{x}^2 + \frac{q_p(\mathfrak{y}+q)}{2}(1-\mathfrak{x}) - \frac{(q_p-p)(2\mathfrak{y}+q)}{6}(1-\mathfrak{x})^2,$$

$$\cos c = \frac{p_q(\mathfrak{y}+p)}{2}\mathfrak{x} + \frac{(q-p_q)(2\mathfrak{y}+p)}{6}\mathfrak{x}^2 + \frac{q(\mathfrak{y}+q)}{2}(1-\mathfrak{x}) - \frac{(q-p_q)(2\mathfrak{y}+q)}{6}(1-\mathfrak{x})^2,$$

wo p_q, q_p die im vorigen Paragraphen festgesetzte Bedeutung haben. Man findet ferner

$$\cos a = \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) = \frac{p p_q + 2pq + 2p_q q_p + q q_p}{6}.$$

Hieraus ergibt sich durch Umformung

$$\cos b + \cos c - \cos a - 1$$

$$= \frac{\{\mathfrak{y} - (q-p)\mathfrak{x} - p\} \cdot \{(p+p_q)(2-\mathfrak{x}) + (q+q_p)(1+\mathfrak{x})\} - K}{6}.$$

Dabei ist

$$K = (p_q - p)\{2(p+p_q) + (q+q_p)\} = -(q_p - q)\{(p+p_q) + 2(q+q_p)\}.$$

Der Ausdruck verschwindet in $(0, p_q)$ und $(1, q_p)$ wie es sein muß. Nun ist aber (s. § 8)

$$K = K \cdot \frac{\{\mathfrak{y} - (q-p)\mathfrak{x} - p\}\,\{\mathfrak{y} + p + q\}}{3 - p^2 - pq - q^2},$$

da der hinzugefügte Faktor infolge der Normierung gleich eins ist, und hierdurch läßt sich endlich folgende Gleichung gewinnen:

(*) $6(\cos b + \cos c - \cos a - 1)$

$$= -\frac{q + q_p - p - p_q}{q_p - p_q}\,\{\mathfrak{y} - (q-p)\mathfrak{x} - p\}\,\{\mathfrak{y} - (q_p - p_q)\mathfrak{x} - p_q\}.$$

Der Bruch, der vorausgeht, ist wesentlich positiv; denn aus den beiden Normierungsbedingungen

$$p^2 + pq_p + q_p^2 = 3,$$
$$q^2 + qp_q + p_q^2 = 3$$

folgt, daß $q - p$ und $q_p - p_q$ dasselbe Vorzeichen haben. Die Klammern aber stellen, gleich Null gesetzt, die Geraden vor, zwischen denen nach § 8 der Hyperbelbogen liegt, auf welchem $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ variiert. Unser Ausdruck ist also für alle $\widehat{\varphi}$ positiv mit Ausnahme der Grenzfunktionen $\overline{\varphi}_{\vartheta_0}$ und $\overline{\varphi}_{\vartheta_1}$, für die er verschwindet.

Es wird hier p von q verschieden vorausgesetzt. Ist jedoch

$$p = q, \quad \text{daher auch} \quad p_q = q_p,$$

so erkennt man ohne Rechnung, daß der Ausdruck

$$\cos b + \cos c - \cos a - 1$$

dann für sämtliche $\widehat{\varphi}$ verschwindet. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ variiert dann (§ 8) auf einer Strecke parallel zur x-Achse, und es ist leicht zu sehen, daß der Ausdruck sich dabei überhaupt nicht ändert, also, wie stets in den Endpunkten der Bahn von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, den Wert Null besitzt.

Eine allgemeine Funktion φ des Bereiches untersuchen wir nun genau in derselben Weise, wie es in den §§ 5 und 6 beim Beweis der

speziellen Sätze geschehen ist. Durch die analogen Schwerpunktsbetrachtungen finden wir, daß jedenfalls

$$M_y(\bar{\varphi}_{\vartheta_1}) < M_y(\varphi) < M_y(\bar{\varphi}_{\vartheta_0})$$

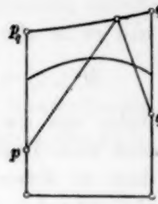


Fig. 16.

ist, woraus wieder die Existenz eines $\widehat{\varphi}$ folgt, für das

$$M_y(\varphi) = M_y(\widehat{\varphi}).$$

Dann aber muß wieder (vgl. Fig. 16)

$$M(\varphi) > M(\widehat{\varphi})$$

sein. Für jede lineare Funktion

$$\bar{\varphi} = \lambda + \mu x$$

ist aber

$$\int_0^1 \bar{\varphi} \cdot \varphi\, dx = \lambda M(\varphi) + \mu M_y(\varphi),$$

also

$$\int_0^1 \bar{\varphi}\varphi\, dx > \int_0^1 \bar{\varphi}\,\widehat{\varphi}\, dx.$$

Damit ist, wenn insbesondere

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{\frac{\vartheta_0+\vartheta_1}{2}} = \frac{\bar{\varphi}_{\vartheta_0} + \bar{\varphi}_{\vartheta_1}}{2\cos\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{2}}$$

genommen wird, der allgemeine Satz auf den schon erledigten Fall der $\widehat{\varphi}$ zurückgeführt. Auch erkennt man, daß von den Funktionen, die die Maximaldistanz $\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{2}$ von $\bar{\varphi}_{\frac{\vartheta_0+\vartheta_1}{2}}$ erreichen, in jedem Falle nur $\bar{\varphi}_{\vartheta_0}$ und φ_{ϑ_1} die Lage haben, die zur Erreichung der gegenseitigen Distanz $\vartheta_1 - \vartheta_0$ erforderlich ist.

Bemerkung. Die immerhin umständliche Rechnung, die zu Formel (*) führt, läßt sich mit Vorteil durch folgende geometrische Hilfsbetrachtung ersetzen. Wir entnehmen den Formeln für $\cos b$ und $\cos c$ ohne weiteres, daß

$$M(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \cos b + \cos c - \cos a - 1$$

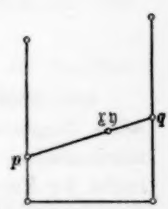


Fig. 17.

ein quadratischer Ausdruck in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ist, der $\mathfrak{y}^2$ gar nicht, $\mathfrak{x}^2$ aber mit dem Koeffizienten

$$\frac{1}{6}(p-q)(q+q_p-p-p_q)$$

enthält. Da ferner (Fig. 17), wo immer wir $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ auf der Geraden

$$\mathfrak{y} = (q-p)\mathfrak{x} + p$$

wählen mögen, immer dieselbe (hier *nicht* normierte) Funktion $\widehat{f} = \bar{f}$ ent-

steht, so hat längs dieser ganzen Geraden $M(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ denselben Wert; daher ist die Gerade eine Asymptote des Kegelschnitts

$$M(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0,$$

und es ist also identisch

$$M(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{1}{6}\{\mathfrak{y} - (q-p)\mathfrak{x} - p)\}\{(q + q_p - p - p_q)\mathfrak{x} + \beta\} - K,$$

wobei uns die Werte von β und K nicht weiter interessieren. Endlich muß diese Hyperbel durch die Punkte $(0, p_q)$ und $(1, q_p)$ hindurchgehen, denn zu diesen als Ecken gehören die Funktionen $\overline{\varphi}_{\vartheta_0}$ und $\overline{\varphi}_{\vartheta_1}$, wobei also entweder

$$b = 0, \quad c = a$$

oder

$$b = a, \quad c = 0$$

ist, also jedesmal

$$\cos b + \cos c - \cos a - 1 = 0.$$

Andrerseits ist für normierte $\widehat{\varphi}$ stets (§ 8)

$$N(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \{\mathfrak{y} - (q-p)\mathfrak{x} - p\}\{\mathfrak{y} + p + q\} - (3 - p^2 - pq - q^2) = 0,$$

also ist

$$M(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = M(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - \varrho \cdot N(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

mit beliebigem ϱ. Hier steht rechts das Polynom eines Büschels von Hyperbeln mit einer gemeinsamen Asymptote

$$\mathfrak{y} - (q-p)\mathfrak{x} - p = 0,$$

die außerdem alle durch $(0, p_q)$ und $(1, q_p)$ hindurchgehen. Wir nehmen ϱ so an, daß die Hyperbel zerfällt, sie muß dann in die Asymptote und die Verbindungslinie dieser Punkte, also

$$\mathfrak{y} - (q_p - p_q)\mathfrak{x} - p_q = 0$$

zerfallen. Wenn man noch auf den Koeffizienten von $\mathfrak{x}^2$ achtet, erhält man die Endformel des Textes.

Im Ausartungsfalle $p = q$ ist $\varrho = 0$.

§ 10.

Andere Randbedingungen.

Eine konvexe Kurve hat in jedem Punkte nach vorwärts und rückwärts Tangenten, die bis auf eine abzählbare Menge von Punkten zusammenfallen; alle Änderungen des Richtungskoeffizienten beim Durchlaufen der Kurve, stetige sowohl als sprungweise sind negativ (Abnahmen). Es sei $\varphi'(0)$ die (vorwärts genommene) Ableitung von $\varphi(x)$ für $x = 0$, $\varphi'(1)$ die (rückwärts genommene) für $x = 1$. Dann ist also jedenfalls

$$\varphi'(0) \geq \varphi'(1).$$

$\varphi'(0)$ kann $+\infty$ werden, aber nicht unter $-\sqrt{3}$ sinken, $\varphi'(1)$ kann $-\infty$ werden, aber nicht über $+\sqrt{3}$ gehen, wie die Betrachtung der Tangenten in den Endpunkten im Hinblick auf die Normierung sofort lehrt. Beschränkt man $\varphi'(0)$ willkürlich nach oben

$$\varphi'(0) \leqq s,$$

so zieht das, so lange $s \geqq \sqrt{3}$, keine neue Beschränkung der Randordinaten nach sich. Für $s < \sqrt{3}$ aber ergibt sich eine untere Schranke für $\varphi(0)$. Der Richtungskoeffizient von $\overline{\varphi}_\vartheta$ ist nämlich

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right) - 2 \sin\vartheta = 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \vartheta\right),$$

und, wenn ϑ gerade so bestimmt wird, daß er gleich s wird, so ist klar, daß $\varphi(0)$ nicht unter

$$2 \sin\vartheta$$

sinken kann. Ganz ebenso ergibt sich aus einer unteren Schranke $t > -\sqrt{3}$ für $\varphi'(1)$ eine untere solche für $\varphi(1)$ von der Größe $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \vartheta\right)$, wobei ϑ aus

$$2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \vartheta\right) = t$$

auszurechnen ist.

Es hat sich nun im vorigen Paragraphen ergeben, daß die maximalen sphärischen Distanzen innerhalb der betrachteten Funktionenmannigfaltigkeiten stets von den zugehörigen linearen Funktionen $\overline{\varphi}$ geliefert werden. Bedenkt man dies, so folgen aus dem oben Gesagten auf Grund von V) und Va) sofort die weiteren Sätze:

VI) *Die sphärische Distanz zweier konvexer Funktionen, die den Randbedingungen*

$$\varphi'(0) \leqq s = 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \vartheta_0\right), \quad \varphi'(1) \leqq t = 2\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \vartheta_1\right)$$

genügen (wobei $\vartheta_1 > \vartheta_0$ sein muß, und beide diese Winkel $\frac{\pi}{3}$ nicht übersteigen dürfen) *ist höchstens gleich* $\vartheta_1 - \vartheta_0$ *und erreicht diese Schranke bloß für die beiden Funktionen* $\overline{\varphi}_{\vartheta_0}$ *und* φ_{ϑ_1}.

VIa) *Die sphärische Distanz einer konvexen Funktion, die denselben Randbedingungen genügt, und der Funktion* $\overline{\varphi}_{\frac{\vartheta_0+\vartheta_1}{2}}$ *beträgt höchstens*

$$\frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2}.$$

Diesen Sätzen ordnen sich die Spezialsätze I) bis IIIa) noch bequemer unter als denen des vorigen Paragraphen.

Bemerkung zu der Blissschen Bedingung der Variationsrechnung im Fall variabler Endpunkte.

Von

Wilhelm Weinreich in Frankfurt a. M.

Bliss hat gezeigt*), daß für das Minimum (Maximum) eines Integrals eine neue Bedingung notwendig wird, falls beide Integrationsgrenzen veränderlich sind. Er spricht diese Bedingung nur für den *einen* Endpunkt aus, zeigt aber, daß sie (bei Unterdrückung des Gleichheitszeichens) hinreichend ist. Hieraus ist zu schließen, daß dann die entsprechende Bedingung für den *anderen* Endpunkt von selbst erfüllt ist. Es soll nun im folgenden aus dem Erfülltsein der Blissschen Bedingung für den einen Endpunkt bei einem regulären Problem *direkt* das Erfülltsein der analogen Bedingung für den anderen Endpunkt bewiesen werden.

Das Integral

$$(1) \qquad J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$$

nimmt unter den bekannten Stetigkeitsbedingungen einen Minimalwert an bei variablem x_1, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: die Kurve $C: y = f(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$(\mathrm{I}) \qquad F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

— C ist eine Extremale —;

$$(\mathrm{II}) \qquad F_{y'y'} > 0$$

entlang der Extremalen C und für beliebiges y' — das Problem ist regulär —;

$$(\mathrm{III}) \qquad F + (\bar{y}' - y') F_{y'} = 0$$

für $x = x_1$ — Transversalitätsbedingung; dabei beziehen sich y, y' auf C,

*) G. A. Bliss, Jacobi's Criterion when Both End-points are Variable, Math. Ann. 58 (1904), S. 70—80. Die Blissche Bezeichnung ist beibehalten.

$\bar{y}, \bar{y}'$ auf die Kurve D, auf der sich der Endpunkt 1 bewegt (s. Fig. 1); die Kurven sollen sich nicht berühren. Der „*Brennpunkt* d (Abszisse d_1) von D auf C“ liegt rechts von 2, oder

(IV) $$d_1 > x_2.$$

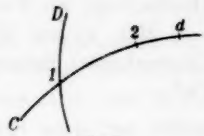


Fig. 1.

Dabei ist d_1 die nächste auf x_1 folgende Wurzel von $H(x_1, x) = 0$, H ein Integral der Jacobischen Differentialgleichung

(2) $$F_{y'y'} u'' + F'_{y'y'} u_' + (F'_{yy'} - F_{yy}) u = 0,$$

das für x_1 nicht verschwindet*). Die geometrische Bedeutung des Brennpunktes ist die, daß in ihm die Extremale C zum erstenmal (in der Richtung 1 2) die Enveloppe der Schar der Feldextremalen berührt, die von D transversal geschnitten werden.

Es sei hierbei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß nach der Ableitung dieser geometrischen Bedeutung nur das Stück der Enveloppe in Betracht kommt, das zur Umgebung des Punktes 1 von D gehört (vgl. auch das Beispiel).

Zu diesen vier Bedingungen tritt nach Bliss, wenn beide Endpunkte 1 *und* 2 variabel sind, die neue notwendige Bedingung für ein Maximum und Minimum (als Verallgemeinerung der von Erdmann**) für das Längenintegral gefundenen Bedingung)

(V) $$e_1 \leq d_1,$$

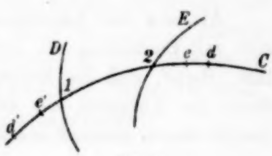


Fig. 2.

wo e_1 die nächste auf x_2 folgende Wurzel von $H(x_2, x) = 0$***) ist, oder: der „*kritische Punkt*†) e von E“ muß im Intervall $2\,d$ liegen. Mit (IV) zusammen läßt sich (V) folgendermaßen aussprechen: der Brennpunkt d von D darf nicht im Intervall: Anfangspunkt 1 kritischer Punkt e von E liegen. (Also Reihenfolge der Punkte: $12ed$, siehe Fig. 2).

Nun ist zu zeigen, daß auch die analogen Bedingungen für den Punkt 2:

---

*) O. Bolza, Lectures on the calculus of variations, Chicago 1904, S. 108.

**) G. Erdmann, Zur Untersuchung der zweiten Variation einfacher Integrale. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 23 (1878), S. 362.

***) $H(x_2, x)$ ist die $H(x_1, x)$ analoge Funktion für den Punkt 2.

†) Es scheint zweckmäßig, nicht wie Bliss die den beiden Wurzeln d_1 und e_1 entsprechenden Punkte d und e kritische Punkte zu nennen, obwohl ihre geometrische Bedeutung dieselbe ist; die von Bolza benutzte Bezeichnung: rechts- bzw. linksseitiger Brennpunkt (zum Punkt 1) ist wohl etwas umständlich; daher ist hier der der (nächsten) Wurzel von $H = 0$ entsprechende Punkt auf derselben Seite der Kurve wie das Bogenstück 12 mit *Brennpunkt*, der auf der anderen Seite als *kritischer Punkt* bezeichnet.

(IV′) $d_1' < x_1$,

(V′) $e_1' \geqq d_1'$ *)

(Reihenfolge der Punkte: $d_1' e_1' 1 2$) erfüllt sind.

$H(x_1, x)$ und $H(x_2, x)$ sind unabhängige Integrale von (2), wenn die (hinreichende) Bedingung

(V*) $e_1 < d_1$ **)

erfüllt ist; denn dann ist $H(x_1, e_1) \neq 0$, da ja erst d_1 die erste Wurzel von $H(x_1, x) = 0$ nach x_1 ist, während $H(x_2, e_1) = 0$ ist. Nach dem Sturmschen Satz:

Sind von

$$u'' + pu' + qu = 0$$

u_1 und u_2 Fundamentalintegrale, so werden, wenn p und q endlich und stetig sind, die Nullstellen von u_1 durch die von u_2 voneinander getrennt,

der auf (2), $H(x_1, x)$ und $H(x_2, x)$ anwendbar ist, folgt unmittelbar, daß die Wurzeln d_1', e_1 von $H(x_2, x) = 0$ durch e_1' voneinander getrennt sind, d. h. $e_1' > d_1'$ (V′*); da aber $e_1' < x_1$ als kritischer Punkt, so ist a fortiori $d_1' < x_1$ (IV′*).

Wird in (V) auch das Gleichheitszeichen zugelassen, so ist

$$H(x_1, x) = C \cdot H(x_2, x),$$

also ist auch $e_1' = d_1'$ (V′), und da wieder $e_1' < x_1$, so ist auch $d_1' < x_1$ (IV′).

Als aus der Anschauung leicht zu bestätigendes Musterbeispiel, das sich mit Benutzung der geometrischen Deutung fast ohne Rechnung lösen läßt, dafür, daß die Bedingungen (I) bis (IV) und (IV′) nicht genügen, diene die Aufgabe: *die kürzeste Linie zwischen einer Ellipse und einem umschriebenen konzentrischen Kreis zu finden:*

(1) $$J = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Die Extremalen sind Gerade, denn aus

(I) $$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

folgt $y' = \alpha$, also $y = \alpha x + \beta$. Das Problem ist regulär, da

(II) $$F_{y'y'} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + y'^2}\right)^3} > 0$$

für beliebiges endliches y'. Die Transversalitätsbedingungen (III) für beide Endpunkte gehen über in die Orthogonalitätsbedingungen

---

*) Wenn einer der Punkte nicht existiert, fällt die zugehörige Bedingung fort.

**) * bedeutet Unterdrückung des Gleichheitszeichens.

(III) $$\sqrt{1+y'^2} + (\bar{y}' - y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0,$$

oder

$$\bar{y}' y' = -1.$$

Da also die Extremalen auf D und E senkrecht stehen müssen, kommen nur die vier Abstände auf den (Verlängerungen der) Achsen der Ellipse in Betracht, von denen wir infolge der Symmetrie nur $A_1 A_2$ und $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ zu berücksichtigen brauchen (siehe Fig. 3).

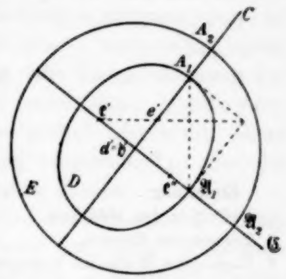


Fig. 3.

Die Enveloppe der Extremalen senkrecht zu E reduziert sich auf den Mittelpunkt des Kreises, die Enveloppe der zu D orthogonalen Extremalen ist die Ellipsenevolute, die von der Extremalen C (zu A_1) in e' und von $\mathfrak{C}$ (zu $\mathfrak{A}_1$) in $\mathfrak{c}'$ berührt wird. Da beide Extremalen nur je einen Punkt mit den Enveloppen gemeinsam haben, fällt ein Paar der Bedingungen weg; die Reihenfolge der Punkte ist für $A_1 A_2$: $d' e'$ 1 2, also wie (IV') verlangt, $A_1 A_2$ ist daher ein Minimum. Für $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$ aber ist die Reihenfolge $\mathfrak{c}' \mathfrak{d}'$ 1 2, weshalb weder ein Minimum noch ein Maximum existieren kann.

Nähme man hier $\mathfrak{c}''$, den überhaupt nächsten Berührungspunkt der Extremalen mit der *ganzen* Enveloppe, so würde dieser bei nicht zu flacher Ellipse zwischen Mittelpunkt und Nebenscheitel liegen, die notwendige Reihenfolge wäre also vorhanden und damit wären alle (hinreichenden) Bedingungen erfüllt, *obwohl tatsächlich kein Minimum existiert.*

Über die Lichtfortpflanzung in parallel-geschichteten Medien.

Von

W. Behrens in Göttingen.*)

Inhalt.

Einleitung.

Ein fundamentaler Satz der Optik der nicht absorbierenden Medien ist das sogenannte *Fermatsche Prinzip.***) Man spricht es gewöhnlich so aus: die Lichtenergie pflanzt sich längs der Extremalen eines wohl definierten Variationsproblems — wir wollen diese Kurven Fermatsche Kurven nennen — fort. Aber diese Form des Fermatschen Prinzipes bedarf noch

---

*) Diese Arbeit hat (von einigen unwesentlichen Änderungen abgesehen) im Dezember 1913 der Göttinger Philosophischen Fakultät als Habilitationsschrift vorgelegen.

**) Vgl. etwa P. Drude, Lehrbuch der Optik, 3. Aufl., Leipzig 1912, S. 9—13. Hier werden Prinzip des ausgezeichneten Lichtweges und Prinzip der schnellsten Ankunft unterschieden und das letztere als Fermatsches Prinzip bezeichnet; wir nennen das erstere so.

einer Ergänzung: es fragt sich, ob sich die Lichtenergie *restlos* oder nur *teilweise* längs dieser Kurven fortpflanzt. Wir unterscheiden deshalb das *Fermatsche Prinzip in seiner umfassenden Form:* die Lichtenergie pflanzt sich *restlos* längs der Fermatschen Kurven fort, und das *Fermatsche Prinzip in seiner beschränkten Form:* die Lichtenergie pflanzt sich nur *teilweise* längs der Fermatschen Kurven fort. Im letzten Fall gibt der Rest der Lichtenergie zur Bildung der sogenannten reflektierten Welle Veranlassung.

Wenn man als Grundlage der Optik eine Differentialgleichung des Lichtvektors, also etwa die Maxwellschen Gleichungen annimmt, dann ist *das Fermatsche Prinzip ein Theorem*; man hat also — wenn nötig, unter Zuhilfenahme von gewissen Voraussetzungen — die Energieströmung des elektromagnetischen Feldes zu untersuchen und festzustellen, ob diese einer der beiden Formen des Fermatschen Prinzipes genügt oder nicht. Diese Untersuchung ist bislang zwar als notwendig empfunden*), aber die Durchführung beschränkt sich auf die allerersten Ansätze.

Was geleistet ist, ist folgendes. Erstens wird das Fermatsche Prinzip in seiner *beschränkten* Form in jedem Lehrbuch der Optik**) *bewiesen* für den Fall, daß zwei Medien von verschiedenen elektromagnetischen Konstanten längs einer Ebene aneinander stoßen, und unter einfachen Annahmen über die auftretenden elektromagnetischen Erregungen (zeitlich und räumlich unendliche, ebene, harmonische Wellen). Außerdem spricht P. Drude in den eben zitierten Sätzen ohne Beweis die Ansicht aus, daß, wenn *überhaupt* für das inhomogene Medium eine der beiden Formen des Fermatschen Prinzipes gilt, es jedenfalls die beschränkte ist. Zweitens wird dagegen das Fermatsche Prinzip in seiner umfassenden Form in Arbeiten von P. Harzer, J. Boussinesq und H. Seeliger, die in dem von R. Straubel verfaßten Artikel „Dioptrik in Medien mit kontinuierlich veränderlichem Brechungsindex“ des „Handbuches der Physik“ von A. Winkelmann***) zitiert sind, unter verschiedenen, dort genauer angegebenen Voraussetzungen durch Näherungsverfahren ohne Restabschätzung *wahrscheinlich gemacht.*

---

*) P. Drude a. a. O. S. 292: „. ··· Der konsequente Weg (die optischen Eigenschaften eines inhomogenen Mediums zu untersuchen) ist, die (Maxwellschen) Differentialgleichungen ..., welche auch für inhomogene Medien gelten, zu integrieren, wobei ε als Funktion von x, y, z gegeben sein muß. Auf diesem Wege würden sich sowohl die Bahnen der Lichtstrahlen, als auch die Intensitäten der im Inneren eines inhomogenen Mediums notwendig auftretenden Reflexionen berechnen. Aber selbst bei den einfachsten Annahmen für ε ist dieser Weg kompliziert und ist bisher nicht betreten worden.“

**) Vgl. etwa P. Drude a. a. O. S. 265—270.

***) Bd. 6, 2. Aufl., Leipzig 1906, S. 485—502.

Der erste Teil der vorliegenden Arbeit beweist: das Fermatsche Prinzip in seiner beschränkten Form gilt im Falle eines parallel-geschichteten Mediums unter einfachen Annahmen über die auftretenden Erregungen und unter gewissen Einschränkungen über das Verhalten der elektromagnetischen Funktionen (Dielektrizitätskonstante*) und Permeabilität) im Unendlichen. Die Lichtenergie pflanzt sich also in einem solchen Medium nicht, wie die letztgenannten Arbeiten wahrscheinlich machen, restlos längs der Fermatschen Kurven fort, sondern es existiert in Übereinstimmung mit der Drudeschen Ansicht im allgemeinen stets eine reflektierte Welle. Die reflektierte Welle ist also nicht auf Medien beschränkt, deren elektromagnetische Funktionen Unstetigkeiten aufweisen oder nicht monogene analytische Funktionen sind, sie ist keine Ausnahme, sondern die Regel. Sie ist in unserem Falle sehr einfach konstituiert: sie pflanzt sich ebenfalls längs gewisser Fermatscher Kurven fort, und zwar längs derjenigen Kurven, die aus denen der durchgehenden Welle durch Spiegelung an einer zur Einfallsebene und zu den Ebenen von konstantem Brechungsindex senkrechten Ebene hervorgehen: es ist also genau so wie im Falle einer Unstetigkeitsebene.

Im *zweiten Teil der Arbeit* werden die quantitativen Verhältnisse näher betrachtet. Wir fassen zunächst die Intensitäten der durchgehenden und der reflektierten Welle als Funktionen der Frequenz der Strahlung auf: sie lassen sich — unter etwas modifizierten Voraussetzungen — in beständig konvergente Reihen nach Potenzen dieser Größe entwickeln und durch Reihen nach fallenden Potenzen derselben asymptotisch darstellen. Diese Tatsachen lehren, daß für *kleine* Frequenzen das Medium sich nahezu wie eine Unstetigkeitsebene verhält, daß dagegen für *große* Frequenzen die Intensität der reflektierten Welle verschwindet und zwar verhältnismäßig stark verschwindet; die Güte dieser Näherungen läßt sich ohne große Mühe abschätzen. Die beiden auf Seite 381 erwähnten speziellen Fälle erscheinen also hier als die beiden Ausläufer einer kontinuierlichen Reihe; außerdem verstehen wir hiernach die oben erwähnten Arbeiten, die die Gültigkeit des Fermatschen Prinzips in seiner umfassenden Form beweisen wollen: es sind Näherungen, die für große Frequenzen gelten. Zweitens fassen wir das Medium selbst als veränderlich auf und erhalten so Entwicklungen, die für genügend langsam veränderliche Medien konvergieren. Endlich führen wir zwei spezielle Fälle an, in denen sich für beliebige Frequenzen alle Einzelheiten des Problems mit Hilfe von Besselschen Funktionen darstellen lassen.

Der *Anlaß zu der vorliegenden Arbeit* waren die Arbeiten von D. Hil-

*) Man müßte natürlich eigentlich sagen „Dielektrizitätsfunktion".

bert über elementare Strahlungstheorie*), in der das Fermatsche Prinzip in seiner *umfassenden* Form zugrunde gelegt wird. Die Berechtigung dieses Vorgehens wird in der dort entwickelten rein phänomenologischen Theorie naturgemäß *axiomatisch gefordert*. Wollte man dagegen von den Maxwellschen Differentialgleichungen ausgehen, so müßte man nach dem vorigen die Berechtigung dieses Verfahrens besonders *beweisen*. Dabei wären zwei Standpunkte möglich. Entweder man geht darauf aus, die Formeln der Strahlungstheorie als *exakt gültig* zu beweisen: dann muß man zeigen, daß man bei der Betrachtung eines stationären nicht ins Unendliche reichenden Strahlungszustandes so tun kann, als ob die reflektierten Wellen nicht vorhanden wären. Oder man faßt die Formeln der Strahlungstheorie als nur für hohe Frequenzen oder langsam veränderliche Medien gültige *Näherungen* auf: dann hat man zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen das Fermatsche Prinzip in seiner allgemeinen Form eine brauchbare Näherung darstellt. Wie schon gesagt, machen die in dem Straubelschen Artikel zitierten Arbeiten das wahrscheinlich, und die vorliegende Arbeit beweist es im Fall des parallel-geschichteten Mediums unter einfachen Voraussetzungen über die auftretenden elektromagnetischen Erregungen.

1. Definition des Mediums.

Wir betrachten den einfachsten Fall eines elektromagnetisch inhomogenen Nichtleiters, *das parallel-geschichtete Medium*. Es mögen also Dielektrizitätskonstante ε und Permeabilität μ nur von einer Koordinate, etwa x abhängen, während die Leitfähigkeit σ verschwinden soll. Die letztere Annahme machen wir nur der Einfachheit halber; die im Folgenden entwickelten Methoden lassen sich ohne Schwierigkeit auf den Fall einer von Null verschiedenen, mit x veränderlichen Leitfähigkeit übertragen. Wir setzen nicht von vornherein $\mu = 1$, wie man es in der elektromagnetischen Lichttheorie gewöhnlich tut, um gewisse nützliche Symmetrien nicht zu stören. *Über die Funktionen ε und μ machen wir folgende*, durch die Physik nahe gelegten *Annahmen*. Sie sind für alle (reellen) x nicht kleiner als 1, ferner sind sie für alle x stetig und stückweise zweimal

*) Begründung der elementaren Strahlungstheorie, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1912, S. 773—789. Begründung der elementaren Strahlungstheorie, Phys. Zeitschr. 13 (1912), S. 1056—1064. Begründung der elementaren Strahlungstheorie, Jahresber. d. D. Math.-Ver. 22 (1913), S. 1—20. Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1913, S. 409—416. Bemerkungen zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie, Phys. Zeitschr. 14 (1913), S. 592—595. Zur Begründung der elementaren Strahlungstheorie (Dritte Mitteilung), Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1914, S. 275—298.

stetig differentiierbar, das heißt bis auf endlich viele Punkte, die Knickstellen von ε und μ, zweimal stetig differentiierbar, in diesen aber wenigstens vorwärts und rückwärts zweimal stetig differentiierbar. Wir müssen dann noch Voraussetzungen machen über das Verhalten dieser Funktionen im Unendlichen; da es uns nicht daran liegt, diese möglichst einzuschränken, so fordern wir Folgendes: die Funktionen

$$\alpha = \varepsilon^{-\frac{1}{4}} \quad \text{und} \quad \beta = \mu^{-\frac{1}{4}} \,{}^{*}),$$

die für alle x zwischen 0 und 1, die untere Grenze aus-, die obere eingeschlossen, veränderlich sind, sollen für $\lim x = +\infty$ (endliche) Grenzwerte besitzen (ε und μ besitzen dann auch Grenzwerte, die aber unendlich groß sein können), ferner sollen ihre ersten und zweiten Ableitungen dabei gegen Null konvergieren und absolut integrabel sein. Hieraus folgt insbesondere, daß jede der Funktionen $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ **) für die aus allen (reellen) x bestehende Punktmenge beschränkt ist. Die gleichen Voraussetzungen sollen gelten für den Grenzübergang $\lim x = -\infty$. Diese Bedingungen schränken die Funktionen ε und μ, vom physikalischen Standpunkte aus gesehen, nur wenig ein.

Die elektromagnetische Theorie lehrt, daß in einem Medium von konstantem ε und μ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit q des Lichtes gleich $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ist, wo c die Lichtgeschwindigkeit im Äther ($\varepsilon = \mu = 1$) bedeutet. Den Quotienten $n = \frac{c}{q} = \sqrt{\varepsilon\mu}$ bezeichnet man als Brechungsindex. Wir wollen diese Bezeichnung auch von Anfang an für unser inhomogenes Medium benutzen: daß diese Größe $n = n(x)$ hier ihren Namen mit Recht trägt, werden wir später beweisen.

2. Fermatsche Kurven.

Wir wollen auch für unser Medium sofort die *Fermatschen Kurven definieren.* Wir beschränken uns in Rücksicht auf die späteren Anwendungen auf diejenigen Kurven, die in der xy-Ebene (oder einer dazu parallelen Ebene) verlaufen. Sie sind definiert dadurch, daß für sie das Integral

$$\int_a^b \frac{ds}{q} = \frac{1}{c}\int_a^b \sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

bei vorgegebenen Grenzen a und b ein Extremum wird. Dafür ist notwendig und hinreichend das Bestehen der Lagrangeschen Gleichung

*) Unter einer gebrochenen Potenz und einer Wurzel aus einer positiven Zahl ist im folgenden stets deren absoluter Betrag verstanden.

**) Striche bedeuten Ableitungen nach x.

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right)=0.$$

Wir denken uns die Kurve mit einem Durchlaufungssinne versehen und bezeichnen den Winkel ihrer Tangente gegen die x-Achse mit ϑ:

$$-\frac{\pi}{2}<\vartheta\leqq+\frac{3\pi}{2},$$

dann lautet diese Gleichung

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\vartheta)=0,$$

also

$$\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\vartheta=m$$

oder

$$\sin\vartheta=\frac{m}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{m}{n},$$

wo m eine Konstante ist. Wir setzen abkürzend

$$l=\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\vartheta,\quad l^2=\varepsilon\mu-m^2.$$

Die Kurve selbst erhalten wir daraus durch Integration von

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{l},$$

sie ist also gegeben durch

$$y=\int_{x_0}^{x}\frac{m}{l}\,dx.$$

Alle zu einem bestimmten Werte m gehörigen Kurven entstehen also aus *einer* durch eine Verschiebung parallel zur y-Achse. Die Funktion $\frac{1}{n^2}$ ist beschränkt: ihre obere Grenze sei G. Wir werden dann im folgenden nur solche Parameterwerte m betrachten, für die die untere Grenze von $1-\frac{m^2}{n^2}$, also die Zahl $1-m^2G$ größer als Null ist. Für jeden solchen Wert

$$m^2<\frac{1}{G}$$

überdeckt die Fermatsche Kurve die ganze x-Achse einfach, und der Winkel ϑ der Kurve gegen die x-Achse liegt immer außerhalb eines gewissen Winkelraumes, der die positive und negative y-Richtung einschließt. Diese Beschränkung kommt auf nichts weiter hinaus, als daß wir die Erscheinung der sogenannten totalen Reflexion ausschließen. Auch das geschieht nur, damit wir einen bestimmten und zwar den interessantesten Fall vor Augen haben, nicht etwa weil die im Folgenden entwickelten Methoden nicht auch dafür ausreichten. Die Fermatschen Kurven im Falle des *homogenen* Mediums sind gerade Linien.

Zwei Fermatsche Kurven, die zu demselben Parameterwert m gehören, deren l aber entgegengesetzt gleich sind, nennen wir *konjugiert*. Die eine kann man sich stets aus der anderen durch Spiegelung an einer durch die x Achse gehenden, zur xy Ebene senkrechten Ebene und durch Umkehrung des Durchlaufungssinnes hervorgegangen denken.

3. Homogene Welle im homogenen Medium.

Um eine Grundlage für das Folgende zu gewinnen, sagen wir zunächst einige Worte über eine zeitlich und räumlich unendliche, ebene, harmonische Welle $\mathfrak{F}$ (wir sagen kurz „homogene Welle“) in einem homogenen Medium. Das ist eine bestimmte sehr einfache Lösung der Maxwellschen partiellen Differentialgleichungen der Elektrodynamik*)

$$(1)\qquad \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} - c \operatorname{curl} \mathfrak{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} &= 0, \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + c \operatorname{curl} \mathfrak{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} &= 0 \end{aligned}$$

in dem Falle, daß ε und μ konstant sind. Nehmen wir — was wir durch Drehung des Koordinatensystems um die x-Achse immer erreichen können — an, daß die Fortpflanzungsrichtung dieser Welle $\mathfrak{F}$ der xy-Ebene (der „Einfallsebene“) parallel ist, so kann man sie stets zerlegen in zwei gleichgerichtete homogene Wellen $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_h$, deren elektrischer bzw. magnetischer Vektor senkrecht zur Einfallsebene ist, die, wie man sagt, in bzw. senkrecht zu der Einfallsebene polarisiert sind. Die Lösung $\mathfrak{F}_e$ lautet

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= 0, & \mathfrak{H}_x &= +\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin\vartheta\, F, \\ \mathfrak{E}_y &= 0, & \mathfrak{H}_y &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\vartheta\, F, \\ \mathfrak{E}_z &= F, & \mathfrak{H}_z &= 0. \end{aligned}$$

Dabei ist abkürzend gesetzt

$$F = A \cos \nu (\xi + \eta - t - \omega_0),$$

oder wenn wir

$$A \cos \nu (\xi - \omega_0) = B, \quad A \sin \nu (\xi - \omega_0) = C$$

setzen,

$$F = B \cos \nu (\eta - t) - C \sin \nu (\eta - t),$$

*) Bezeichnungen nach M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. 1, 4. Aufl., Leipzig und Berlin 1912.

und ξ, η sind definiert durch die Gleichungen

$$\xi = \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\vartheta\cdot x,\quad \eta = \frac{1}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\sin\vartheta\cdot y.$$

Unter Benutzung der schon eingeführten Bezeichnungen l und m

$$l = \sqrt{\varepsilon\mu}\cos\vartheta,\quad m = \sqrt{\varepsilon\mu}\sin\vartheta$$

können wir sie auch so schreiben:

$$\xi = \frac{1}{c}\,lx,\quad \eta = \frac{1}{c}\,my.$$

Die Konstante A ist maßgebend für die „Intensität J" der Welle: darunter versteht man das Doppelte des durchschnittlichen Energiestromes, das heißt das doppelte zeitliche Mittel des Betrages des Strahlvektors

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}], \tag{4}$$

also die Größe

$$\frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,A^2 = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(B^2 + C^2).$$

Als „Phase" der Welle für ein bestimmtes x, y, z, t bezeichnet man den Winkel, dessen Kosinus gleich der Wurzel aus dem Quotienten des Betrages des entsprechenden Strahlvektors und der Intensität der Welle ist, also die Größe

$$\pm\,\nu(\xi + \eta - t - \omega_0) + 2k\pi.$$

Die Konstante ϑ ist maßgebend für die „Richtung" der Welle, ϑ ist ihr „Einfallswinkel", das heißt der Winkel des Strahlvektors gegen die x-Achse, den wir übrigens ohne Beschränkung der Allgemeinheit als zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, die Grenzen eingeschlossen, gelegen annehmen können*). ν ist die „Frequenz" der Welle, die Vermehrung der Phase für ein bestimmtes x, y in der Zeiteinheit.

Die zweite Fundamentallösung $\mathfrak{F}_h$ ergibt sich aus $\mathfrak{F}_e$ einfach dadurch, daß wir ε durch μ, μ durch ε, $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$ durch $-\mathfrak{E}$ ersetzen. Um diese einfache Beziehung zwischen den beiden Fundamentallösungen zu haben, haben wir uns von der Annahme $\mu = 1$ freigehalten.

Endlich bemerken wir noch, daß sich nicht nur die Feldvektoren von $\mathfrak{F}$, sondern auch der Energieskalar

$$W = \frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\,dv \tag{5}$$

*) Durch eine Umklappung des Koordinatensystems (um die x-, y- bzw. z-Achse, je nachdem ϑ im vierten, zweiten oder dritten Quadranten liegt) läßt sich das immer erreichen.

und der Strahlvektor $\mathfrak{S}$ linear aus den entsprechenden Größen der Felder $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_h$ zusammensetzen, und zwar ist, wenn

$$\mathfrak{F} = c_e \mathfrak{F}_e + c_h \mathfrak{F}_h$$

ist:

$$W = c_e^2 W_e + c_h^2 W_h,$$

$$\mathfrak{S} = c_e^2 \mathfrak{S}_e + c_h^2 \mathfrak{S}_h.$$

4. Homogene Welle im parallel-geschichteten Medium.

Wir nehmen nun ε und μ als *Funktionen* von x an und beschäftigen uns zunächst mit der Frage, *was haben wir dann unter einer homogenen Welle zu verstehen*, oder genauer gesagt, unter einer homogenen Welle $\mathfrak{F}_e$, die in der xy-Ebene einfällt und in der xy-Ebene polarisiert ist? Die entsprechende senkrecht zur xy-Ebene polarisierte Welle $\mathfrak{F}_h$ erhalten wir einfach dadurch, daß wir

(6) ε durch μ, μ durch ε, $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$ durch $-\mathfrak{E}$

ersetzen.

Diese Frage läßt sich natürlich nur durch eine *Definition* beantworten: ebenso wie im Falle des homogenen Mediums kann nur eine *Definition* den Begriff der homogenen Welle feststellen. Wir werden aber selbstverständlich danach streben, diese Definition so natürlich und ungezwungen wie möglich zu gestalten. Da liegt nun Folgendes sehr nahe. Wir schneiden das Feld $\mathfrak{F}_e$ mit einer beliebigen Ebene $x = x_0$ und betrachten es nur für die Punkte dieser Ebene; wir denken uns ferner das inhomogene Medium weg und durch ein homogenes Medium von den elektromagnetischen Konstanten $\varepsilon(x_0)$ und $\mu(x_0)$ ersetzt und fragen nun: gibt es in diesem homogenen Medium eine in der xy-Ebene einfallende, senkrecht zur xy-Ebene polarisierte Welle $\bar{\mathfrak{F}}_e$, die für alle Punkte der Ebene $x = x_0$ zu allen Zeiten mit $\mathfrak{F}_e$ übereinstimmt? Dann und nur dann, wenn das der Fall ist, und zwar der Fall ist für alle x_0, wollen wir sagen, das Feld $\mathfrak{F}_e$ ist eine homogene Welle. Dieser Begriff ist, wie man sofort sieht, wirklich eine Erweiterung des Begriffes der homogenen Welle im homogenen Medium.

Zur Rechtfertigung dieser Definition diene noch folgendes. Wir betrachten wieder das Feld $\mathfrak{F}_e$ und denken uns das inhomogene Medium rechts von $x = x_0$ durch ein homogenes Medium von den Konstanten $\varepsilon(x_0)$ und $\mu(x_0)$ ersetzt und das Feld $\mathfrak{F}_e$ links festgehalten. Wir werden das Feld $\mathfrak{F}_e$ doch nur dann als homogene Welle bezeichnen wollen, wenn man an das linke Stück von $\mathfrak{F}_e$ nach rechts hin eine homogene Welle $\bar{\mathfrak{F}}_e$ stetig ansetzen kann. Diese Forderung ist aber genau mit unserer Definition identisch.

Es ist sehr leicht, *diese Definition*, die für das Folgende natürlich grundlegend ist, *analytisch* zu *formulieren*. Ein Feld $\mathfrak{F}_e$ ist eine homogene Welle von den obigen Eigenschaften, wenn es sich auf die Form (3), also auf die Form

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= 0, & \mathfrak{H}_x &= \frac{m}{\mu} F, \\
\mathfrak{E}_y &= 0, & \mathfrak{H}_y &= -\frac{l}{\mu} F, \\
\mathfrak{E}_z &= F, & \mathfrak{H}_z &= 0,
\end{aligned}
$$

$$F = B \cos \nu \left(\frac{m}{c} y - t\right) - C \sin \nu \left(\frac{m}{c} y - t\right),$$

$$l = \sqrt{\varepsilon \mu} \cos \vartheta, \quad m = \sqrt{\varepsilon \mu} \sin \vartheta$$

bringen läßt, wo ε, μ, ϑ, l, m, B, C Funktionen von x sind.

5. Eine homogene Welle und die Maxwellschen Gleichungen.

Eine homogene Welle im homogenen Medium genügt den Maxwellschen Gleichungen; wir werden also fragen, ob das auch für das inhomogene Medium gilt. Wir wollen die Antwort vorweg nehmen: die Frage ist im allgemeinen zu verneinen. Wir wollen das nun im einzelnen untersuchen.

Wir setzen also die Maxwellschen Gleichungen für das Feld $\mathfrak{F}_e$ (7) an und finden durch einfache Differentiation, daß sie dem folgenden Gleichungssystem äquivalent sind:

$$
\begin{aligned}
D \equiv \left(\frac{\nu}{c} l C + \frac{dB}{dx} - \frac{\nu}{c} \frac{dm}{dx} y C\right) \cos \nu \left(\frac{m}{c} y - t\right) \\
+ \left(\frac{\nu}{c} l B - \frac{dC}{dx} - \frac{\nu}{c} \frac{dm}{dx}\right) \sin \nu \left(\frac{m}{c} y - t\right) = 0,
\end{aligned}
$$

$$\frac{l}{\mu} D + \frac{d\frac{l}{\mu}}{dx} \mathfrak{E}_z = 0,$$

$$m D + \frac{dm}{dx} \mathfrak{E}_z = 0.$$

Der Fall $\mathfrak{E}_z = 0$ kommt nicht in Betracht, weil dann $\mathfrak{F}_e$ identisch verschwindet; also muß $\frac{dm}{dx}$ verschwinden, das heißt, m muß gleich einer Konstanten c_e sein. Wenn also eine Welle $\mathfrak{F}_e$ den Maxwellschen Gleichungen genügt, dann muß sie sich auf einer Fermatschen Kurve fortpflanzen.

Aber noch mehr: es muß aus demselben Grunde $\frac{d\frac{l}{\mu}}{dx}$ verschwinden,

also $\frac{l}{\mu}$ muß gleich einer zweiten Konstante d_e sein. Aus den beiden Gleichungen

$$m = c_e, \quad l = d_e \mu$$

können wir aber wegen

$$l^2 + m^2 = \varepsilon \mu$$

l und m eliminieren und erhalten:

$$c_e^2 + d_e^2 \mu^2 = \varepsilon \mu. \tag{8}$$

Wir sehen also: die Fortpflanzung einer Welle $\mathfrak{F}_l$ ist nicht in jedem Medium möglich: es muß zwei Konstanten c_e und d_e geben, sodaß zwischen den Funktionen ε und μ die Gleichung (8) besteht. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann gibt es vier Fermatsche Kurven, die der Bedingung $\frac{d\frac{l}{\mu}}{dx} = 0$ genügen. Sie sind definiert durch

$$m = \pm c_e, \quad l = \pm d_e \mu.$$

Die Kombinationen (+ +) und (— —) unterscheiden sich nur durch den Durchlaufungssinn, ebenso die Kombinationen (+ —) und (— +); die Kombinationen (+ +) und (+ —) gehen dagegen auseinander durch Spiegelung an der xz-Ebene hervor, ebenso die Kombinationen (— +) und (— —). Mehr als vier Kurven $\frac{d\frac{l}{\mu}}{dx} = 0$ gibt es nur im homogenen Medium: ist nämlich

$$\begin{aligned} c_e^2 + d_e^2 \mu^2 &= \varepsilon \mu, \\ c_e'^2 + d_e'^2 \mu^2 &= \varepsilon \mu, \end{aligned} \tag{9}$$

so folgt:

$$(c_e^2 - c_e'^2) + (d_e^2 - d_e'^2)\mu^2 = 0,$$

$$\mu^2 = -\frac{c_e^2 - c_e'^2}{d_e^2 - d_e'^2},$$

also $\mu = \text{const.}$, und aus jeder der beiden Gleichungen (9) folgt dann $\varepsilon = \text{const.}$ Wir nennen solche Fermatschen Kurven $\frac{d\frac{l}{\mu}}{dx} = 0$ *ausgezeichnete Fermatsche Kurven*, und zwar, weil der elektrische Vektor dabei bevorzugt ist, ausgezeichnete Fermatsche Kurven *erster Art*. Entsprechend definieren wir, von einer Welle $\mathfrak{F}_h$ ausgehend, die ausgezeichneten Fermatschen Kurven *zweiter Art*; die Bedingungen lauten hier:

$$m = \pm c_h, \quad l = \pm d_h \mu,$$

$$c_h^2 + d_h^2 \varepsilon^2 = \varepsilon \mu.$$

Wir haben also gefunden: *in jedem nichthomogenen Medium gibt es entweder keine oder vier ausgezeichnete Fermatsche Kurven erster Art, und entweder keine oder vier ausgezeichnete Fermatsche Kurven zweiter Art; notwendig dafür, daß eine Welle $\mathfrak{F}_e$ oder $\mathfrak{F}_h$ sich in dem Medium fortpflanzen kann, ist, daß sie sich längs einer ausgezeichneten Fermatschen Kurve erster oder zweiter Art fortpflanzt.*

Wir suchen nun *alle Wellen* $\mathfrak{F}_e$ auf, *die sich auf einer solchen ausgezeichneten Fermatschen Kurve erster Art fortpflanzen.* Die Bedingung lautet einfach:

$$D = 0.$$

Diese Gleichung spaltet sich in zwei

$$\frac{\nu}{c} l C + \frac{dB}{dx} = 0,$$

$$\frac{\nu}{c} l B - \frac{dC}{dx} = 0.$$

Wir schreiben sie so:

$$\frac{\nu}{c}\frac{l}{\mu}\mu C + \frac{dB}{dx} = 0,$$

$$\frac{\nu}{c}\frac{l}{\mu}\mu B - \frac{dC}{dx} = 0$$

und erhalten daraus durch Elimination von C und B für B und C die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d\log\mu}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{\nu^2}{c^2} l^2 f = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichung wird sehr einfach, wenn wir eine neue unabhängige Veränderliche ξ einführen (sie entspricht genau der im Falle des homogenen Mediums benutzten Größe ξ)

$$\xi = \frac{1}{c}\int_0^x l\,dx. \tag{11}$$

Wir wollen dabei die schon früher gemachte Voraussetzung einführen, daß die untere Grenze von $1 - \frac{m^2}{\varepsilon\mu}$ größer als Null ist; dann folgt, da $\varepsilon \geqq 1$, $\mu \geqq 1$ ist, daß ξ gleichzeitig mit x wächst und abnimmt, und daß $\lim\limits_{x=+\infty} \xi = +\infty$ und $\lim\limits_{x=-\infty} \xi = +\infty$ ist, daß also auch x für alle ξ eine eindeutige, stetig differentiierbare Funktion von ξ ist. Die obige Gleichung erhält dadurch folgende Form:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \nu^2 f = 0.$$

B und C sind also einfach lineare Kombinationen von $\cos\nu\xi$ und $\sin\nu\xi$.

Wir können also die allgemeinste Welle $\mathfrak{F}_\varepsilon$ nun vollständig hinschreiben: sie hat die Form (7), wo

$$B = A \cos \nu (\xi + \omega_0), \quad C = A \sin \nu (\xi + \omega_0) \tag{12}$$

ist; A und ω_0 sind dabei Konstanten.

Wir wollen noch einige Bemerkungen über ausgezeichnete Fermatsche Kurven (einer bestimmten, etwa der ersten Art) machen. Besonders einfach sind diese Kurven, wenn ε und μ einander proportional sind, dann fallen nämlich je zwei zusammen in den im einen oder anderen Sinne durchlaufenen, senkrecht einfallenden Strahl. In der Optik setzt man gewöhnlich $\mu = 1$: dann gibt es, wie man leicht sieht, bei stetig veränderlichem ε überhaupt keine ausgezeichneten Fermatschen Kurven. Dagegen gibt es bei unstetigem ε ausgezeichnete Fermatsche Kurven, allerdings nicht erster, aber zweiter Art. Denken wir uns also den Fall, wo längs einer Ebene $x = 0$ zwei Medien von den Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 aneinanderstoßen, dann lauten die Bedingungen:

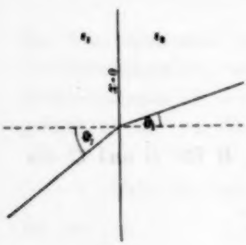


Fig. 1.

$$\sqrt{\varepsilon_1} \sin \vartheta_1 = \sqrt{\varepsilon_2} \sin \vartheta_2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \cos \vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \cos \vartheta_2.$$

Durch Elimination von ϑ_2 findet man hieraus:

$$\varepsilon_1^2 \sin^2 \vartheta_1 + \varepsilon_2^2 \cos^2 \vartheta_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

oder indem man $\operatorname{tg} \vartheta_1$ einführt:

$$\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_1 + \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_1),$$

also:

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_1 = \frac{-\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = n^2.$$

Für diese Strahlen ist also der absolute Betrag des Tangens des Einfallswinkels gleich dem relativen Brechungsindex des zweiten Mediums gegen das erste. Dieser Winkel ist aus der Optik her wohl bekannt, es ist der sogenannte Polarisationswinkel: es wird dort gezeigt, daß ein Strahl, der unter ihm auffällt und senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, ohne Reflexion durch die Unstetigkeitsebene hindurchgeht. Das, was wir also aus Stetigkeitsgründen von vornherein erwarten, trifft wirklich zu, und *wir können die auf ausgezeichneten Fermatschen Kurven sich fortpflanzenden Wellen als Verallgemeinerung einer wohlbekannten Erscheinung der elementaren Optik (Nichtreflexion eines senkrecht zur Einfallsebene polarisierten, unter den Polarisationswinkel auffallenden Strahles) auffassen.*

6. Zwei homogene Wellen und die Maxwellschen Gleichungen.

Wir betrachten nun *eine beliebige Welle* $\mathfrak{F}_\varepsilon$, die sich nicht auf einer ausgezeichneten Fermatschen Kurve fortpflanzt, die also sicher nicht den

Maxwellschen Gleichungen genügt. Da erweist sich *folgende Fragestellung* als fruchtbar: läßt sich die Welle $\mathfrak{F}_e'$ durch eine zweite Welle $\mathfrak{F}_e''$ so ergänzen, daß das ganze Feld

$$\mathfrak{F}_e = \mathfrak{F}_e' + \mathfrak{F}_e''$$

den Maxwellschen Gleichungen genügt? Dabei schließen wir natürlich die triviale Ergänzung $\mathfrak{F}_e'' = -\mathfrak{F}_e'$ stets aus.

Wir beschäftigen uns zunächst damit, *notwendige Bedingungen* für die Möglichkeit einer solchen Ergänzung aufzustellen. Das Ergebnis wird lauten: notwendig dafür ist, daß $\mathfrak{F}_e'$ sich auf einer Fermatschen Kurve, $\mathfrak{F}_e''$ auf der konjugierten Fermatschen Kurve fortpflanzt.*) Analytisch formuliert lauten diese Bedingungen:

$$\frac{dm'}{dx} = 0, \quad \frac{dm''}{dx} = 0,$$

$$m' = m'', \quad l' = -l''.$$

Um diese Behauptung zu beweisen, gehen wir mit dem Ansatz (7) zunächst in die Gleichung

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} = 0$$

ein. Wir erhalten dadurch:

$$\left(-\frac{\nu}{c} lC - \frac{dB}{dx} + \frac{\nu}{c}\frac{dm}{dx} yC\right)\cos\nu\left(\frac{m}{c}y - t\right)$$
$$+\left(-\frac{\nu}{c} lB + \frac{dC}{dx} + \frac{\nu}{c}\frac{dm}{dx} yB\right)\sin\nu\left(\frac{m}{c}y - t\right)\Bigg|^{('+'')} = 0.$$

Dabei soll das Zeichen $|^{('+'')}$ andeuten, daß in den Ausdruck links zunächst die der Welle $\mathfrak{F}_e'$ entsprechenden Größen l', m', B', C' und dann die Größen l'', m'', B'', C'' einzusetzen sind, und daß die so entstehenden beiden Ausdrücke zu addieren sind.

Wir halten nun x und t fest und lassen y sich ändern: die obige Gleichung hat dann die Form:

$$P(y) + y\,Q(y) = 0,$$

wo

$$P(y) = \sum\nolimits^k p_k e^{i\alpha_k y},$$

$$Q(y) = \sum\nolimits^k q_k e^{i\alpha_k y}$$

ist. Dabei sind die α_k reell: wir können ferner annehmen, daß $\alpha_k > \alpha_{k+1}$ ist. Wir schließen hieraus, daß $P(y)$ und $Q(y)$ identisch in y verschwinden:

---

*) Zeichnen wir $\mathfrak{H}$ statt $\mathfrak{E}$ aus, so gilt derselbe Satz, weil die Fermatschen Kurven gegenüber den Vertauschungen (6) invariant sind.

es läßt sich nämlich sehr leicht nachweisen, daß alle p_k und q_k identisch verschwinden. Zu dem Zwecke multiplizieren wir die Gleichung mit $e^{-i\alpha_1 y}$ und lassen y dann auf der negativen imaginären Achse ins Unendliche rücken. $\frac{P(y)}{y}$ hat dann den Grenzwert Null, $Q(y)$ den Grenzwert q_1, also ist $q_1 = 0$. Daraus folgt aber, daß $y\,Q(y)$ dabei den Grenzwert Null hat, anderseits hat $P(y)$ dabei den Grenzwert p_1, also ist auch $p_1 = 0$. In derselben Weise schließt man weiter $q_2 = p_2 = 0$ usw.

Wir beschäftigen uns nun mit der Gleichung $Q(y) = 0$: vom Faktor $\frac{v}{c}$ abgesehen, lautet sie:

$$\frac{d\,m}{d\,x}\left(C\cos\nu\left(\frac{m}{c}y - t\right) + B\sin\nu\left(\frac{m}{c}y - t\right)\right)\Big|^{(\prime+\prime\prime)} = 0. \tag{13}$$

Wir differentiieren diese Gleichung nach y und t und erhalten, wieder vom Faktor $\frac{v}{c}$ abgesehen:

$$m\frac{d\,m}{d\,x}\left(C\cos\nu\left(\frac{m}{c}y - t\right) + B'\sin\nu\left(\frac{m}{c}y - t\right)\right)\Big|^{(\prime+\prime\prime)} = 0. \tag{14}$$

Wir zeigen nun zuerst, die beiden Größen

$$\begin{aligned} &\frac{d\,m'}{d\,x}\left(C'\cos\nu\left(\frac{m'}{c}y - t\right) + B'\sin\nu\left(\frac{m'}{c}y - t\right)\right),\\ &\frac{d\,m''}{d\,x}\left(C''\cos\nu\left(\frac{m''}{c}y - t\right) + B''\cos\nu\left(\frac{m''}{c}y - t\right)\right)\end{aligned} \tag{15}$$

sind identisch gleich Null. Nehmen wir nämlich an, mindestens eine von ihnen verschwinde nicht identisch, dann folgt aus den Gleichungen (13) und (14)

$$m' = m'' = m.$$

Die Gleichung (13) spaltet sich dann in die beiden folgenden:

$$\frac{d\,m}{d\,x}(C' + C'') = 0, \quad \frac{d\,m}{d\,x}(B' + B'') = 0.$$

Es folgt also, da $\frac{d\,m}{d\,x}$ wegen des vorausgesetzten Nichtverschwindens mindestens einer Größe (15) nicht verschwinden kann:

$$C' + C'' = 0, \quad B + B'' = 0.$$

Das bedeutet aber:

$$\mathfrak{E}_z' + \mathfrak{E}_z'' = 0.$$

Der gesamte elektrische Vektor $\mathfrak{E}$ ist also identisch gleich Null. Nach der zweiten Maxwellschen Gleichung ist dann $\mathfrak{H}$ von t unabhängig: nach dem Ansatz (7) für $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$ ist das aber nur möglich, wenn $\mathfrak{H} = 0$ ist. Es ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{H} = 0$: es liegt also der triviale Fall $\mathfrak{F}_e'' = -\mathfrak{F}_e'$ vor, den wir von vornherein ausgeschlossen haben. Die beiden Größen (15) verschwinden also wirklich identisch.

Da die Welle $\mathfrak{F}_e'$ nicht identisch verschwindet, also mindestens eine der beiden Größen C' und B' nicht identisch gleich Null ist, schließen wir aus der Gleichung

$$\frac{dm'}{dx}\left(C'\cos\nu\left(\frac{m'}{c}y-t\right)+B'\sin\nu\left(\frac{m'}{c}y-t\right)\right)=0$$

das Bestehen der Gleichung:

$$\frac{dm'}{dx}=0,\quad m'=\text{const.}$$

Die Welle $\mathfrak{F}_e'$ pflanzt sich also längs einer Fermatschen Kurve fort. Aus der Gleichung:

$$\frac{dm''}{dx}\left(C''\cos\nu\left(\frac{m''}{c}y-t\right)+B''\sin\nu\left(\frac{m''}{c}y-t\right)\right)=0$$

folgt weiter entweder:

$$\frac{dm''}{dx}=0,\qquad m''=\text{const.}$$

oder:

$$C''=B''=0.$$

Der letzte Fall ist aber ausgeschlossen, weil dann $\mathfrak{F}_e''$ gleich Null wäre, $\mathfrak{F}_e'$ also allein den Maxwellschen Gleichungen genügte; es war aber das Gegenteil vorausgesetzt. Also pflanzt sich auch die Welle $\mathfrak{F}_e''$ längs einer Fermatschen Kurve fort.

Unser nächstes Ziel ist nun, den Zusammenhang zwischen den Größen l', m' und den Größen l'', m'' zu ergründen. Zu dem Zwecke ziehen wir nun sämtliche Maxwellschen Gleichungen heran. Man überzeugt sich durch einfaches Differentiieren davon, daß sie folgendem Gleichungssystem äquivalent sind:

$$\begin{aligned}
D' + D'' &= 0,\\
m'D' + m''D'' &= 0,\\
\frac{l'}{\mu}D' + \frac{d\frac{l'}{\mu}}{dx}\mathfrak{E}_z' + \frac{l''}{\mu}D'' + \frac{d\frac{l''}{\mu}}{dx}\mathfrak{E}_z'' &= 0;
\end{aligned}$$

dabei ist wieder abkürzend gesetzt:

$$D\equiv\left(\frac{\nu}{c}lC+\frac{dB}{dx}\right)\cos\nu\left(\frac{m}{c}y-t\right)+\left(\frac{\nu}{c}lB-\frac{dC}{dx}\right)\sin\nu\left(\frac{m}{c}y-t\right).$$

Hieraus folgt nun leicht $m'=m''$. Wäre nämlich $m'\neq m''$, dann wäre

$$D'=0,\quad D''=0$$

und

$$\frac{d\frac{l'}{\mu}}{dx}\mathfrak{E}_z'+\frac{d\frac{l''}{\mu}}{dx}\mathfrak{E}_z''=0.$$

Die letzte Gleichung würde sich aber wieder in zwei spalten, wie man leicht sieht, wenn man sie nach y und nach z differentiiert, nämlich in

$$\frac{d\frac{l'}{\mu}}{dx}\mathfrak{E}_s' = 0, \qquad \frac{d\frac{l''}{\mu}}{dx}\mathfrak{E}_s'' = 0.$$

Da $\mathfrak{E}_s' \neq 0$, so folgte $\frac{d\frac{l'}{\mu}}{dx} = 0$, $\mathfrak{F}_e'$ pflanzte sich also längs einer ausgezeichneten Fermatschen Kurve fort. Das ist gegen die Voraussetzung, also ist wirklich $m' = m''$.

Hieraus folgt aber nun sofort, daß entweder $l' = l''$ oder $l' = -l''$ ist. Anderseits gilt aber sicher die erste Gleichung nicht, weil dann

$$\frac{d\frac{l'}{\mu}}{dx}(\mathfrak{E}_s' + \mathfrak{E}_s'') = 0$$

wäre, also, da nicht die triviale Ergänzung $\mathfrak{F}_e'' = -\mathfrak{F}_e'$ vorliegt, $\frac{d\frac{l'}{\mu}}{dx}$ verschwinden würde. $\mathfrak{F}_e'$ würde sich also auf einer ausgezeichneten Fermatschen Kurve fortpflanzen, gegen die Voraussetzung. Es ist also $l' = -l'' = l$, und damit ist die Notwendigkeit der oben ausgesprochenen Bedingungen vollständig nachgewiesen.

Wir wollen nun zeigen, daß es zu je zwei konjugierten, nicht ausgezeichneten Fermatschen Kurven Wellenpaare $\mathfrak{F}_e'$ und $\mathfrak{F}_e''$ gibt, die sich längs ihnen fortpflanzen und zusammen den Maxwellschen Gleichungen genügen, und zwar wollen wir alle solchen Paare angeben. Die Bedingungen dafür lauten:

$$D' + D'' = 0,$$

$$\frac{l}{\mu}(D' - D'') + \frac{d\frac{l}{\mu}}{dx}(\mathfrak{E}_s' - \mathfrak{E}_s'') = 0.$$

Diese Gleichungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn die Faktoren von $\cos\nu\left(\frac{m}{C}y - t\right)$ und $\sin\nu\left(\frac{m}{C}y - t\right)$ gleich Null sind; die beiden letzten Gleichungen sind also den folgenden vier gleichwertig:

$$\frac{\nu}{c}l(C' - C'') + \frac{d(B' + B'')}{dx} = 0,$$

$$\frac{\nu}{c}l(B' - B'') - \frac{d(C' + C'')}{dx} = 0,$$

$$\frac{\nu}{c}\frac{l^2}{\mu}(C' + C'') + \frac{d\frac{l}{\mu}(B' - B'')}{dx} = 0,$$

$$\frac{\nu}{c}\frac{l^2}{\mu}(B' + B'') - \frac{d\frac{l}{\mu}(C' - C'')}{dx} = 0.$$

Durch Elimination der Größen $C' - C''$ und $B' - B''$ erhält man hieraus für die Funktionen $\varphi = B' + B''$ und $\psi = C' + C''$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{d \log \mu}{dx} \frac{df}{dx} + \frac{\nu^2}{c^2} l^2 f = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist mit der Gleichung (10) identisch. Wir führen die neue unabhängige Veränderliche

$$\xi = \frac{1}{c} \int_0^x l \, dx$$

ein und erhalten:

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{d \log \frac{l}{\mu}}{d\xi} \frac{df}{d\xi} + \nu^2 f = 0. \tag{16}$$

Wir können nun *das gesamte Feld* $\mathfrak{F}_e = \mathfrak{F}_e' + \mathfrak{F}_e''$ vollständig hinschreiben:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{E}_x = 0, && \mathfrak{H}_x = -\frac{m}{\mu}\left(\varphi \cos \nu(\eta - t) - \psi \sin \nu(\eta - t)\right),\\
&\mathfrak{E}_y = 0, && \mathfrak{H}_y = -\frac{l}{\mu}\left(\frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi}\cos \nu(\eta - t) + \frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi}\sin \nu(\eta - t)\right),\\
&\mathfrak{E}_z = \varphi \cos \nu(\eta - t) - \psi \sin \nu(\eta - t), && \mathfrak{H}_z = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Dabei ist, wie bei der homogenen Welle im homogenen Medium, abkürzend

$$\eta = \frac{1}{c} m y$$

gesetzt.

Ferner ist es leicht, *die Felder* $\mathfrak{F}_e'$ *und* $\mathfrak{F}_e''$ *einzeln vollständig hinzuschreiben.* Wir haben, wenn wir

$$m = \sqrt{\varepsilon \mu} \sin \vartheta, \quad l = \sqrt{\varepsilon \mu} \cos \vartheta$$

einführen:

$$\mathfrak{F}_i': \quad \begin{aligned}
&\mathfrak{E}_x' = 0, && \mathfrak{H}_x' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin \vartheta \, F',\\
&\mathfrak{E}_y' = 0, && \mathfrak{H}_y' = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos \vartheta \, F',\\
&\mathfrak{E}_z' = F', && \mathfrak{H}_z' = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\mathfrak{F}_i'': \quad \begin{aligned}
&\mathfrak{E}_x'' = 0, && \mathfrak{H}_x'' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sin (\pi - \vartheta) \, F'',\\
&\mathfrak{E}_y'' = 0, && \mathfrak{H}_y'' = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos (\pi - \vartheta) \, F'',\\
&\mathfrak{E}_z'' = F'', && \mathfrak{H}_z'' = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Dabei ist abkürzend gesetzt:

$$(20)\quad \begin{aligned} F' &= \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi}\right)\cos\nu(\eta - t) - \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\sin\nu(\eta - t),\\ F'' &= \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{dx}\right)\cos\nu(\eta - t) - \frac{1}{2}\left(\psi + \frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\sin\nu(\eta - t) \end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$\varphi + \frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi} = 2A'\cos\nu\varrho',$$

$$\psi - \frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi} = 2A'\sin\nu\varrho'$$

und

$$\varphi - \frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi} = 2A''\cos\nu\varrho'',$$

$$\psi + \frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi} = 2A''\sin\nu\varrho'',$$

also

$$4A'^2 = \left(\varphi + \frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 + \left(\psi - \frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2,$$

$$4A''^2 = \left(\varphi - \frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 + \left(\psi + \frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2$$

setzen:

$$F' = A'\cos\nu(\varrho' + \eta - t),$$

$$F'' = A''\cos\nu(\varrho'' + \eta - t).$$

Die Intensitäten der beiden Wellen sind durch

$$J' = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,A'^2, \quad J'' = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,A''^2$$

gegeben, während ihre Phasen

$$\nu(\varrho' + \eta - t), \qquad \nu(\varrho'' + \eta - t)$$

sind. Ihre Frequenzen sind natürlich ν.

Wir fassen die bisher gewonnenen Ergebnisse so zusammen. Dafür, daß eine homogene Welle den Maxwellschen Gleichungen genügt, ist notwendig, daß sie sich auf einer ausgezeichneten Fermatschen Kurve fortpflanzt. Die allgemeinste solche Welle ist durch die Gleichungen (7) und (12) gegeben. Eine homogene Welle, die diese Eigenschaft nicht besitzt, läßt sich dagegen unter gewissen Bedingungen durch eine zweite homogene Welle so ergänzen, daß das gesamte Feld den Maxwellschen Gleichungen genügt. Notwendig dafür, daß ein solches Paar von Wellen den Maxwellschen Gleichungen genügt, ist, daß sie sich längs zweier konjugierten Fermatschen Kurven fortpflanzen; das allgemeinste solche Wellenpaar ist durch die Gleichungen (18), (19) und (20) gegeben. Dabei bedeuten φ und ψ zwei Lösungen der Differentialgleichung (16).

Über diese Funktionen φ und ψ müssen wir noch eine Bemerkung machen, die sich auf die eventuellen *Knickstellen von* μ bezieht. In diesen Punkten kann man *stetige Differentiierbarkeit von* φ *und* ψ verlangen, aber auch nicht mehr. Der elektrische Vektor von $\mathfrak{F}_e$ ist dann, wie die Gleichungen (17) lehren, an einer solchen Stelle stetig differentiierbar, der magnetische dagegen nur stetig. Die Maxwellschen Gleichungen lassen sich also an einer solchen Knickstelle von μ nicht erfüllen, weil die Größe curl $\mathfrak{H}$ an einer solchen Stelle nicht existiert. Aber das ist auch nicht nötig, die Maxwellschen Gleichungen gelten nämlich nur unter der Voraussetzung der Existenz dieser Größe. Die eigentlichen Grundgleichungen der Elektrodynamik sind nämlich gewisse Integralgesetze. Aus diesen folgen unter der Annahme, daß curl $\mathfrak{E}$ und curl $\mathfrak{H}$ existieren und stetig sind, die Maxwellschen Gleichungen; in solchen Punkten aber, wo diese Differentialquotienten, wie in unserem Falle, an einer Ebene Sprünge haben, fordern sie nur Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und der Normalkomponenten von $\varepsilon\mathfrak{E}$ und $\mu\mathfrak{H}$. In unserem Falle fordern sie also (wegen der Stetigkeit von ε und μ) nur Stetigkeit von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$. Dieser Forderung ist aber dann und nur dann genügt, wenn φ und ψ an den Knickstellen von μ stetig differentiierbar sind.

Wir wollen endlich noch *einen neuen Begriff einführen*, der sich für das Folgende als zweckmäßig erweist. Wir haben bisher stets von der Intensität J einer homogenen Welle gesprochen und darunter das doppelte Zeitmittel des Betrages des Energiestromes verstanden, der durch eine zur Strahlrichtung senkrechte Fläche vom Inhalt 1 fließt. Statt dessen wollen wir nun eine andere zweckmäßigere Größe einführen, die wir in Ermangelung eines Namens als *Intensität* J^* bezeichnen wollen. Zu dem Zweck betrachten wir eine unendlich dünne Röhre, deren Wand in jedem Punkte von der Richtung des Strahlvektors berührt wird: eine solche Röhre ist für die Energieströmung eine undurchlässige Wand. Die Röhre hat wechselnden Querschnitt, wenn wir ihn wie üblich normal zu ihr messen; dagegen ist ihr Querschnitt konstant, wenn wir sie mit den Flächen $n = \text{const.}$, also senkrecht zur x-Achse schneiden. Das kommt daher, daß die Richtung des Vektors $\mathfrak{S}$ nur von x abhängt. Und nun bezeichnen wir als Intensität J^* einfach das doppelte Zeitmittel des Energiestromes, der durch die auf den Flächen $n = \text{const.}$ gemessene Flächeneinheit hindurchgeht. Diese Intensität J^* drückt sich sehr einfach durch die Intensität J aus: es ist nämlich

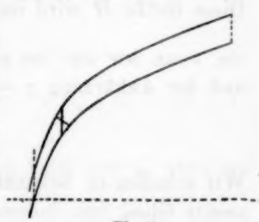


Fig. 2.

$$J^* = J \cdot |\cos\vartheta|.$$

Wir können auch schreiben

$$J^* = 2\,|\overline{\mathfrak{S}_x}|,$$

wobei der wagerechte Strich wie üblich die zeitliche Mittelwertbildung bedeutet. Den Formeln für J' und J'' treten nun die folgenden

$$J^{*\prime} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta\, A'^2 = \frac{cl}{4\pi\mu}A'^2$$

und

$$J^{*\prime\prime} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta\, A''^2 = \frac{cl}{4\pi\mu}A''^2$$

zur Seite.

7. Die Funktionen φ und ψ in der Umgebung eines beliebigen Punktes.

Wir wollen uns nun etwas näher mit den Funktionen φ und ψ beschäftigen, wollen ihr Verhalten in der Nachbarschaft eines beliebigen Punktes ξ_1 betrachten und gewisse Abschätzungen gewinnen, die uns nachher nützlich sein werden.

Die Funktionen φ und ψ genügen der Differentialgleichung

(21) $$f'' - 2H'f' + \nu^2 f = 0,$$

wenn wir, wie im folgenden stets, falls nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist, mit Strichen die Ableitungen nach ξ bezeichnen und abkürzend setzen

$$H = \log\left(\frac{l}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} = \log \varepsilon^{-\frac{1}{4}}\mu^{\frac{1}{4}}\cos^{-\frac{1}{2}}\vartheta.$$

Diese Größe H wird im folgenden eine große Rolle spielen: wir können sie, wenn wir uns der am Anfange eingeführten Größen $\alpha = \varepsilon^{-\frac{1}{4}}$, $\beta = \mu^{-\frac{1}{4}}$ und der Abkürzung $\gamma = \cos^{-1}\vartheta$ bedienen, auch so schreiben

$$H = \log \alpha\beta^{-1}\gamma^{\frac{1}{2}}.$$

Wir schaffen in bekannter Weise aus der Differentialgleichung (21) das zweite Glied fort, indem wir setzen

$$f = e^H F = \left(\frac{l}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} F,$$

dann ist

$$f' = e^H(F' + H'F),$$

$$f'' = e^H(F'' + 2H'F' + (H'' + H'^2)F),$$

und wir erhalten folgende Gleichung für F:

(22) $$F'' + (\nu^2 + a)F = 0,$$

wo abkürzend

$$a = H'' - H'^2$$

gesetzt ist. Mit dieser Gleichung beschäftigen wir uns weiter.

Wir fassen einen beliebigen *im Endlichen gelegenen Punkt* ξ_1 der ξ-Achse ins Auge. Dann gilt folgende Behauptung: es gibt eine und nur eine Lösung F, die den Bedingungen

$$\lim_{\xi=\xi_1} (F - e^{i\nu\xi}) = 0,$$

$$\lim_{\xi=\xi_1} \left(\frac{F'}{\nu} - ie^{i\nu\xi}\right) = 0$$

genügt. Wir wollen kurz sagen: es gibt eine und nur eine Lösung, die sich bei ξ_1 verhält wie $e^{i\nu\xi}$.

Wir könnten diesen Satz aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen *herübernehmen*: wir wollen ihn aber hier *beweisen*, indem wir eine konvergente Entwicklung angeben, die die von F ausgesagten Eigenschaften besitzt, weil wir so gleichzeitig eine Abschätzung von F und $\frac{F'}{\nu}$ erhalten, die wir später gebrauchen.

Wie benutzen dabei ein von E. Picard*) und J. Horn**) verwandtes Verfahren der sukzessiven Approximationen. Wir können uns nicht einfach darauf beziehen, da wir gewisse Modifikationen daran anzubringen haben; da man es außerdem sehr leicht auseinandersetzen kann, so wird das Einfachste sein, es vollständig, wenn auch möglichst kurz darzustellen.

Wir setzen

$$F_0 = e^{i\nu\xi},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_n = \frac{e^{-i\nu\xi}}{2}\int_{\xi_1}^{\xi} e^{i\nu\xi} a F_{n-1} d\xi - \frac{e^{i\nu\xi}}{2}\int_{\xi_1}^{\xi} e^{-i\nu\xi} a F_{n-1} d\xi \qquad (n \geqq 1).$$

Wir betrachten die Werte ξ auf einer bestimmten Seite von ξ_1, etwa auf der rechten, und wählen ein ξ_2, sodaß

$$(23) \qquad \int_{\xi_1}^{\xi_2} |a d\xi| \leqq \frac{\nu}{2}$$

ist. Dann ist für alle $\xi_1 \leqq \xi \leqq \xi_2$:

---

*) E. Picard, Traité d'Analyse, 2. Aufl., Bd. 3, Paris 1908, S. 412—419.

**) J. Horn, Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter, Math. Ann. 52 (1899), S. 271—292.

$$|F_0| = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|F_n| \leqq \operatorname{Max}|F_{n-1}| \cdot \int_{\xi_1}^{\xi} |a\,d\xi| \leqq \operatorname{Max}|F_{n-1}| \cdot \frac{\nu}{2} \qquad (n \geqq 1).$$

Daraus folgt ohne weiteres für alle n

$$\operatorname{Max}|F_n| \leqq \frac{\nu^n}{2^n},$$

und wir sehen, daß die Reihe

$$F = \sum_0^\infty \frac{F_n}{(i\nu)^n}$$

gleichmäßig für das Intervall von ξ_1 bis ξ_2 konvergiert. Weiter ist

$$\frac{F_0'}{\nu} = i e^{i\nu\xi},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F_n'}{\nu} = -i\frac{e^{i\nu\xi}}{2}\int_{\xi_1}^{\xi} e^{i\nu\xi} a F_{n-1}\,d\xi - i\frac{e^{i\nu\xi}}{2}\int_{\xi_1}^{\xi} e^{-i\nu\xi} a F_{n-1}\,d\xi \qquad (n \geqq 1).$$

Daraus folgt

$$\left|\frac{F_0'}{\nu}\right| = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\frac{F_n'}{\nu}\right| \leqq \operatorname{Max}|F_{n-1}| \cdot \int_{\xi_1}^{\xi} |a\,d\xi| \leqq \operatorname{Max}|F_{n-1}| \cdot \frac{\nu}{2} \qquad (n \geqq 1).$$

Es ist also für alle n:

$$\left|\frac{F_n'}{\nu}\right| \leqq \frac{\nu^n}{2^n}.$$

Die Reihe

$$F^* = \sum_0^\infty \frac{F_n'}{(i\nu)^n}$$

konvergiert also ebenfalls gleichmäßig für das Intervall von ξ_1 bis ξ_2. Und schließlich ist

$$(24) \qquad \begin{aligned} F_0'' &= -\nu^2 F_0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ F_n'' &= -\nu^2 F_n - i\nu a F_{n-1} \qquad (n \geqq 1) \end{aligned}$$

also konvergiert auch die Reihe

$$F^{**} = \sum_0^\infty \frac{F''_n}{(i\nu)^n}$$

gleichmäßig für das Intervall von ξ_1 bis ξ_2. Hieraus folgt aber nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung*), daß

$$F^* = F', \quad F^{**} = F''$$

ist, daß man also die Reihe für F zweimal gliedweise differentiieren darf. Weiter sieht man leicht, daß diese Funktion F der Differentialgleichung genügt, die Addition der Formeln (24) ergibt ja

$$F'' = -(\nu^2 + a)F.$$

Endlich haben wir die Abschätzungen

$$|F - e^{i\nu\xi}| \leqq \frac{\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi_1}^{\xi} |a\,d\xi|}{1 - \frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi_1}^{\xi} |a\,d\xi|},$$

$$\left|\frac{F'}{\nu} - ie^{i\nu\xi}\right| \leqq \frac{\frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi_1}^{\xi} |a\,d\xi|}{1 - \frac{1}{\nu}\int\limits_{\xi_1}^{\xi} |a\,d\xi|},$$

und daraus folgen die Behauptungen für den Grenzübergang $\lim \xi = \xi_1$ sofort.

Indem wir überall i durch $-i$ ersetzen, erhalten wir eine konjugiert komplexe Lösung $\overline{F}$, die den entsprechenden Gleichungen und Ungleichungen genügt.

Interessant ist es nun zu bemerken, daß diese Entwicklungen auch für *die Fälle* $\xi_1 = \pm\infty$ *gelten*, wenn von der gleich zu beweisenden Tatsache Gebrauch gemacht wird, daß die Funktion a nach $\xi = \pm\infty$ absolut integrabel ist. Wir brauchen dann nur zu zeigen, daß die Definition der Funktionen F_n zulässig ist, daß die Integrale rechts existieren. Das zeigt man aber leicht durch vollständige Induktion: sicherlich existiert nämlich F_0 für alle ξ und ist dafür beschränkt; nehmen wir nun an, das gilt für F_n, dann zeigt man es leicht für F_{n+1} mit Hilfe der Ungleichung

$$\operatorname{Max}|F_{n+1}| \leqq \operatorname{Max}|F_n| \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |a\,d\xi|.$$

---

*) Vgl. etwa O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, T. 1, Leipzig 1893, S. 65—68.

Die Existenz der Funktion F (und der Funktion $\overline{F}$) in den Fällen $\xi_1 = \pm\infty$ ist übrigens keine triviale Folgerung der elementaren Sätze über lineare Differentialgleichungen.

Jedem ξ_1 sind also zwei Funktionen F und $\overline{F}$ zugeordnet, die sich dort verhalten wie $e^{i\nu\xi}$ und $e^{-i\nu\xi}$. Wir werden diese Funktionen da, wo es uns auf den Wert des Parameters ξ_1 ankommt, mit $F(\xi_1, \xi)$ und $\overline{F}(\xi_1, \xi)$ bezeichnen.

Wir wollen in Rücksicht auf später noch *eine Bemerkung* machen. Bei *festem* ν konvergieren unsere Entwicklungen gleichmäßig *für eine gewisse Umgebung von* ξ_1. Wir können die Sache aber auch anders auffassen: wir können stets ν *so groß* wählen, daß sie gleichmäßig für *alle* ξ konvergieren, wir brauchen ja nach (23) nur

$$\nu \geqq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |a\,d\xi|$$

zu wählen. Man überzeugt sich leicht, daß die Knickstellen von ε und μ, also die Sprungstellen von a keine Schwierigkeiten machen, die Funktionen F, $\overline{F}$ und F', $\overline{F}'$ sind stetige Funktionen von ξ, erst F'', $\overline{F}''$ weisen Sprünge auf. Wir merken uns endlich noch folgende *Abschätzung:*

$$|F| = |\overline{F}| \leqq \frac{1}{1 - \frac{1}{\nu}\int_{\xi_1}^{\xi} |a\,d\xi|},$$

$$\leqq 2 \text{ für alle } \nu \geqq 2 \int_{+\infty}^{+\infty} |a\,d\xi|,$$

$$\left|\frac{F'}{\nu}\right| = \left|\frac{\overline{F}'}{\nu}\right| \leqq \frac{1}{1 - \frac{1}{\nu}\int_{\xi_1}^{\xi} |a\,d\xi|}$$

$$\leqq 2 \text{ für alle } \nu \geqq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |a\,d\xi|,$$

die uns später nützlich sein wird.

Wir haben noch den *Beweis* zu erbringen, *daß a nach $\xi = \pm\infty$ hin absolut integrabel ist.* Dabei gebrauchen wir zum ersten Male die Voraussetzungen, die wir über das Verhalten der Funktionen ε und μ im Unendlichen gemacht haben. Es ist

$$H = \log \alpha\beta^{-1}\gamma^{\frac{1}{2}};$$

da ferner aus

$$1-\frac{1}{\gamma^2}=m^2\alpha^4\beta^4$$

die Gleichung

$$\frac{2\gamma'}{\gamma^3}=4m^2\alpha^4\beta^4\left(\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{\beta'}{\beta}\right)$$

oder

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=2\left(\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{\beta'}{\beta}\right)(\gamma^2-1)$$

folgt, so haben wir

$$H'=\frac{\alpha'}{\alpha}\gamma^2+\frac{\beta'}{\beta}(\gamma^2-2)$$

und

$$H''=\frac{\alpha''}{\alpha}\gamma^2+\frac{\beta''}{\beta}(\gamma^2-2)+\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}(4\gamma^4-5\gamma^2)+\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}(8\gamma^4-8\gamma^2)$$
$$+\frac{\beta'^2}{\beta^2}(4\gamma^4-5\gamma^2+2).$$

Es ist also

$$a=\frac{\alpha''}{\alpha}\gamma^2+\frac{\beta''}{\beta}(\gamma^2-2)+\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}(3\gamma^4-5\gamma^2)+\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}(6\gamma^4-4\gamma^2)$$
$$+\frac{\beta'^2}{\beta^2}(3\gamma^4-\gamma^2-2).$$

Die Voraussetzungen, die wir über die Funktioneu α und β gemacht haben, beziehen sich auf die unabhängige Veränderliche x, nicht auf ξ: es wird also zweckmäßig sein, in den letzten Ausdruck statt der Ableitungen nach ξ die nach x einzuführen. Wir haben dabei die Formeln zu benutzen:

$$\frac{df}{d\xi}=c\alpha^2\beta^2\gamma\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d^2f}{d\xi^2}=c^2\alpha^4\beta^4\gamma^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}+2\left(\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\alpha}+\frac{\frac{d\beta}{dx}}{\beta}\right)\frac{df}{dx}\right).$$

Wir finden also, wenn wir vorübergehend Ableitungen nach x durch Striche bezeichnen,

$$a=c^2\alpha^4\beta^4\gamma^2\Big(\frac{\alpha''}{\alpha}\gamma^2+\frac{\beta''}{\beta}(\gamma^2-2)+\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}(3\gamma^4-3\gamma^2)+\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}(6\gamma^4-4)$$
$$+\frac{\beta'^2}{\beta^2}(3\gamma^4+\gamma^2-6)\Big)$$

oder schließlich

$$a=c^2\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha''\alpha\beta^2\gamma^2+\alpha^2\beta''\beta(\gamma^2-2)+\alpha'^2\beta^2(3\gamma^4-3\gamma^2)$$
$$+\alpha'\alpha\beta'\beta(6\gamma^4-4)+\alpha^2\beta'^2(3\gamma^4+\gamma^2-6)). \tag{25}$$

Und nun sieht man sofort, daß a absolut nach $\xi=\pm\infty$ oder, was dasselbe ist, daß

$$a\frac{d\xi}{dx}=ac^{-1}\alpha^{-2}\beta^{-2}\gamma^{-1}$$

absolut nach $x = \pm\infty$ integrabel ist. Diese Größe besteht nämlich aus Summanden, von denen jeder ein Produkt von beschränkten Faktoren ist und wenigstens eine der Größen $\alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ enthält. Nun sind aber diese vier Größen nach Voraussetzung absolut nach $x = \pm\infty$ integrabel, also ist es auch $a\frac{d\xi}{dx}$. Damit ist die Behauptung bewiesen. Wir wollen noch bemerken

$$\lim_{\xi=\pm\infty} \frac{dH}{d\xi} = \lim_{\xi=\pm\infty} \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\gamma^2 + \frac{\beta'}{\beta}(\gamma^2 - 2)\right) c\alpha^2\beta^2\gamma = 0. \tag{26}$$

Das für uns zunächst interessanteste Ergebnis der letzten Betrachtungen ist: *es gibt zwei Lösungen $F, \overline{F}$, die sich im positiv Unendlichen verhalten wie die Funktionen $e^{i\nu\xi}$ und $e^{-i\nu\xi}$.* Diese beiden Lösungen sind sicherlich linear unabhängig; wir können also sagen, im positiv Unendlichen verhält sich jede Lösung wie eine lineare Kombination von $e^{i\nu\xi}$ und $e^{-i\nu\xi}$ oder, was dasselbe ist, von $\cos\nu\xi$ und $\sin\nu\xi$. Genauer gesagt, zu jeder Lösung F der Gleichung (22) gibt es zwei Konstante $c_1^{+\infty}$, $c_2^{+\infty}$, sodaß für den Grenzübergang $\lim\xi = +\infty$

$$F = c_1^{+\infty}\cos\nu\xi + c_2^{+\infty}\sin\nu\xi + o(\xi^0)^{*)},$$
$$\frac{F'}{\nu} = c_2^{+\infty}\cos\nu\xi - c_1^{+\infty}\sin\nu\xi + o(\xi^0)$$

ist. Dasselbe gilt natürlich für das negativ Unendliche; selbstverständlich sind die zu ein und derselben Lösung gehörenden Konstanten $c_k^{+\infty}$ und $c_k^{-\infty}$ $(k=1,2)$ im allgemeinen von einander verschieden.

Gehen wir auf die Differentialgleichung für f zurück, und beachten wir (26), dann sehen wir also: *es gibt vier Konstante $c_1^{+\infty}$, $c_2^{+\infty}$, $d_1^{+\infty}$, $d_2^{+\infty}$, sodaß im positiv Unendlichen die folgenden Gleichungen gelten:*

$$\varphi = \left(\frac{l}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} (c_1^{+\infty}\cos\nu\xi + c_2^{+\infty}\sin\nu\xi + o(\xi^0)),$$
$$\psi = \left(\frac{l}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} (d_1^{+\infty}\cos\nu\xi + d_2^{+\infty}\sin\nu\xi + o(\xi^0)),$$
$$\frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi} = \left(\frac{l}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} (c_2^{+\infty}\cos\nu\xi - c_1^{+\infty}\sin\nu\xi + o(\xi^0)),$$
$$\frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi} = \left(\frac{l}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} (d_2^{+\infty}\cos\nu\xi - \xi_1^{+\infty}\sin\nu\xi + o(\xi^0)).$$

Und damit beherrschen wir auch das Verhalten der Wellen $\mathfrak{F}_e'$ und $\mathfrak{F}_e''$ im positiv Unendlichen: bilden wir ihre Intensitäten $J^{*\prime}$ und $J^{*\prime\prime}$, so heben

*) Das Symbol $o(\xi^0)$ repräsentiert eine Funktion, welche bei dem betrachteten Grenzübergange von ξ verschwindet. Es kann ebenso wie das Symbol const. im Verlaufe derselben Rechnung verschiedene Größen bedeuten.

sich die ersten Faktoren gerade gegen die ersten Faktoren der obigen Gleichungen auf, und wir erhalten die einfachen Formeln

$$(27)\quad \begin{aligned} J^{*\prime} &= \frac{c}{16\pi}\left((c_1^{+\infty} + d_2^{+\infty})^2 + (c_2^{+\infty} - d_1^{+\infty})^2\right) + o(\xi^0), \\ J^{*\prime\prime} &= \frac{c}{16\pi}\left((c_1^{+\infty} - d_2^{+\infty})^2 + (c_2^{+\infty} + d_1^{+\infty})^2\right) + o(\xi^0). \end{aligned}$$

Die Intensitäten der beiden Wellen streben also im positiv Unendlichen bestimmten Grenzwerten zu. Für das negativ Unendliche gilt natürlich dasselbe; die Grenzwerte sind aber selbstverständlich im allgemeinen andere. Wir wollen bemerken, daß sich durch diese einfachen Formeln zum ersten Male die Einführung des Begriffes der Intensität J^* rechtfertigt.

8. Durchgehende und reflektierte Welle.

Wir betrachten von nun an eine besondere Klasse von Wellenpaaren $\mathfrak{F}_e'$ und $\mathfrak{F}_e''$. Im allgemeinen transportiert $\mathfrak{F}_e'$ Energie aus dem negativ Unendlichen, $\mathfrak{F}_e''$ aus dem positiv Unendlichen ins Endliche. In Rücksicht auf die Frage des Fermatschen Prinzips beschränken wir uns von nun an auf solche Wellenpaare $\mathfrak{F}_e'$ und $\mathfrak{F}_e''$, bei denen $\mathfrak{F}_e''$ keine Energie aus dem Unendlichen ins Endliche transportiert. Wir haben es dann mit einem durch das Medium *hindurchgehenden* Strahl und einem zweiten Strahl zu tun, den wir zweckmäßig als *reflektierten* Strahl bezeichnen. *Wir werden* also *verlangen, daß die Intensität von $\mathfrak{F}_e''$ im positiv Unendlichen verschwindet.* Dies ist nach der zweiten Formel (27) dann und nur dann der Fall, wenn

$$d_2^{+\infty} = c_1^{+\infty}, \quad d_1^{+\infty} = -c_2^{+\infty}$$

ist, wenn also die Substitution

$$(28)\quad \begin{pmatrix} c_1^{+\infty} & c_2^{+\infty} \\ d_1^{+\infty} & d_2^{+\infty} \end{pmatrix}$$

eine orthogonale rechtsdrehende Substitution ist. φ und ψ sind also durch unsere Forderung bis auf eine solche Substitution bestimmt. Eine solche Substitution ist aber für unser Feld ganz gleichgültig: sie kann nämlich, wie die Formeln (17) lehren, stets aufgehoben werden durch Multiplikation des Feldes mit einem konstanten Faktor und durch eine Verlegung des Anfangspunktes der Zeit. Wir können also annehmen, daß die Substitution (28) die identische Substitution ist, können also für φ und ψ fordern: im positiv Unendlichen soll sein

$$(29)\quad \begin{aligned} \varphi &= \left(\frac{l}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}(\cos \nu\xi + o(\xi^0)), \\ \psi &= \left(\frac{l}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}(\sin \nu\xi + o(\xi^0)). \end{aligned}$$

Nach den bewiesenen Sätzen lassen sich diese Forderungen erfüllen und zwar auf eine und nur eine Weise. *Die Beschränkung auf ein System einer durchgehenden und einer reflektierten Welle ist also identisch mit der Festlegung der Lösungen φ und ψ der Differentialgleichung* (16) *durch die für* $\xi = +\infty$ *geltenden inhomogenen Randbedingungen* (29).

9. Energie der beiden Wellen.

Wir können das Verhältnis der Felder $\mathfrak{F}_e'$ und $\mathfrak{F}_e''$ der durchgehenden und der reflektierten Welle so auffassen: $\mathfrak{F}_e'$, welches allein im allgemeinen nicht den Maxwellschen genügt, erzeugt $\mathfrak{F}_e''$, um den Maxwellschen Gleichungen gerecht zu werden. Auf diese Abhängigkeit der Felder $\mathfrak{F}_e'$ und $\mathfrak{F}_e''$ fällt ein weiteres interessantes Licht, wenn wir ihr Verhältnis zum Energiesatze betrachten. Für ein Feld $\mathfrak{F}$, welches den Maxwellschen Gleichungen genügt, gilt das Energieprinzip: die Energie W der (unendlich klein gedachten) Volumeneinheit nimmt in der (ebenfalls unendlich klein gedachten) Zeiteinheit um soviel zu, wie der Überschuß der einströmenden Energie über die ausströmende beträgt. Die Summe der Zunahme der Energiedichte in der Zeiteinheit und der Ergiebigkeit des Strahlvektors $\mathfrak{S}$ ist also gleich Null. Unser Feld $\mathfrak{F}_e'$ genügt aber *nicht* den Maxwellschen Gleichungen, wir können deshalb auch das Bestehen der Energiegleichung nicht erwarten. In der Tat ist

$$\frac{\partial W'}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S}' = \frac{1}{4\pi}\frac{dH}{dx}(\mathfrak{E}_z''\mathfrak{H}_y' - \mathfrak{E}_z'\mathfrak{H}_y''). \tag{30}$$

Das Feld $\mathfrak{F}_e'$ genügt also im allgemeinen tatsächlich nicht der Energiegleichung: wir machen die Annahme, daß die rechte Seite negativ ist, und werden dementsprechend sagen, die zeitliche Zunahme der Energiedichte ist geringer, als man nach der Einstrahlung erwarten darf: in dem Volumenelement *verschwindet* Energie. Für das Feld $\mathfrak{F}_e''$ gilt entsprechendes: es ist

$$\frac{\partial W''}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S}'' = \frac{1}{4\pi}\frac{dH}{dx}(\mathfrak{E}_z'\mathfrak{H}_y'' - \mathfrak{E}_z''\mathfrak{H}_y').$$

Auch das Feld $\mathfrak{F}_e''$ genügt also nicht dem Energieprinzip, aber in ihm wird Energie *erzeugt*. Und nun ist das Interessante: in einem Volumenelement von $\mathfrak{F}_e'$ verschwindet gerade soviel Energie, als in demselben Volumenelement von $\mathfrak{F}_e''$ erzeugt wird:

$$\frac{\partial W'}{\partial t} + \frac{\partial W''}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S}' + \operatorname{div} \mathfrak{S}'' = 0. \tag{31}$$

Wir werden also sagen, das Feld $\mathfrak{F}_e'$ transportiert Energie ins Endliche, aber die Konstitution des Mediums gestattet nicht einen restlosen Energietransport, $\mathfrak{F}_e'$ erleidet einen Energieverlust, und dieser Energieverlust wird

gerade dazu verwandt, das Feld $\mathfrak{F}_e''$ der reflektierten Welle zu erzeugen, in der die Energie wieder ins Unendliche zurückfließt. Das Feld $\mathfrak{F}_e''$ ergänzt also das Feld $\mathfrak{F}_e'$ in zweifacher Weise. Seine *linearen* Größen $\mathfrak{E}''$ und $\mathfrak{H}''$ sorgen dafür, daß die *Maxwellschen Gleichungen* erfüllt werden, seine *quadratischen* Größen W'' und $\mathfrak{S}''$ bewirken, daß das *Energieprinzip* gilt. Die mathematische Formulierung der Abhängigkeit der beiden Felder ist also sicherlich so schön und einfach, wie man sie nur wünschen kann.

Eine sehr einfache Beziehung besteht auch zwischen den Intensitäten $J^{*\prime}$ und $J^{*\prime\prime}$; man erhält sie durch zeitliche Mittelbildung aus der Gleichung (31). Es ergibt sich nämlich so

$$\frac{d}{dx}(J^{*\prime} - J^{*\prime\prime}) = 0,$$

also

$$J^{*\prime} = J^{*\prime\prime} + \text{const.}$$

Die Intensitäten $J^{*\prime}$ und $J^{*\prime\prime}$ ergänzen einander also *auch* in dem früheren Sinne: $J^{*\prime}$ wächst auf Kosten von $J^{*\prime}$. $J^{*\prime\prime}$ verschwindet im positiv Unendlichen, wir können die letzte Gleichung also auch so schreiben

$$J^{*\prime} = J^{*\prime\prime} + J^{*\prime}_{+\infty}. \tag{32}$$

Wieder sehen wir, wie zweckmäßig die Einführung des Begriffes der Intensität J^* ist.

Wir haben uns im vorigen einer Sprechweise bedient, die streng genommen nicht gerechtfertigt ist. Wir haben nämlich so getan, als ob die rechte Seite von (30) stets *negativ* ist. Das ist aber im allgemeinen durchaus nicht der Fall. Die Sache liegt nicht so einfach, daß das Feld $\mathfrak{F}_e'$ stets Energie an das Feld $\mathfrak{F}_e''$ *abgibt*. Es ist nicht einmal so, daß die Größe $J^{*\prime}$ längs des Strahles $\mathfrak{F}_e'$ *monoton abnimmt*, wie man geneigt ist zu erwarten: wir werden ein einfaches Gegenbeispiel am Schlusse dieser Arbeit angeben. Man kann sich das „erklären", indem man bedenkt, daß man eigentlich annehmen muß, die reflektierte Welle entsteht nicht direkt aus der durchgehenden, sondern die durchgehende gibt zu einer reflektierten Welle Veranlassung, diese ebenso zu einer Welle, die sich über die durchgehende lagert, diese wieder zu einer, die sich über die reflektierte Welle lagert, und so fort. Außerdem addieren sich bei diesem Prozeß nicht einfach die Intensitäten, sondern es findet noch ein komplizierter Interferenzvorgang statt. Vielleicht ist es überhaupt zweckmäßiger, von dieser „Erklärung" abzusehen: man kann schließlich nicht verlangen, daß man den Prozeß der Reflexion in einem kontinuierlich veränderlichen Medium versteht mit Hilfe eines Grenzfalles, nämlich der Reflexion an einer Unstetigkeitsebene.

Aber es hat doch einen gewissen Sinn, wenn wir sagen, *im wesentlichen* verliert die durchgehende Welle an Intensität. Wir meinen nämlich

damit, die Intensität $J^{*'}$ ist im allgemeinen größer als $J^{*'}_{+\infty}$; das lehrt die die Gleichung (32) sofort, wenn wir bedenken, daß $\mathfrak{F}_e''$, also auch $J^{*''}$, im allgemeinen nicht identisch verschwindet.

10. Das Fermatsche Prinzip für das parallel-geschichtete Medium.

Durch die vorigen Untersuchungen ist die Frage, ob und in welcher Form das Fermatsche Prinzip für das parallel-geschichtete Medium gilt, vollständig beantwortet. Das Fermatsche Prinzip in seiner *allgemeinen* Form gilt nur *in Ausnahmefällen*, es gilt für solche Wellen, die sich längs ausgezeichneter Fermatscher Kurven fortpflanzen. *Im allgemeinen* gilt das Fermatsche Prinzip in seiner *beschränkten* Form: die Energiefortpflanzung findet zwar auf den Fermatschen Kurven statt, aber sie ist stets mit einem Rückstrom der Energie, mit Reflexion verbunden. Dieser Rückstrom findet ebenfalls auf Fermatsche Kurven statt und zwar auf den zu den Fermatschen Kurven der durchgehenden Welle konjugierten Kurven.

11. Konvergente Entwicklung von φ und ψ nach steigenden Potenzen von ν.

Wir haben nun die prinzipiellen Dinge erledigt, die wir erledigen wollten. Die Untersuchungen, die wir im folgenden anstellen werden, sind anderer Natur: sie werden uns gestatten, die eben entwickelten Dinge auch *quantitativ* zu verfolgen. Wir werden *einmal* bei allgemeinem ε und μ die fundamentalen Funktionen φ und ψ als Funktionen des Parameters ν betrachten und Darstellungen für sie finden, die im Falle sehr kleiner und sehr großer ν brauchbare Annäherungen liefern. Wir denken uns *zweitens* die Funktionen ε und μ von einem Parameter δ abhängig und nehmen an, daß sie für einen bestimmten Wert von δ, etwa für $\delta = 0$, von x unabhängig sind; wir betrachten dann die Funktionen φ und ψ für kleine δ, also für langsam veränderliche Medien. *Endlich* werden wir spezielle Funktionenpaare ε, μ angeben, für die man φ und ψ bei beliebigem ν mit Hilfe von bekannten Funktionen darstellen kann.

Wir betrachten also φ und ψ als Funktionen des Parameters ν und beschränken uns dabei zunächst auf einen *speziellen Fall*: wir nehmen an, daß nach rechts hin das Medium schließlich homogen wird. Wir setzen also etwa voraus, daß für $x \geqq 0$

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0$$

ist. Dann ist leicht zu zeigen, φ und ψ sind ganze transzendente Funktionen von ν.

φ und ψ sind dann definiert durch die Grenzbedingungen

$$\varphi(0) = \mu_0^{\frac{1}{4}} \varepsilon_0^{-\frac{1}{4}} \cos^{-\frac{1}{2}} \vartheta_0, \quad \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0,$$

$$\psi(0) = 0, \quad \frac{d\psi}{dx}(0) = \mu_0^{\frac{3}{4}} \varepsilon_0^{\frac{1}{4}} \cos^{\frac{1}{2}} \vartheta_0 \frac{\nu}{c}.$$

Die Funktionen φ und $\frac{\psi}{\nu}$ genügen also bei $x = 0$ Grenzbedingungen, die von ν unabhängig sind. Anderseits genügen sie der Differentialgleichung (10), also einer Differentialgleichung, deren höchster Koeffizient 1 ist, und deren übrige Koeffizienten ganze transzendente Funktionen von ν sind. Aus diesen beiden Voraussetzungen folgt aber nach einem bekannten Satze*), daß φ und $\frac{\psi}{\nu}$ und infolgedessen auch *φ und ψ ganze transzendente Funktionen von ν* sind. Es wäre interessant zu untersuchen, ob das nicht auch unter unseren *allgemeinen* Voraussetzungen gilt; für das Folgende würden wir aber daraus noch kaum Vorteil ziehen können, deshalb wollen wir uns nicht darum bemühen.

Wir können die Koeffizienten der Reihen für φ und ψ nach Potenzen von ν leicht berechnen, indem wir in die Gleichung (9) mit dem Ansatz

$$f = f_0 + \frac{\nu^2}{c^2} f_1 + \frac{\nu^4}{c^4} f_2 + \cdots \tag{33}$$

eingehen. Wir erhalten dann

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{df_0}{dx}}{\mu}\right) = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{df_n}{dx}}{\mu}\right) = -\varepsilon \cos^2 \vartheta f_{n-1}.$$

Wir wollen die Grenzbedingungen

$$f(0) = a, \quad \frac{df}{dx}(0) = b\frac{\nu}{c},$$

wo a und b Konstante sind, erfüllen: zu dem Zwecke integrieren wir die obigen Gleichungen folgendermaßen:

$$f_0 = a + \frac{b}{\mu_0}\frac{\nu}{c}\int_0^x \mu\, dx,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f_n = -\int_0^x \mu\left(\int_0^x \varepsilon \cos^2 \vartheta f_{n-1}\, dx\right) dx.$$

*) E. Picard, Traité d'Analyse, 2. Aufl., Bd. 3, Paris 1908, S. 88—90.

Wir wissen dann, die Reihe (36) konvergiert bei festgehaltenem x für alle ν. Wir können sogar leicht eine einfache Majorante für die Reihe (36) angeben: ist g die größere der Zahlen $|a|$ und $\left|\frac{b}{\mu_0}\right|$, G eine obere Grenze der Funktionen ε und μ in dem Intervall von 0 bis x, dann ist

$$|f_n| \leqq g\left(G^{2n}\frac{|x|^{2n}}{(2n)!} + \frac{\nu}{c}G^{2n+1}\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

Also ist

$$g\,e^{G\frac{\nu}{c}|x|}$$

eine Majorante für die Reihe (33).

Aus dieser Abschätzung sieht man, die ersten Glieder der Reihe (33) geben eine brauchbare Approximation für die Funktionen φ und ψ, wenn $\frac{\nu}{c}|x|$ klein ist. Ist λ die Wellenlänge unserer Strahlung im Äther

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\nu},$$

so ist

$$\frac{\nu}{c}|x| = 2\pi\frac{|x|}{\lambda}.$$

Unsere Bedingung ist also erfüllt, wenn die Entfernung $|x|$ des Punktes x von der rückwärtigen Begrenzung $x = 0$ des inhomogenen Mediums klein ist gegen die Wellenlänge λ.

Wir wollen *die Ausdrücke für φ, ψ, $\frac{d\varphi}{d\xi}$, $\frac{d\psi}{d\xi}$ bis auf Glieder von höherer als zweiter Ordnung* einmal wirklich hinschreiben:

$$\begin{aligned}
\varphi &= A_0^{-1}B_0 && \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\int_0^x B^4\left(\int_0^x A^4\,dx\right)dx\right),\\
\psi &= A_0\ \ B_0^{-1} && \frac{\nu}{c}\int_0^x B^4\,dx,\\
\frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi} &= A_0^{-1}B_0\ \ A^{-2}B^2 && \frac{\nu}{c}\int_0^x A^4\,dx,\\
\frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi} &= A_0\ \ B_0^{-1}A^{-2}B^2 && \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2}\int_0^x A^4\left(\int_0^x B^4\,dx\right)dx\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

Dabei ist abkürzend gesetzt

$$A = (\varepsilon\cos^2\vartheta)^{\frac{1}{4}}, \quad B = \mu^{\frac{1}{4}}.$$

Aus den Reihen für φ und ψ folgen Reihen für *die Intensitäten $J^{*\prime}$ und $J^{*\prime\prime}$* der gebrochenen und der reflektierten Welle: sie lauten *bis auf Glieder von höherer als zweiter Ordnung*

$$\left.\begin{matrix} J^{*\prime} \\ J^{*\prime\prime} \end{matrix}\right\} = \frac{c}{16\pi}\left(\frac{AB_0}{A_0 B} \pm \frac{A_0 B}{AB_0}\right)^2$$

$$(35)\qquad - \frac{c}{8\pi}\frac{\nu^2}{c^2}\left(\frac{AB_0}{A_0 B}\int_0^x B^4\left(\int_0^x A^4\,dx\right)dx \pm \frac{A_0 B}{AB_0}\int_0^x A^4\left(\int_0^x B^4\,dx\right)dx\right)$$

$$+ \frac{c}{16\pi}\frac{\nu^2}{c^2}\left(\frac{BB_0}{AA_0}\int_0^x A^4\,dx \pm \frac{AA_0}{BB_0}\int_0^x B^4\,dx\right)^2.$$

Am interessantesten ist *die erste Annäherung*: sie sagt nämlich aus, durchgehende und reflektierte Welle sind an jeder Stelle ε, μ gerade so stark, als wenn statt des *stetigen Überganges* der Dielektrizitätskonstanten und der Permeabilität von ε, μ nach ε_0, μ_0 eine *Unstetigkeit* $\varepsilon|\varepsilon_0, \mu|\mu_0$ vorhanden wäre. Wir wollen es nur verifizieren für den Fall $\mu = 1$, der aus der Optik her bekannt ist. In diesem Falle ist

$$\frac{J^{*\prime\prime}}{J^{*\prime}} = \left(\frac{\frac{A}{A_0} - \frac{A_0}{A}}{\frac{A}{A_0} + \frac{A_0}{A}}\right)^2 = \left(\frac{A^2 - A_0^2}{A^2 + A_0^2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta - \sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta + \sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta_0}\right)^2,$$

oder da

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{m}{\sin\vartheta}, \quad \sqrt{\varepsilon_0} = \frac{m}{\sin\vartheta_0},$$

$$\frac{J^{*\prime\prime}}{J^{*\prime}} = \frac{\sin^2(\vartheta - \vartheta_0)}{\sin^2(\vartheta + \vartheta_0)}.$$

Und das ist tatsächlich *die eine Fresnelsche Formel* für das Verhältnis der Intensitäten der auffallenden und der reflektierten Welle im Falle einer Unstetigkeitsebene, wie sie sich in allen Lehrbüchern der Optik*) findet.

Für eine Welle, die senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist, gelten ähnliche Formeln. Man hat in den eben entwickelten Gleichungen nur die Vertauschungen (6) vorzunehmen: die Formeln (34) und (35) bleiben also ungeändert, wenn man nur jetzt unter A die Größe $\mu^{\frac{1}{4}}\cos^{\frac{1}{2}}\vartheta$, unter B die Größe $\varepsilon^{\frac{1}{4}}$ versteht. Auch hier ist die erste Annäherung wieder mit den entsprechenden Formeln für die Unstetigkeitsebene identisch, wie wir wieder nur im Falle $\mu = 1$ verifizieren wollen. Wir haben

$$\frac{J^{*\prime\prime}}{J^{*\prime}} = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta - \sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta_0}{\sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta + \sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta_0}\right)^2 = \left(\frac{\sin 2\vartheta - \sin 2\vartheta_0}{\sin 2\vartheta + \sin 2\vartheta_0}\right)^2 = \frac{\mathrm{tg}^2(\vartheta - \vartheta_0)}{\mathrm{tg}^2(\vartheta + \vartheta_0)},$$

und das ist tatsächlich *die andere Fresnelsche Formel*.

---

*) P. Drude, a. a. O. S. 265—270.

Aber auch die Glieder mit $\frac{\nu^2}{c^2}$ sind den Physikern bekannt. Es hat sich herausgestellt, daß die Beobachtungen über die Reflexion und Brechung an der Grenze zweier Medien durch die Fresnelschen Formeln nicht immer genügend dargestellt werden, vor allen Dingen nicht im Falle einer senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Welle, die in der Nähe des Polarisationswinkels auffällt. Drude*) hat mit Erfolg versucht, diese Abweichungen durch *eine dünne Grenzschicht* zu erklären, durch eine Schicht, in der die Dielektrizitätskonstante stetig von dem einem Wert auf den anderen übergeht. Er leitet die Formeln für eine solche Grenzschicht durch ein Näherungsverfahren direkt aus den Maxwellschen Gleichungen her und gewinnt so Korrektionsglieder für die Fresnelschen Formeln. Diese Glieder sind genau identisch mit den zweiten Gliedern unserer Entwicklung. Wir sehen also: *die Fresnelschen Formeln sind die ersten, die Drudeschen die zweiten Glieder einer beständig konvergenten Entwicklung nach Potenzen des Quotienten der Dicke der Grenzschicht und der Wellenlänge der betrachteten Strahlung im Äther.*

12. Asymptotische Entwicklung von φ und ψ nach fallenden Potenzen von ν.

Wir kommen nun zu dem entgegengesetzten Falle, der uns etwas länger beschäftigen wird, dem Falle, wo die Frequenz ν groß ist. Wir werden auch hier für unsere fundamentalen Funktionen φ und ψ Reihenentwicklungen nach Potenzen von ν, diesmal natürlich nach fallenden Potenzen, finden, aber diese Reihenentwicklungen *konvergieren* jetzt *nicht* nach den Funktionen φ und ψ, sondern sind nur zu ihnen *asymptotisch.*

Wir brauchen, um das beweisen zu können, *nicht die* eben gemachte *Voraussetzung,* daß ε und μ nach rechts hin schließlich konstant werden, aber wir kommen anderseits hier auch nicht mit den in der Einleitung über diese Größen gemachten Voraussetzungen aus. Es genügt dagegen die Voraussetzungen, die wir über die Funktionen ε, μ und ihre *beiden ersten* Ableitungen gemacht haben, auf *alle* Ableitungen von ε und μ auszudehnen. *ε und μ sollen* also *stückweise beliebig oft differentiierbar sein, alle Ableitungen von ε und μ sollen sich für* $\lim x = \pm \infty$ *der Grenze Null nähern und nach beiden Seiten hin absolut integrabel sein.* Daraus folgt wieder insbesondere, ε und μ und jede Ableitung von ε und μ ist für die aus allen (reellen) x bestehende Punktmenge beschränkt. Auch diese Voraussetzungen sind nicht allzu eng.

Wir brauchen diese Voraussetzungen wesentlich deshalb, weil wir mit

---

*) P. Drude, a. a. O. S. 273—281.

ihrer Hilfe *zeigen* können, *daß alle Ableitungen der Größe a nach ξ sich im Unendlichen der Grenze Null nähern und von $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$ absolut integrabel sind.* Nach Gleichung (25) hat nämlich, wenn wir vorübergehend mit Strichen die Ableitungen nach x bezeichnen, die Größe a die Form

$$a = c^2\alpha^2\beta^2\gamma \sum C\gamma^l \prod \alpha^{(i)}\beta^{(j)},$$

wo die C Konstante bedeuten und die i und j ganze Zahlen größer oder gleich Null sind, die der Gleichung

$$\sum i + \sum j = 2$$

genügen. Nun beweist man leicht durch vollständige Induktion:

$$\frac{d^n a}{d\xi^n} = c^{2+n}\alpha^2\beta^2\gamma \sum C\gamma^l \prod \alpha^{(i)}\beta^{(j)},$$

$$n \geqq 0, \quad \sum i + \sum j = 2 + n.$$

Daraus sieht man zuerst, daß $\frac{d^n a}{d\xi^n}$ für die Grenzübergänge lim $\xi = \pm\infty$ gegen Null geht. Jeder Summand enthält nämlich, abgesehen von beschränkten Faktoren, wenigstens eine Ableitung von α oder β, und die geht nach Voraussetzung gegen Null. Insbesondere ist also jedes $\frac{d^n a}{d\xi^n}$ für die aus allen x bestehende Punktmenge beschränkt. Und ebenso sieht man weiter, daß $\frac{d^n a}{d\xi^n}$ nach $\xi = \pm\infty$ absolut integrabel ist; denn

$$\frac{d^n a}{d\xi^n}\frac{d\xi}{dx} = c^{1+n} \sum C\gamma^l \prod \alpha^{(i)}\beta^{(j)}$$

ist nach $x = \pm\infty$ absolut integrabel, weil jeder Summand, abgesehen von beschränkten Faktoren, wenigstens eine Ableitung von α oder β enthält, die nach Voraussetzung absolut integrabel ist.

Wir werden nun folgendes beweisen. Ist f eine der beiden Funktionen φ und ψ, so gibt es eine unendliche Reihe y (die nicht zu konvergieren braucht)

$$y = e^{H+i\nu\xi}\left(Y_0 + \frac{1}{\nu}Y_1 + \frac{1}{\nu^2}Y_2 + \cdots\right),$$

so daß für jedes $n \geqq 0$

$$f = (y + \bar{y})_n + \frac{e^H}{\nu^n} o_\xi(\nu^0),$$

$$\frac{f'}{\nu} = \left(\frac{y'}{\nu} + \frac{\bar{y}'}{\nu}\right)_n + \frac{e^H}{\nu^n} o_\xi(\nu^0).$$

Dabei bedeuten Striche jetzt wieder Ableitungen nach ξ, $\bar{y}$ bedeutet die zu y konjugiert komplexe Größe, y' ist die Reihe, die durch formales Differentiieren der Reihe y nach ξ entsteht, also

$$\frac{y'}{\nu} = e^{H+i\nu\xi} \sum_0^\infty \frac{1}{\nu^n} (i Y_n + Y'_{n-1} + H' Y_{n-1})^{*)},$$

und $o_\xi(\nu^0)$ repräsentiert eine Funktion, die für den Grenzübergang $\lim \nu = +\infty$ gleichmäßig für alle ξ verschwindet. $Y_0, Y_1, \cdots$ sind Funktionen von ξ und ν, die stückweise beliebig oft differentiierbar sind und von denen jede absolut genommen für alle ξ und für alle $\nu \geqq \nu_0$

$$\nu_0 = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha\, d\xi|$$

unter einer festen Grenze bleibt. Wir wollen diese Aussage kurz zusammenfassen in den Satz: die unendliche Reihe $y + \bar{y}$ ist für alle ξ gleichmäßig asymptotisch zu der Funktion f.

Die Funktionen φ und ψ genügen der Differentialgleichung (21)

$$f'' - 2H'f' + \nu^2 f = 0.$$

Über die asymptotische Darstellung der Lösung einer solchen Differentialgleichung für große Werte von ν liegen Arbeiten von J. Horn**) und von O. Blumenthal***) vor. Diese enthalten aber nicht ohne weiteres einen Beweis des eben formulierten Satzes: in unserem Falle liegen besondere Verhältnisse vor, die Eigenart der Grenzbedingungen bei $\xi = \pm\infty$, die unendliche Länge des Intervalls und die Sprungstellen der Funktion α. Anderseits gestaltet sich die Beweisführung teilweise besonders einfach wegen der einfachen Form der Differentialgleichung. Es wird also wieder das Bequemste sein, wir führen den Beweis für den obigen Satz hier vollständig durch, ohne uns auf die genannten Arbeiten zu beziehen: in Wirklichkeit schließen wir uns an die Blumenthalsche Arbeit an, weil die dort auseinandergesetzte Methode sich am einfachsten auf die vorliegenden Verhältnisse übertragen läßt und die bequemste Restabschätzung liefert.

Der *Beweis unseres Satzes* wird sich so gestalten. Wir definieren *zunächst* die Funktionen $Y_0, Y_1, \cdots$, beweisen *dann* einige einfache Sätze über sie und zeigen *endlich*, daß die unendliche Reihe $y + \bar{y}$ gleichmäßig für alle ξ zu f asymptotisch ist. In allen drei Fällen gehen wir *schrittweise* vor: nach unseren Voraussetzungen kann man die ξ-Achse von rechts nach links hin so in endlich viele Intervalle

$$s_1, s_2, \cdots, s_m, \quad s_p = (\xi_{p+1}, \xi_p), \quad \xi_1 = +\infty, \xi_{m+1} = -\infty$$

*) Unter Größen mit dem Index -1 ist hier und im Folgenden immer Null verstanden.

**) J. Horn, a. a. O.

***) O. Blumenthal, Über asymptotische Integration linearer Differentialgleichungen mit Anwendung auf eine asymptotische Theorie der Kugelfunktionen. Arch. d. Math. u. Phys., III. Reihe, Bd. 19 (1912), S. 136—174.

teilen, daß die Funktion a im Innern jedes Intervalls beliebig oft vollständig, an den Enden wenigstens beliebig oft nach innen hin differentiierbar ist, und wir gestalten dementsprechend unsere Definitionen und Beweise so, daß wir mit dem Intervall s_1 beginnen, dann zum Intervall s_2 übergehen und schließlich bei dem Intervall s_m enden.

Die Definition der Reihe y wird natürlich *so eingerichtet, daß sie der Differentialgleichung* **formal** *genügt.* Man sieht leicht, dafür ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden Differentialgleichungen erfüllt sind:

$$(36)\qquad \begin{aligned} &Y_0' = 0, \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &Y_n' = \frac{i}{2}(Y_{n-1}'' + a\,Y_{n-1}). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun zunächst *das Intervall* s_1 und integrieren diese Gleichungen folgendermaßen

$$\begin{aligned} &Y_0 = A, \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &Y_n = \frac{i}{2}\Big(Y_{n-1}' + \int_{+\infty}^{\xi} a\,Y_{n-1}\,d\xi\Big). \end{aligned}$$

Dabei ist unter A die Größe $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{2i}$ verstanden, je nachdem es sich um die Funktion φ oder ψ handelt. Diese Definition ist zulässig: denn die Integrale rechts existieren, weil a über s_1 absolut integrabel ist und man leicht durch vollständige Induktion zeigt, daß Y_k und jede Ableitung von Y_k in s_1 beschränkt ist. Weiter zeigt man leicht durch vollständige Induktion, daß jede Ableitung von Y_k über das Intervall s_1 absolut integrabel ist. Endlich sieht man ebenso, daß Y_k und jede Ableitung von Y_k mit alleiniger Ausnahme der Funktion Y_0 sich für $\lim \xi = +\infty$ der Grenze Null nähert.

Wir kommen zum *Intervall* s_2. Wir wollen die Y_k über das Intervall s_2 so fortsetzen, daß $(y+\bar{y})_n$ und $(y'+\bar{y}')_n$ in dem gemeinsamen Endpunkte ξ_2 der Intervalle s_1 und s_2 stetig sind. Das ist nur möglich, wenn wir für die Funktionen Y_k und $\overline{Y}_k$ Unstetigkeiten zulassen. Die Bedingungen für die Stetigkeit von $(y+\bar{y})_n$ und $(y'+\bar{y}')_n$ lauten, wenn wir abkürzend

$$\Delta_2\chi = \chi(\xi_2 - 0) - \chi(\xi_2 + 0)$$

setzen:

$$\begin{aligned} &e^{i\nu\xi_2}\Delta_2 Y_k + e^{-i\nu\xi_2}\Delta_2\overline{Y}_k = 0, \\ &e^{i\nu\xi_2}(i\Delta_2 Y_k + \Delta_2(Y_{k-1}' + H'Y_{k-1})) + e^{-i\nu\xi_2}(-i\Delta_2\overline{Y}_k + \Delta_2(\overline{Y}_{k-1}' + H'\overline{Y}_{k-1})) = 0. \end{aligned}$$

Dafür können wir auch die folgende Gleichung schreiben

$$(37,k)\qquad 2\Delta_2 Y_k = i\Delta_2(Y_{k-1}' + H'Y_{k-1}) + i\,e^{-2i\nu\xi_2}\Delta_2(\overline{Y}_{k-1}' + H'\overline{Y}_{k-1})$$

und eine zweite, die aus dieser hervorgeht, indem wir darin jede Größe durch die konjugiert komplexe ersetzen. Und nun integrieren wir die Gleichungen (36) für das Intervall s_2 folgendermaßen. Wir setzen zunächst

$$Y_0 = A. \tag{38}$$

Auf der rechten Seite von (37, 1) sind nun alle Größen bekannt; wir bestimmen also $\Delta_2 Y_1$ daraus und setzen

$$Y_1 = Y_1(\xi_2 + 0) + \Delta_2 Y_1 + \frac{i}{2}\left(Y_0'(\xi) - Y_0'(\xi_2 - 0) + \int_{\xi_2}^{\xi} a\, Y_0\, d\xi\right).$$

Nun kennen wir wieder auf der rechten Seite von (37, 2) alle Größen: wir können also nach demselben Verfahren Y_2 berechnen. So geht das fort: wir können also die Funktionen $Y_0, Y_1, \cdots$ über das Intervall s_2 so fortsetzen, daß die Differentialgleichung formal befriedigt wird und $(y + \bar{y})_n$ und $(y' + \bar{y}')_n$ in ξ_2 stetig sind.

Während die Y_k im Intervalle s_1 von ν unabhängig sind, hängen sie nach den Gleichungen (37) in s_2 im allgemeinen von ν ab. Es gelten aber *zwei Sätze*, die wir später gebrauchen. Der *erste* lautet: jede Funktion Y_k und jede Ableitung von Y_k bleibt für alle ξ des Intervalles s_2 und für alle $\nu \geqq \nu_0$ unter einer festen Schranke; der *zweite*: jede Größe

$$\int_{\xi_2}^{\xi_3} \left| Y_k^{(l)}\, d\xi \right| \qquad (l \geqq 1)$$

bleibt für alle $\nu \geqq \nu_0$ unter einer festen Grenze. Diese beiden Sätze gelten auch für das Intervall s_1, wenn wir uns an das erinnern, was wir eben über das Verhalten der Funktionen Y_k und ihrer Ableitungen in s_1 bewiesen haben, und bedenken, daß sie dort von ν überhaupt nicht abhängen. Man zeigt den ersten Satz leicht durch vollständige Induktion: die Behauptung ist richtig für $k = 0$; lassen wir sie für k gelten, so gilt sie nach $(37, k+1)$ auch für $\Delta_2 Y_{k+1}$, sie gilt für die Größe $Y_{k+1}(\xi_2 + 0)$, weil sie für die Funktion Y_{k+1} in s_1 gilt, sie gilt für $Y_k'(\xi)$ und $Y_k'(\xi - 0)$, und sie gilt für

$$\int_{\xi_2}^{\xi} a\, Y_k\, d\xi,$$

weil

$$\left| \int_{\xi_2}^{\xi} a\, Y_k\, d\xi \right| \leqq \int_{\xi_2}^{\xi_3} |a| \cdot |Y_k| \cdot |d\xi| \leqq |Y_k(\theta)| \cdot \int_{\xi_2}^{\xi_3} |a\, d\xi| \qquad \xi_3 \leqq \theta \leqq \xi_2$$

ist und sie für $Y_k(\theta)$ und die von ξ und ν nicht abhängige Größe

$$\int_{\xi_2}^{\xi_3} |a\, d\xi|$$

gilt: sie gilt also für Y_{k+1}; für jede Ableitung von Y_{k+1} gilt sie aber

deshalb, weil sich eine solche linear zusammensetzt aus Y_k und endlich vielen Ableitungen von Y_k mit Koeffizienten, die von ν nicht abhängen und für s_2 beschränkt sind. Der erste Satz ist also bewiesen. Ganz ähnlich beweist man den zweiten: er gilt für $k = 0$; lassen wir ihn für k gelten, dann ist in

$$Y_{k+1}^{(l)} = \frac{i}{2}\left(Y_k^{(l+1)} + (a\,Y_k)^{(l-1)}\right)$$

das erste Glied über s_2 absolut integrabel; das zweite Glied ist es aber auch: es besteht nämlich aus endlich vielen Summanden der Form

$$C\,a^{(r)}\,Y_k^{(s)} \qquad (r \geqq 0, s \geqq 0),$$

und jedes $Y_k^{(s)}$ liegt nach dem vorigen Satze für alle ξ des Intervalles s_2 und für alle $\nu \geqq \nu_0$ unter einer endlichen Grenze, während die $a^{(r)}$ von ν nicht abhängen und nach den gemachten Voraussetzungen über das Intervall s_2 absolut integrabel sind. Unsere beiden Sätze gelten also für s_2; da sie andrerseits für s_1 gelten, so gelten sie auch für das Intervall $s_1 + s_2$.

Wir können von s_2 zu s_3 übergehen, geradeso wie wir von s_1 zu s_2 gekommen sind, können dann von s_3 zu s_4 gehen und so fortfahren, bis wir bei s_m anlangen. Wir bemerken ausdrücklich, der Übergang zu dem letzten, unendlich ausgedehnten Intervalle s_m macht keine Schwierigkeiten, unsere Schlüsse gelten auch da ohne jede Änderung.

Wir haben also nun die Funktionen $Y_0, Y_1, \cdots$ für alle ξ definiert und haben bewiesen, daß jede dieser Funktionen und jede ihrer Ableitungen für alle ξ und alle $\nu \geqq \nu_0$ absolut genommen unter einer festen Grenze bleiben, daß das Integral des Betrages jeder Ableitung, über die ganze ξ-Achse erstreckt, existiert und für alle $\nu \geqq \nu_0$ unter einer festen Grenze bleibt, und daß endlich jede Funktion Y_k und jede Ableitung von Y_k mit alleiniger Ausnahme der Funktion Y_0 für $\lim \xi = +\infty$ sich der Grenze Null nähert.

Wir kommen nun zu dem *Nachweis, daß die oben konstruierte Reihe $y + \bar{y}$ zu derjenigen Lösung f unserer Differentialgleichung asymptotisch ist, die sich im Unendlichen wie*

$$e^H(A\,e^{i\nu\xi} + \bar{A}\,e^{-i\nu\xi})$$

verhält. Damit sind wir dann fertig, denn die Fälle $A = \frac{1}{2}$ und $A = \frac{1}{2i}$ entsprechen den Funktionen φ und ψ.

Wir betrachten *die Funktionen*

$$f - (y + \bar{y})_n = e^H \eta_n,$$

$$\frac{f'}{\nu} - \left(\frac{y'}{\nu} + \frac{\bar{y}'}{\nu}\right)_n = e^H\left(\frac{\eta_n'}{\nu} + \frac{H'\eta_n}{\nu}\right) + e^{H+i\nu\xi}\,\frac{Y_n' + H'Y_n}{\nu^{n+1}} + e^{H-i\nu\xi}\,\frac{\bar{Y}_n' + H'\bar{Y}_n}{\nu^{n+1}}$$

und suchen diese *abzuschätzen*. Die Funktion η_n genügt der inhomogenen Gleichung

$$\eta_n'' + (\nu^2 + a)\eta_n = \frac{2}{\nu^n} W_n, \tag{39}$$

wo abkürzend gesetzt ist

$$W_n = i e^{i\nu\xi} Y'_{n+1} - i e^{-i\nu\xi} \overline{Y}'_{n+1}.$$

Nun wissen wir von früher her, die dieser Gleichung entsprechende homogene Gleichung

$$F'' + (\nu^2 + a)F = 0$$

hat an jeder Stelle ξ_p zwei Lösungen

$$F_p = F(\xi_p, \xi) \quad \text{und} \quad \overline{F}_p = \overline{F}(\xi_p, \xi),$$

die sich dort verhalten wie $e^{i\nu\xi}$ und $e^{-i\nu\xi}$. Mit Hilfe dieser Funktionen integrieren wir die Gleichung (39) vollständig und finden

$$\eta_n = \left(C_p - \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi} W_n \overline{F}_p \, d\xi\right) F_p + \left(\overline{C}_p + \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi} W_n F_p \, d\xi\right) \overline{F}_p.$$

Durch Differentiation folgt daraus

$$\eta_n' = \left(C_p - \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi} W_n \overline{F}_p \, d\xi\right) F_p' + \left(\overline{C}_p + \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi} W_n F_p \, d\xi\right) \overline{F}_p'.$$

Wir haben also

$$e^{-H}\left(f - (y + \overline{y})_n\right) = \left(C_p - \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi} W_n \overline{F}_p \, d\xi\right) F_p$$
$$+ \left(\overline{C}_p + \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi} W_n F_p \, d\xi\right) \overline{F}_p,$$

$$e^{-H}\left(\frac{f'}{\nu} - \left(\frac{y'}{\nu} + \frac{\overline{y}'}{\nu}\right)_n\right) = \left(C_p - \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi} W_n \overline{F}_p \, d\xi\right) \left(\frac{F_p'}{\nu} + \frac{H' F_p}{\nu}\right) \tag{40}$$
$$+ \left(\overline{C}_p + \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi} W_n F_p \, d\xi\right) \left(\frac{\overline{F}_p'}{\nu} + \frac{H' \overline{F}_p}{\nu}\right)$$
$$+ e^{i\nu\xi} \frac{Y_n' + H' Y_n}{\nu^{n+1}} + e^{-i\nu\xi} \frac{\overline{Y}_n' + H' \overline{Y}_n}{\nu^{n+1}}.$$

Auf diese Weise sind jedem Intervalle *zwei konjugiert komplexe Konstanten C_p und $\overline{C}_p$* zugeordnet. Um die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen abschätzen zu können, *beweisen* wir nun noch, *daß für $p = 1, 2, \cdots, m$*

$$|C_p| = |\overline{C}_p| = \frac{1}{\nu^n} o(\nu^0)$$

ist. Die Behauptung ist sicher *richtig für* $p = 1$; denn es ist

$$C_1 = \bar{C}_1 = 0.$$

Machen wir nämlich in den letzten beiden Gleichungen den Grenzübergang $\lim \xi = \infty$, so erhalten wir unter Berücksichtigung der bekannten Eigenschaften von $F_1, \bar{F}_1, F_1', \bar{F}_1', H', Y_n, \bar{Y}_n, Y_n', \bar{Y}_n'$:

$$0 = \lim_{\xi=+\infty} (C_1 e^{i\nu\xi} + \bar{C}_1 e^{-i\nu\xi}),$$

$$0 = \lim_{\xi=+\infty} (i C_1 e^{i\nu\xi} - i\bar{C}_1 e^{-i\nu\xi}),$$

und indem wir die zweite Gleichung mit $-i$ multiplizieren und die beiden Gleichungen addieren:

$$0 = \lim_{\xi=+\infty} 2 C_1 e^{i\nu\xi}.$$

Es ist also $C_1 = \bar{C}_1 = 0$. Weiter sei die Behauptung *richtig für* p; wir beweisen sie dann *für* $p+1$ mit Hilfe einer Rekursionsformel für die C, die wir folgendermaßen gewinnen. Wir denken uns jede Gleichung (40) hingeschrieben für den Fall $p+1$ und $\xi = \xi_{p+1} - 0$ und für den Fall p $\xi = \xi_{p+1} + 0$, subtrahieren je zwei entsprechende Gleichungen voneinander und beachten, daß die linken Seiten der Gleichungen (40) in ξ_{p+1} stetig sind. Lösen wir die so entstehenden Gleichungen noch nach C_{p+1} und $\bar{C}_{p+1}$ auf, so erhalten wir die Formel

$$\begin{aligned} 2 C_{p+1} e^{i\nu\xi_{p+1}} = {} & \Big(C_p - \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi_{p+1}} W_n \bar{F}_p \, d\xi\Big)\Big(F_p - i\frac{F_p'}{\nu} + i F_p \Delta_{p+1} \frac{H'}{\nu}\Big) \\ & + \Big(\bar{C}_p + \frac{i}{\nu^{n+1}} \int_{\xi_p}^{\xi_{p+1}} W_n F_p \, d\xi\Big)\Big(\bar{F}_p - i\frac{\bar{F}_p'}{\nu} + i\bar{F}_p \Delta_{p+1} \frac{H'}{\nu}\Big) \\ & + i e^{i\nu\xi_{p+1}} \Delta_{p+1} \frac{Y_n' + H' Y_n}{\nu^{n+1}} + i e^{-i\nu\xi_{p+1}} \Delta_{p+1} \frac{\bar{Y}_n' + H'\bar{Y}_n}{\nu^{n+1}} \end{aligned}$$

und eine zweite, die hieraus entsteht, dadurch daß wir jede Größe durch die konjugiert komplexe ersetzen; dabei ist als Argument überall ξ_{p+1} zu denken. Damit haben wir die gesuchte Rekursionsformel gefunden und können nun unseren Beweis leicht führen. Wir wissen, daß es eine Zahl G gibt, so daß für alle ξ und für alle $\nu \geqq \nu_0$

$$|Y_n'| = |\bar{Y}_n'| \leqq G, \quad |Y_n| = |\bar{Y}_n| \leqq G, \quad |H'| \leqq G$$

ist, und daß ferner für alle $\nu \geqq \nu_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | Y_{n+1}' \, d\xi | = \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{Y}_{n+1}' \, d\xi| \leqq G,$$

daß also für alle $\nu \geqq \nu_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |W_n \, d\xi| \leqq 2G$$

ist, und wir wissen weiter von früher her (S. 404), daß für alle ξ und für alle $\nu \geqq \nu_0$

$$|F_p| = |\overline{F}_p| \leqq 2, \quad \left|\frac{F_p'}{\nu}\right| = \left|\frac{\overline{F}_p'}{\nu}\right| \leqq 2$$

ist: wir haben also

$$2\,|C_{p+1}| \leqq 2\left(|C_p| + \frac{4}{\nu^{n+1}} G\right)\left(4 + 4\frac{G}{\nu_0}\right) + 4\,\frac{G + G^2}{\nu^{n+1}}.$$

In dieser Formel liegt der Beweis der Behauptung: *ist*

$$|C_p| = \frac{1}{\nu^n} o(\nu^0),$$

so ist auch

$$|C_{p+1}| = \frac{1}{\nu^n} o(\nu^0).$$

Und nun sehen wir auch leicht ein, daß *die linken Seiten von* (40) *für das* p^{te} *Intervall* $\frac{1}{\nu^n} o_\xi(\nu^0)$ *sind.* Mit Hilfe der eben benutzten Abschätzungen finden wir nämlich für sie

$$|e^{-H}(f - (y + \overline{y})_n)| \leqq 4\left(|C_p| + \frac{4}{\nu^{n+1}} G\right),$$

$$\left|e^{-H}\left(\frac{f'}{\nu} - \left(\frac{y'}{\nu} + \frac{\overline{y}'}{\nu}\right)_n\right)\right| \leqq 4\left(|C_p| + \frac{4}{\nu^{n+1}} G\right)\left(1 + \frac{G}{\nu_0}\right) + 2\,\frac{G + G^2}{\nu^{n+1}},$$

und die Größen rechts sind ersichtlich $\frac{1}{\nu^n} o(\nu^0)$, weil die Größen $|C_p| = |\overline{C}_p|$ es sind.

Damit ist unser Satz über die gleichmäßige asymptotische Darstellbarkeit der Funktionen φ und ψ *vollständig bewiesen.*

Es sei also nun

$$\varphi \sim e^H \sum_0^\infty \frac{1}{\nu^k}\left(a_k \cos \nu\xi - b_k \sin \nu\xi\right),$$

$$\psi \sim e^H \sum_0^\infty \frac{1}{\nu^k}\left(c_k \cos \nu\xi - d_k \sin \nu\xi\right),$$

$$\frac{1}{\nu}\frac{d\varphi}{d\xi} \sim e^H \sum_0^\infty \frac{1}{\nu^k}\left((-b_k + a_{k-1}' + H' a_{k-1}) \cos \nu\xi - (a_k + b_{k-1}' + H' b_{k-1}) \sin \nu\xi\right),$$

$$\frac{1}{\nu}\frac{d\psi}{d\xi} \sim e^H \sum_0^\infty \frac{1}{\nu^k}\left((-d_k + c_{k-1}' + H' c_{k-1}) \cos \nu\xi - (c_k + d_{k-1}' + H' d_{k-1}) \sin \nu\xi\right).$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
J^{*\prime\prime} &= \frac{c}{16\pi} e^{-2H}\left(\left(\varphi - \frac{\psi'}{\nu}\right)^2 + \left(\psi + \frac{\varphi'}{\nu}\right)^2\right) \\
&\sim \frac{c}{16\pi}\left\{\sum_0^\infty \frac{1}{\nu^k}\Big((a_k + d_k - c'_{k-1} - H' c_{k-1}) \cos \nu\xi\right. \\
&\qquad\qquad \left. + (-b_k + c_k + d'_{k-1} + H' d_{k-1}) \sin \nu\xi\Big)\right\}^2 \\
&\quad + \frac{c}{16\pi}\left\{\sum_0^\infty \frac{1}{\nu^k}\Big(c_k - b_k + a'_{k-1} + H' a_{k-1}) \cos \nu\xi\right. \\
&\qquad\qquad \left. + (-d_k - a_k - b'_{k-1} - H' b_{k-1}) \sin \nu\xi\Big)\right\}^2 .
\end{aligned} \tag{41}
$$

Nun ist wesentlich, daß

$$a_0 = 1, \quad b_0 = c_0 = 0, \quad d_0 = -1$$

ist: das gilt für das Intervall s_1, es gilt aber auch für die folgenden Intervalle, wie die Formel (38) lehrt. Daraus folgt: in den geschweiften Klammern verschwindet das Glied $\frac{1}{\nu^0}$ identisch. *Der Ausdruck $J^{*\prime\prime}$ beginnt* also *mit einem Gliede von der Ordnung* $\frac{1}{\nu^2}$.

Das ist ein wesentliches Ergebnis: es sagt aus, wenn man sich auf die Glieder mit $\frac{1}{\nu^0}$ und $\frac{1}{\nu^1}$ beschränken kann, dann fällt die Intensität der reflektierten Welle weg. Diese Beschränkung ist nach unseren Formeln zulässig für hohe Frequenzen: wenn wir allerdings genauer nachsehen, wovon der Fehler abhängig ist, den wir damit begehen, dann finden wir, es kommt nicht eigentlich auf die Kleinheit von $\frac{1}{\nu}$ an, sondern auf die der Größe

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{2}{\nu}\int_{-\infty}^{+\infty} |a\, d\xi| .$$

Diese Größe kann *klein* sein, weil ν *groß* ist, sie kann aber auch deshalb *klein* sein, weil die Funktionen ε und μ sich *langsam* ändern und infolgedessen die Größe *a klein* ist. Wir können also wenig präzise, aber anschaulich sagen: *die Vernachlässigung der reflektierten Welle ist in unserem Medium erlaubt, wenn die Wellenlänge der betrachteten Strahlung im Äther klein ist gegen die Strecken, auf denen die Änderung von ε und μ merklich wird.*

Aus diesem Ergebnis heraus verstehen wir auch *die in dem Straubelschen Artikel zitierten*, in der Einleitung erwähnten *Arbeiten*: es sind im wesentlichen die beiden ersten Glieder einer Entwicklung der gesuchten Größen nach $\frac{1}{\nu}$ oder nach einem Parameter, der die Veränderlichkeit von

ε und μ mißt, und da kann es uns nicht wundern, wenn dabei die Energie der reflektierten Wellen wegfällt; sie würde eben erst in den späteren wieder zum Vorschein kommen. Interessant ist noch, daß in unserem speziellen Falle diese Entwicklungen nicht *konvergenten*, sondern *asymptotischen* Charakter haben.

Für das Intervall s_1 *läßt sich der Ausdruck* (41) *noch vereinfachen.* In diesem Falle ist nämlich, wie man leicht durch vollständige Induktion nachweist,

$$i(a_k + i b_k) = c_k + i d_k,$$

also

$$c_k = -b_k, \quad d_k = a_k,$$

und man erhält nach einer leichten Umformung für die Intensität der reflektierten Welle

$$J^{*\prime\prime} = \frac{c}{16\pi\nu^2}\left\{\sum_0^\infty {}^k \frac{1}{\nu^k}(a_k' + H' a_k)\right\}^2 + \frac{c}{16\pi\nu^2}\left\{\sum_0^\infty {}^k \frac{1}{\nu^k}(b_k' + H_k' b_k)\right\}^2.$$

Wenn ε und μ keine Knickstellen aufweisen, also sich s_1 von $+\infty$ bis $-\infty$ erstreckt, dann gilt dieser Ausdruck für alle ξ.

13. Konvergente Entwicklung von φ und ψ für ein langsam veränderliches Medium.

Wir wollen nun *den Fall des langsam veränderlichen Mediums oder der hohen Frequenzen von einer anderen Seite her* betrachten; bislang haben wir nämlich die letzte Eigenschaft in den Vordergrund gestellt, jetzt wollen wir uns an die erste halten. Wir denken also ν fest und lassen die Funktionen ε und μ oder, was dasselbe ist, die Funktionen α und β von einem Parameter δ abhängen und zwar so, daß sie für $\delta = 0$ unabhängig von x werden. Der Fall kleiner δ entspricht dann dem langsam veränderlichen Medium. Die am Anfange der Arbeit über α und β gemachten Voraussetzungen erweitern wir nun folgendermaßen (wieder legen wir keinen Wert auf möglichste Einschränkung der Voraussetzungen). α und β seien in der Umgebung von $\delta = 0$ analytisch:

$$(42)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + \delta\alpha_1 + \delta^2\alpha_2 + \cdots \qquad & \alpha_0 &= \text{const.},\\ \beta &= \beta_0 + \delta\beta_1 + \delta^2\beta_2 + \cdots \qquad & \beta_0 &= \text{const.}; \end{aligned}$$

beide Reihen seien zweimal nach x gliedweise differentiierbar (Striche bedeuten im folgenden Ableitungen nach x):

$$(43)\qquad \begin{aligned} \alpha' &= \delta\alpha_1' + \delta^2\alpha_2' + \cdots,\\ \beta' &= \delta\beta_1' + \delta^2\beta_2' + \cdots,\\ \alpha'' &= \delta\alpha_1'' + \delta^2\alpha_2'' + \cdots,\\ \beta'' &= \delta\beta_1'' + \delta^2\beta_2'' + \cdots. \end{aligned}$$

Die Größen α_k', β_k', α_k'', β_k'' sollen für $\lim x = \infty$ gleichmäßig in bezug auf k gegen Null streben und von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ absolut integrabel sein; außerdem sollen die Reihen:

$$(44)\qquad \begin{aligned} &\sum_0^\infty \delta^k \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_k'|\,dx, \quad \sum_0^\infty \delta^k \int_{-\infty}^{+\infty} |\beta_k'|\,dx, \\ &\sum_0^\infty \delta^k \int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_k''|\,dx, \quad \sum_0^\infty \delta^k \int_{-\infty}^{+\infty} |\beta_k''|\,dx \end{aligned}$$

für eine Umgebung von $\delta = 0$ konvergieren. Ferner setzen wir noch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz der Reihen (42) und (43) in bezug auf x in der folgenden Form voraus: sie sollen eine von x unabhängige Majorante der Form

$$(45)\qquad M \sum_0^\infty \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^k$$

besitzen. Man beweist leicht, daß unter diesen Voraussetzungen auch die Reihe

$$(46)\qquad \gamma = \sum_0^\infty \delta^k \gamma_k = (1 - m^2 \alpha^4 \beta^4)^{-\frac{1}{2}}$$

eine solche Majorante hat. Wir wählen M so groß und Δ so klein, daß die Majorante (45) für alle Reihen (42), (43), (44) und (46) ausreicht.

Wer werden nun die Lösungen Φ und Ψ der Differentialgleichung

$$(47)\qquad \frac{d^2 F}{d\xi^2} + (\nu^2 + a) F = 0,$$

die sich bei $\xi = +\infty$ verhalten wie $\cos \nu\xi$ und $\sin \nu\xi$, nach Potenzen von δ entwickeln und dabei ähnlich vorgehen wie früher bei der Untersuchung von Φ und Ψ im Unendlichen. Die Dinge liegen hier aber etwas komplizierter, wir müssen also von vorn anfangen, fassen uns aber natürlich möglichst kurz. Wir schreiben die obige Differentialgleichung zunächst so

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + \left(\nu^2 + A \frac{dx}{d\xi}\right) F = 0;$$

dabei ist abkürzend gesetzt:

$$\begin{aligned} A = c\gamma(\alpha''\alpha\beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta''\beta(\gamma^2 - 2) + \alpha'^2\beta^2(3\gamma^4 - 3\gamma^2) + \alpha'\alpha\beta'\beta(6\gamma^4 - 4) \\ + \alpha^2\beta'^2(3\gamma^4 + \gamma^2 - 6). \end{aligned}$$

Wir können schreiben:

$$(48)\qquad A = \delta A_1 + \delta^2 A_2 + \cdots$$

und ohne Schwierigkeit eine von x unabhängige Majorante der Form (45) dieser Reihe angeben. Ebenso zeigt man leicht, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A_k|\, dx$$

existiert und die Reihe

$$\sum_0^\infty k\,\delta^k \int_{-\infty}^{+\infty} |A_k|\, dx \tag{49}$$

konvergiert. Wieder denken wir uns von vornherein M so groß und Δ so klein gewählt, daß die Majorante (45) auch für die Reihen (48) und (49) ausreicht.

Wir setzen nun

$$F_0 = \cos \nu\xi \quad \text{oder} \quad F_0 = \sin \nu\xi$$

und definieren die Funktionen $F_1, F_2, \cdots$ durch folgende Rekursionsformel, deren Ursprung leicht ersichtlich ist:

$$F_n = \frac{1}{2i\nu}\Big(e^{-i\nu\xi}\int_{+\infty}^{x} e^{i\nu\xi}(A_n F_0 + A_{n-1}F_1 + \cdots + A_1 F_{n-1})\, dx$$
$$- e^{i\nu\xi}\int_{+\infty}^{x} e^{-i\nu\xi}(A_n F_0 + A_{n-1}F_1 + \cdots + A_1 F_{n-1})\, dx\Big).$$

Man zeigt durch vollständige Induktion leicht, daß diese Definition zulässig ist. Ferner zeigt man ebenso

$$|F_n| \leqq \left(\frac{1+\frac{M}{\nu}}{\Delta}\right)^n. \tag{50}$$

Man hat weiter

$$\frac{dF_n}{d\xi} = \frac{1}{2}\Big(-e^{-i\nu\xi}\int_{+\infty}^{x} e^{i\nu\xi}(A_n F_0 + A_{n-1}F_1 + \cdots + A_1 F_{n-1})\, dx$$
$$- e^{i\nu\xi}\int_{+\infty}^{x} e^{-i\nu\xi}(A_n F_0 + A_{n-1}F_1 + \cdots + A_1 F_{n-1})\, dx\Big),$$

also wegen (50)

$$\left|\frac{dF_n}{d\xi}\right| \leqq \nu\left(\frac{1+\frac{M}{\nu}}{\Delta}\right)^n.$$

Endlich ist

$$\frac{d^2F_n}{d\xi^2} = -\nu^2 F_n - (A_n F_0 + A_{n-1}F_1 + \cdots + A_1 F_{n-1})\frac{dx}{d\xi}$$
$$= -\Big(\nu^2 F + A\frac{dx}{d\xi}F\Big)_n.$$

Hieraus folgt nun ähnlich wie in dem früheren Falle, daß für eine Umgebung von $\delta = 0$ die Reihen

$$F = \sum_0^\infty \delta^n F_n, \quad F^* = \sum_0^\infty \delta^n \frac{dF_n}{d\xi}, \quad F^{**} = \sum_0^\infty \delta^n \frac{d^2F_n}{d\xi^2}$$

gleichmäßig für alle reellen x konvergieren, die Funktion F zweimal differentiierbar und

$$F^* = \frac{dF}{d\xi}, \quad F^{**} = \frac{d^2F}{d\xi^2}$$

ist. Und damit ist dann ohne weiteres gezeigt, daß für eine Umgebung von $\delta = 0$ die Funktion F der Differentialgleichung (47) genügt und die Funktionen Φ oder Ψ darstellt, je nachdem F_0 gleich $\cos \nu\xi$ oder $\sin \nu\xi$ gewählt war. Es gelten nun über *die Intensität der reflektierten Welle* genau dieselben Bemerkungen wie in dem vorigen Falle: sie *verschwindet mit* δ^2.

14. Zwei Beispiele.

Zum Schluß wollen wir *zwei spezielle Fälle von geschichteten Medien* anführen, *in denen sich* bei beliebigem ν *die Funktionen* φ *und* ψ *durch Besselsche Funktionen ausdrücken lassen.* Allerdings nützt uns diese Zurückführung nicht sehr viel, weil die Theorie der Besselschen Funktionen für die Fragestellungen, die uns interessieren, nicht ausgebildet ist. Nützlich ist die Zurückführung im wesentlichen nur für kleine und große Werte von ν: im ersten Falle liefern die Potenzreihen, im zweiten die asymptotischen Darstellungen der Besselschen Funktionen von P. Debye*) brauchbare Annäherungen; aber das interessiert uns hier weniger, denn wir haben im vorigen allgemeine und bequemere Methoden zur Behandlung dieser Fälle entwickelt.

Der erste Fall ist

$$\varepsilon = \frac{a}{x^\alpha}, \quad \mu = \frac{b}{x^\beta},$$

wo $\alpha + \beta = -2$ ist. Diese Funktionen ε und μ genügen nicht für alle x den Bedingungen, die wir gestellt haben, wir nehmen also an, daß sie nur für gewisse Intervalle gelten und daß daran Medien mit anderen elektromagnetischen Funktionen grenzen.

In diesem Falle lautet die Differentialgleichung für φ und ψ:

$$\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{\alpha}{x}\frac{df}{dx} + \frac{\nu^2}{c^2}\left(\frac{ab}{x^2} - m^2\right)f = 0.$$

*) P. Debye, Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für große Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index. Math. Ann. 67 (1909), S. 535—558.

Führen wir als unabhängige Veränderliche

$$u = i\frac{\nu}{c}mx$$

ein und setzen wir

$$f = x^{\frac{1+\alpha}{2}}F,$$

dann erhalten wir für F die Differentialgleichung

$$\frac{d^2F}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dF}{du} + \left(1 - \frac{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\nu^2}{c^2}ab}{u^2}\right)F = 0.$$

Das ist aber die Differentialgleichung der Besselschen Funktion für den Index $\left(\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 - \frac{\nu^2}{c^2}ab\right)^{\frac{1}{2}}$. Wir haben also Besselsche Funktionen mit rein imaginärem Argument und mit reellem oder rein imaginärem Index vor uns.

Der zweite Fall, der auf Besselsche Funktionen führt, ist

$$\varepsilon = a\,e^{\alpha x}, \quad \mu = b\,e^{\beta x}.$$

Die Differentialgleichung für φ und ψ lautet

$$\frac{d^2f}{dx^2} - \beta\frac{df}{dx} + \frac{\nu^2}{c^2}(ab\,e^{(\alpha+\beta)x} - m^2)f = 0.$$

Wir führen als unabhängige Veränderliche ein

$$u = \frac{2\nu}{c(\alpha+\beta)}\sqrt{ab}\,e^{\frac{\alpha+\beta}{2}x}$$

und setzen

$$f = e^{\frac{\beta}{2}x}F;$$

dann erhalten wir für F die Differentialgleichung

$$\frac{d^2F}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dF}{du} + \left(1 - \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 + \frac{4\nu^2m^2}{c^2(\alpha+\beta)^2}}{u^2}\right)F = 0.$$

In diesem Falle werden wir also auf Besselsche Funktionen mit reellem Argument und reellem Index geführt. In beiden Fällen sind die Indizes nicht etwa ganzzahlig, sondern ändern sich stetig mit ν bzw. m und ν.

$x \leq -d$	$-d \leq x \leq 0$	$x \geq 0$
$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = e^{\frac{2\nu}{c}(x+d)}$	$\varepsilon = e^{\frac{2\nu}{c}d}$
$\mu = 1$	$\mu = 1$	$\mu = 1$

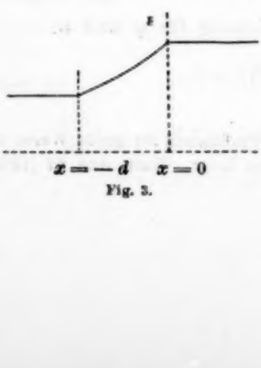


Fig. 3.

Die letzten Formeln enthalten ein einfaches *Beispiel dafür, daß die Intensität der reflektierten Welle nicht etwa stets monoton zunimmt.* Wir haben diese Möglichkeit schon früher behauptet und wollen sie nun beweisen. Das Beispiel ist durch nebenstehende Figur gegeben.

Das Argument der in Betracht kommenden Besselschen Funktionen ist in diesem Falle $u = e^{\frac{v}{c}(x+d)}$, der Index m. Nun reduzieren sich aber die Besselschen Funktionen, deren Index ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist, auf Kreisfunktionen: wir wählen also $m = \frac{1}{2}$, lassen also den Strahl unter dem Winkel $\frac{\pi}{6}$ einfallen.

Für $x \geqq 0$ ist dann

$$\varphi = \cos \frac{v}{c} u_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}}\, x, \quad \frac{1}{v}\frac{d\varphi}{d\xi} = -\sin \frac{v}{c} u_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}}\, x,$$

$$\psi = \sin \frac{v}{c} u_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}}\, x, \quad \frac{1}{v}\frac{d\psi}{d\xi} = \cos \frac{v}{c} u_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}}\, x.$$

Daran setzen sich für $-d \leqq x \leqq 0$ stetig

$$\varphi = \frac{JY_0' - YJ_0'}{J_0Y_0' - Y_0J_0'}, \quad \frac{1}{v}\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4u^2}}} \frac{J'Y_0' - Y'J_0'}{J_0Y_0' - Y_0J_0'},$$

$$\psi = \sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}} \frac{YJ_0 - JY_0}{Y_0'J_0 - J_0'Y_0}, \quad \frac{1}{v}\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4u^2}}} \frac{Y'J_0 - J'Y_0}{Y_0'J_0 - J_0'Y_0}.$$

Dabei haben alle Besselschen Funktionen den Index $\frac{1}{2}$ und das Argument u_0 oder u, je nachdem der Index Null hinzugesetzt ist oder nicht.

Nun ist

$$J_{\frac{1}{2}}(u) = \left(\frac{2}{\pi u}\right)^{\frac{1}{2}} \sin u,$$

$$Y_{\frac{1}{2}}(u) = -\left(\frac{2}{\pi u}\right)^{\frac{1}{2}} \cos u.$$

Wir haben also

$$\varphi = \left(\frac{u_0}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos(u-u_0) + \frac{1}{2u_0} \sin(u-u_0)\right),$$

$$\psi = \left(\frac{u_0}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}} \sin(u-u_0),$$

$$\frac{1}{v}\frac{d\varphi}{d\xi} = \left(\frac{u_0}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4u^2}}} \left(\left(\frac{1}{2u_0} - \frac{1}{2u}\right)\cos(u-u_0) - \left(1 + \frac{1}{4uu_0}\right)\sin(u-u_0)\right),$$

$$\frac{1}{v}\frac{d\psi}{d\xi} = \left(\frac{u_0}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4u^2}}} \left(\cos(u-u_0) - \frac{1}{2u} \sin(u-u_0)\right).$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke erhalten wir durch einfache Rechnung

$$J^{*''} = \frac{c}{8\pi} u_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4u^2}}} - \sqrt{1 - \frac{1}{4u_0^2}} - \frac{1}{4uu_0\sqrt{1 - \frac{1}{4u^2}}} \cos 2(u - u_0) \right).$$

Wir nehmen noch einen bestimmten Parameterwert, etwa $u_0 = 10$, an: dann hat die Funktion $J^{*''}$ folgenden Verlauf:

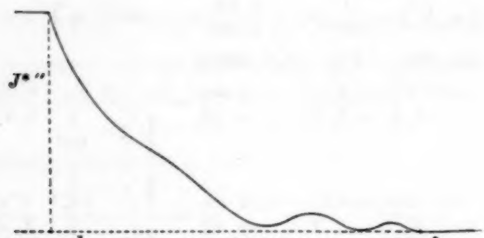


Fig. 4.

Sie nimmt also *nicht* etwa (wenn man sich die x-Achse in der Richtung des reflektierten Strahles, also von rechts nach links durchlaufen denkt) *monoton zu, sondern ist oszillatorisch.*

Zum Problem der inneren Reibung in der kinetischen Theorie.

Von

S. Boguslawski in Moskau.

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines Gases verfährt die kinetische Gastheorie nach einer Methode der sukzessiven Näherung. Sämtliche Gleichungen werden nach der freien Weglänge λ entwickelt und die Glieder dieser Entwicklung der Reihe nach betrachtet. Die innere Reibung ebenso wie die Wärmeleitung kommen in der zweiten Näherung zur Geltung, da sowohl die Reibungskonstante, wie die Wärmeleitfähigkeit eines Gases proportional λ sind. Die Idee dieser Entwicklung liegt schon den Ausführungen von H. A. Lorentz zugrunde.*) Mit voller Klarheit und Konsequenz wird sie zum leitenden Prinzip der Theorie bei D. Hilbert.**)

Will man irgend ein Problem lösen, wo die innere Reibung eine Rolle spielt, so gibt also die Gastheorie dafür die folgende Vorschrift. Man hat zuerst in den Gleichungen $\lambda = 0$ zu setzen, d. h. von der Reibung abzusehen, und so die erste Näherung zu berechnen. Die gefundene Lösung hat man in die mit λ multiplizierten Glieder einzusetzen und die Gleichungen wieder zu lösen.

Wir werden durch ein denkbar einfachstes Beispiel diese Methode illustrieren.

Es schwinge ein Gas longitudinal in einer Röhre von der Länge π, deren beide Enden geschlossen seien. An den Wänden der Röhre soll das Gas ohne Widerstand gleiten können. Die Amplitude der Schwingung sei so klein, daß die quadratischen Glieder vernachlässigt werden können. Sei $\varrho + \Delta$ die Dichte, wo ϱ die Anfangsdichte bedeutet und $\Delta \ll \varrho$ ist, u die Geschwindigkeit des Gases, c die Schallgeschwindigkeit, μ die Reibungskonstante. Die Bewegungsgleichungen lauten dann

*) H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik I, S. 72.

**) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, S. 267. Ausführlicher entwickelt in einer in Göttingen im Wintersemester 1911/12 gehaltenen Vorlesung.

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial u_0}{\partial t} + c^2 \dfrac{\partial \Delta_0}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta_0}{\partial t} + \varrho \dfrac{\partial u_0}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + c^2 \dfrac{\partial \Delta_1}{\partial x} - 2\mu \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial \Delta_1}{\partial t} + \varrho \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (1) entsprechen der ersten, die Gleichungen (2) der zweiten Approximation.

Die Anfangs- und Grenzbedingungen sind für beide Approximationen die nämlichen, und zwar sollen folgende Bedingungen angenommen werden:

$$(3)\quad \begin{cases} u_{t=0} = \sin x, \\ \Delta_{t=0} = 0, \\ u_{\substack{x=0 \\ x=\pi}} = 0. \end{cases}$$

Daß wir für die Schallgeschwindigkeit in beiden Näherungen denselben Wert zu setzen haben, folgt daraus, daß der Einfluß der Reibung hier von der zweiten Ordnung in μ und somit auch in λ ist, und folglich bei diesen Näherungen noch nicht in Betracht kommt.

Die Lösung der Gleichungen (1), welche den Anfangsbedingungen (3) entspricht, lautet offenbar:

$$(4)\quad \begin{aligned} u_0 &= \cos ct \sin x, \\ \Delta_0 &= -\frac{\varrho}{c} \sin ct \cos x. \end{aligned}$$

Setzt man nun diese Werte in (2) ein, so erhält man das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} + 2\mu \cos ct \sin x = 0, \\ &\frac{\partial \Delta_1}{\partial t} + \varrho \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

und dieses mit den Bedingungen (3) ergibt als Lösung:

$$(5)\quad \begin{aligned} u_1 &= \left(1 - \frac{2\mu t}{\varrho}\right) \cos ct \sin x, \\ \Delta_1 &= -\frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{2\mu t}{\varrho}\right) \sin ct \cos x. \end{aligned}$$

Wir bekommen somit eine Schwingung, deren Amplitude linear mit der Zeit abnimmt und schließlich negativ unendlich wird. Dieses Resultat

widerspricht dem Energieprinzip und es muß an der Methode etwas unrichtig sein.

Es ist nun leicht einzusehen, wie die bisherigen Betrachtungen abgeändert oder vielmehr ergänzt werden müssen, um den tatsächlichen Verhältnissen angepaßt zu werden.

Die Anwendbarkeit der Methode der sukzessiven Näherung setzt offenbar voraus, daß die reibungslose Bewegung als eine Näherung der wirklichen Bewegung aufgefaßt werden kann. Nun ist dies natürlich nicht immer möglich. In dem betrachteten Spezialfall ändert sich die Amplitude der reibungslosen Bewegung mit der Zeit gar nicht, während die tatsächliche Bewegung, wie wir wissen, gedämpft ist, so daß für große Zeiten die Amplitude unendlich klein wird. Erstere kann also keineswegs für beliebig große Zeitintervalle als eine erste Näherung aufgefaßt werden.

Aber angenommen, wir wüßten nichts von der tatsächlichen Bewegung, wir müssen offenbar fordern, daß die gefundenen Lösungen (4) und (5) nur wenig voneinander verschieden seien. Wir kommen somit zum Schluß, daß in diesem Falle die Methode nur anwendbar ist, solange

$$\frac{2\mu t}{\varrho} \ll 1, \quad t \ll \frac{\varrho}{2\mu} \tag{6}$$

ist. Nur auf so kleine Zeitintervalle, wo diese Bedingung erfüllt ist, darf man die Methode anwenden. Dieses Zeitintervall ist aber außerordentlich klein, so daß die Lösung in dieser Form für praktische Zwecke nicht brauchbar ist.

Man sieht aber sofort, welcher Ergänzung die bisherige Methode bedarf, damit sie auf beliebig große Zeitintervalle anwendbar wird.

Hat man es mit einem großen Zeitintervall zu tun, so hat man dieses Intervall in Teile zu zerlegen, deren jeder einzelne der Bedingung (6) genügt. Für jeden Teil für sich sind die erste und zweite Näherung nacheinander zu berechnen. Wesentlich ist dabei, daß in jedem Intervall beide Näherungen mit denselben Anfangsbedingungen aufgestellt werden. Hat man für das n^{te} Intervall u_0, Δ_0 und nachher u_1, Δ_1 berechnet, so liefern u_1 und Δ_1 für das Ende dieses Intervalls genommen die Anfangsbedingungen für das $n + 1^{\text{te}}$ Intervall.

Wir wollen dieses Verfahren auf unser Beispiel anwenden. Zur Berechnung des Zustandes zur Zeit t teilen wir die Zeit zwischen 0 und t in n gleiche Intervalle von der Größe τ. Es sei also

$$n\tau = t. \tag{7}$$

Für die Zeit zwischen 0 und τ liefern (4) und (5) die Lösungen der ersten und zweiten Näherung. Aus (5) finden wir für $t = \tau$

$$(8)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right) \cos c\tau \sin x, \\ \Delta_1 &= -\frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right) \sin c\tau \cos x. \end{aligned}$$

Dies sind die Anfangsbedingungen für das zweite Intervall. Auf dieses wenden wir wiederum das Näherungsverfahren an. Es lautet in diesem Intervall die erste Approximation

$$\begin{aligned} u_0 &= \left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right) \cos ct \sin x, \\ \Delta_0 &= -\frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right) \sin ct \cos x, \end{aligned}$$

und für die zweite Approximation ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial u_1}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial x} + 2\mu \left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right) \cos ct \sin x = 0, \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial t} + \varrho \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Die den Anfangsbedingungen (8) genügende Lösung dieser Gleichungen ist

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{2\mu(t-\tau)}{\varrho}\right) \cos ct \sin x, \\ \Delta_1 &= -\frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{2\mu(t-\tau)}{\varrho}\right) \sin ct \cos x. \end{aligned}$$

Für das Ende des zweiten Intervalls hat man

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right)^2 \cos 2c\tau \sin x, \\ \Delta_1 &= -\frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right)^2 \sin 2c\tau \cos x. \end{aligned}$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man am Ende des n^{ten} Intervalls

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right)^n \cos nc\tau \sin x, \\ \Delta_1 &= -\frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{2\mu\tau}{\varrho}\right)^n \sin nc\tau \cos x. \end{aligned}$$

Setzt man hier gemäß (7) $\tau = \frac{t}{n}$ und läßt n groß werden, so hat man die bekannte Lösung

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-\frac{2\mu t}{\varrho}} \cos ct \sin x, \\ \Delta_1 &= -\frac{\varrho}{c} e^{-\frac{2\mu t}{\varrho}} \sin ct \cos x. \end{aligned}$$

Diese Lösung genügt den Gleichungen der klassischen Hydrodynamik, welche lauten

$$(9)\qquad \begin{aligned} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \frac{\partial \Delta}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial \Delta}{\partial t} + \varrho \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir allgemeiner beweisen, was wir an dem speziellen Beispiel erkannt haben.

Hat man die Zeit in Intervalle eingeteilt und so stückweise die Lösung in zweiter Näherung ermittelt, und läßt man jetzt die Intervalle unendlich klein werden, so erhält man eine Lösung, welche den Differentialgleichungen (9) genügt, wie auch die Anfangs- und Grenzbedingungen lauten mögen.

Um das zu beweisen, beachten wir zunächst, daß die Differenzen $u_1 - u_0$ und $\Delta_1 - \Delta_0$ den Differentialgleichungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} \varrho \frac{\partial (u_1 - u_0)}{\partial t} + c^2 \frac{\partial (\Delta_1 - \Delta_0)}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial (\Delta_1 - \Delta_0)}{\partial t} + \varrho \frac{\partial (u_1 - u_0)}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

und den Anfangsbedingungen

$$(11)\qquad \begin{aligned} u_1 - u_0 = 0, \\ \Delta_1 - \Delta_0 = 0 \end{aligned}$$

zu Anfang eines jeden Intervalls genügen. Entwickelt man $u_1 - u_0$ nach Potenzen der Zeit und nimmt die Intervalle so klein, daß man mit dem ersten Gliede der Entwicklung abbrechen darf, so folgt aus (10) und (11) für das $n + 1^{\text{te}}$ Intervall

$$(12)\qquad u_1 - u_0 = \frac{2\mu}{\varrho} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)_{t = n\tau} \cdot (t - n\tau).$$

Genügen nun u und Δ den Differentialgleichungen (9), so hat man für die Differenzen $u - u_1$ und $\Delta - \Delta_1$ die Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varrho \frac{\partial (u - u_1)}{\partial t} + c^2 \frac{\partial (\Delta - \Delta_1)}{\partial x} - 2\mu \frac{\partial^2 (u - u_1)}{\partial x^2} - 2\mu \frac{\partial^2 (u_1 - u_0)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial (\Delta - \Delta_1)}{\partial t} + \varrho \frac{\partial (u - u_1)}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Wir haben zu beweisen, daß $u - u_1$ mit abnehmendem τ gegen Null konvergiert.

Wir betrachten die Gleichungen (13) für sämtliche Intervalle der Reihe nach.

Im ersten Intervalle gelten die Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} (u - u_1)_{t=0} = 0, \\ (\Delta - \Delta_1)_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Wir setzen in die erste der Gleichungen (13) den Wert von $u_1 - u_0$ aus (12) (mit $n = 0$) und finden, daß die Potenzentwicklung für $u - u_1$ mit dem Gliede anfängt:

(14)
$$u - u_1 = \frac{4\mu^2}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}\right)_{t=0} \frac{t^2}{2}.$$

Gehen wir nun zum zweiten Intervall über, so folgt aus (14) als Anfangsbedingung für dieses Intervall:

$$(u - u_1)_{t=\tau} = \frac{2\mu^2}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}\right)_{t=0} \tau^2,$$

und als Lösung von (13), die dieser Anfangsbedingung genügt:

$$u - u_1 = \frac{2\mu^2}{\varrho^2}\left[\left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}\right)_{t=0} \tau^2 + \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}\right)_{t=\tau} (t-\tau)^2\right].$$

Fährt man so fort, so hat man am Schluß des n^{ten} Intervalls

$$u - u_1 = \frac{2\mu^2\tau^2}{\varrho} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}\right)_{t=k\tau}.$$

Die absoluten Beträge von $\frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4}$ liegen sämtlich unterhalb einer gewissen oberen Grenze, die wir M nennen wollen. Dann ist

$$|u - u_1| < \frac{2\mu^2\tau^2 n M}{\varrho}.$$

Für τ ist hier wieder $\frac{t}{n}$ zu setzen und so erhält man

$$|u - u_1| < \frac{2\mu^2 t^2 M}{n\varrho}.$$

Mit wachsendem n konvergiert dieser Ausdruck gegen Null. Damit ist bewiesen, daß die aus einzelnen Stücken aufgebaute Funktion u_1 mit wachsender Anzahl der Teilintervalle gegen die Funktion u konvergiert, welche den klassischen Differentialgleichungen (13) genügt. Dasselbe gilt natürlich auch für die Dichten Δ_1 und Δ.

Die kinetische Gastheorie führt somit nicht zu einer neuen Form von Differentialgleichungen, sondern zu einer neuen Begründung der üblichen Gleichungen.

Aber sie leistet zugleich noch mehr. Sie gestattet die Lösung eindeutig festzulegen, während das bei den gewöhnlichen Gleichungen mit den üblichen Anfangs- und Grenzbedingungen nicht immer der Fall ist. Diese Unbestimmtheit wird dadurch bedingt, daß die Bewegungsgleichung die *zweite* Ableitung der *gesuchten* Geschwindigkeit nach der Koordinate

enthält. (Bei unserem speziellen Problem kommt diese Unbestimmtheit nicht zur Geltung.) Demgegenüber hat man bei der Methode der sukzessiven Approximation stets mit Gleichungen erster Ordnung zu tun. Diesen Vorteil hat Herr Prof. Hilbert in seiner Vorlesung über Gastheorie hervorgehoben.

Mutatis mutandis gilt alles gesagte auch für das Problem der Wärmeleitung in Gasen. Auch hier dürfen die Gleichungen der kinetischen Theorie nur auf kleine Zeitintervalle angewandt werden.

Göttingen, 4. September 1914.

Über das Problem der Wohlordnung.

Von

F. Hartogs in München.

Im folgenden gebe ich für den Satz, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, einen Beweis, der sich von den beiden Zermeloschen Beweisen (Math. Ann. Bd. 59, S. 514 und Bd. 65, S. 107) dadurch unterscheidet, daß das sogenannte Auswahlprinzip bei ihm nicht zur Anwendung kommt, dafür jedoch eine Prämisse anderer Art benutzt wird, nämlich die Annahme der „Vergleichbarkeit der Mengen" (nach welcher unter zwei gegebenen unendlichen Mengen sich stets mindestens eine befinden muß, welche einer Teilmenge der anderen äquivalent ist).*) Hiernach kann also der Wohlordnungssatz als eine Folgerung aus der Vergleichbarkeit der Mengen aufgefaßt werden. Berücksichtigt man nun andererseits den Umstand, daß umgekehrt die Vergleichbarkeit der Mengen eine unmittelbare Folge aus dem Wohlordnungssatze ist, sowie ferner, daß, wie die Zermeloschen Beweise zeigen, der Wohlordnungssatz mit dem Auswahlprinzip gleichwertig ist, so ergibt sich schließlich, daß alle drei Prinzipe, nämlich erstens das Auswahlprinzip, zweitens die Vergleichbarkeit der Mengen, drittens die Wohlordnungsfähigkeit der Mengen, als gleichwertig betrachtet werden müssen, in dem Sinne, daß jedes der drei Prinzipe die Gültigkeit der beiden anderen nach sich zieht.

Wird von den drei genannten Prinzipen keines vorausgesetzt, so liefern die folgenden Betrachtungen immer noch einen Nachweis für den Satz, daß es keine Menge geben kann, deren Mächtigkeit größer ist als die Mächtigkeit jeder beliebigen wohlgeordneten Menge.**)

Als Grundlage für die folgenden Ausführungen habe ich die von Herrn Zermelo in seiner Abhandlung „Untersuchungen über die Grundlagen der

*) Diese Annahme wird übrigens beim nachfolgenden Beweise nur für den Fall angewandt, daß von den beiden gegebenen Mengen die eine wohlgeordnet ist.

**) Dieser Satz ist meines Wissens ohne Anwendung des Auswahlprinzips bisher noch nicht streng bewiesen worden.

Mengenlehre I" (Math. Ann. Bd. 65, S. 261) aufgestellten Axiome gewählt, wobei das das Auswahlprinzip enthaltende Axiom VI natürlich fortgelassen werden mußte. Die Aufgabe, alle im Beweise vorkommenden Begriffe und Sätze auf ihre Unabhängigkeit vom Auswahlprinzip zu prüfen, wird dabei allerdings durch den Umstand etwas erschwert, daß die von Zermelo gegebene axiomatische Durcharbeitung der Mengenlehre sich noch nicht auf die Lehre von den geordneten und den wohlgeordneten Mengen erstreckt.*) Ich habe aus diesem Grunde den Beweis, wenn auch zum Teil auf Kosten der Kürze**), so gestaltet, daß möglichst wenig Begriffe und Sätze vorkommen, welche jenen Teilen der Mengenlehre angehören. Sämtliche auf die Mengenlehre bezüglichen Begriffe und Sätze, welche beim Beweise benutzt werden, habe ich, um die Prüfung auf ihre Unabhängigkeit vom Auswahlprinzip zu erleichtern, überdies in einem besonderen Verzeichnis zusammengestellt, das ich hier zunächst folgen lasse.

Begriffe: a) Element und Menge, Äquivalenz zweier Mengen, größere und kleinere Mächtigkeit.***)

b) Geordnete Menge, Ähnlichkeit zweier geordneter Mengen, wohlgeordnete Menge, Abschnitt einer wohlgeordneten Menge.

Sätze:

1. *Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch untereinander ähnlich.* (Cantor, Math. Ann. 46, S. 497.)

2. *Jede Teilmenge einer wohlgeordneten Menge ist selbst eine wohlgeordnete Menge.* (Cantor, Math. Ann. 49, S. 209, Satz C.)

3. *Jede einer wohlgeordneten Menge ähnliche Menge ist gleichfalls eine wohlgeordnete Menge.* (Ebenda, Satz D.)

4. *Gilt für jedes Element einer geordneten Menge L, daß die ihm vorangehenden Elemente eine wohlgeordnete Menge bilden, so ist L selbst wohlgeordnet.*†)

5. *Eine wohlgeordnete Menge ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich.* (Ebenda, S. 211, Satz B.)

---

*) Über die Definition der geordneten und der wohlgeordneten Menge im Rahmen der Zermeloschen Theorie siehe den Anhang zu dieser Arbeit.

**) Z. B. hätten sich durch Anwendung des Begriffs und der Eigenschaften der Ordnungszahl gewisse Vereinfachungen erzielen lassen.

***) Bei den unter a) aufgeführten Begriffen kann die Unabhängigkeit vom Auswahlaxiom unmittelbar aus den Zermeloschen „Grundlagen" entnommen werden.

†) Beweis: Sei L_0 eine beliebige Teilmege von L, a ein beliebiges Element von L_0. Ist dann a nicht selbst schon das erste Element von L_0, so betrachte man die dem a vorangehenden Elemente von L_0; die aus ihnen bestehende Menge ist wohlgeordnet (als Teilmenge derjenigen wohlgeordneten Menge, die aus sämtlichen dem a vorangehenden Elemente von L gebildet ist); ihr erstes Element ist aber zugleich das erste Element von L_0.

6. *Zwei wohlgeordnete Mengen sind entweder einander ähnlich oder eine von ihnen ist einem Abschnitte der anderen ähnlich.* (Ebenda, S. 215, Satz N.)

Endlich wird noch von folgendem auf den Mengenbegriff selbst bezüglichen Ausspruch Gebrauch gemacht werden.*)

7. *Jeder Menge M entspricht eine Menge M^0, welche als Elemente alle geordneten Mengen enthält, deren Elemente mit denen von M identisch sind.***)

Als unmittelbare Folgerung hieraus ergibt sich, indem man den Ausspruch auf alle Untermengen einer gegebenen Menge M anwendet und die Zermeloschen Axiome IV (Axiom der Potenzmenge) und V (Axiom der Vereinigung) benutzt:

7a. *Jeder Menge M entspricht eine Menge M_0, welche als Elemente alle geordneten Mengen enthält, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.*

Diejenigen Elemente von M_0, welche wohlgeordnete Mengen sind, bilden gemäß Axiom III (Axiom der Aussonderung) eine Teilmenge M_ω von M_0, also ebenfalls eine Menge. So ergibt sich die Aussage in derjenigen engeren Fassung, in der sie nachher benutzt werden wird:

7b. *Jeder Menge M entspricht eine Menge M_ω, welche als Elemente alle wohlgeordneten Mengen enthält, deren Elemente zugleich Elemente von M sind.*

Dabei ist selbstverständlich M_ω von Null verschieden, sofern nur M es ist.

Nach diesen Vorbemerkungen werde zum eigentlichen Beweise übergegangen.

Gegeben sei eine beliebige, endliche oder unendliche, von Null verschiedene Menge M. Wir betrachten, wie oben, alle möglichen wohlgeordneten Mengen $G, H, \cdots$, deren Elemente zugleich Elemente von M sind; zu ihnen rechnen wir auch die „Nullmenge" (welche gar kein Element enthält). Nach den vorausgeschickten Bemerkungen (Satz 7b) existiert eine (von Null verschiedene) Menge N, deren Elemente die sämtlichen wohlgeordneten Mengen $G, H, \cdots$ und nur diese sind.

Da von jeder der Mengen $G, H, \cdots$ feststeht, ob sie ähnlich G ist oder nicht, so bilden die zu G ähnlichen nach dem Axiom III (Axiom der Aussonderung) eine Untermenge g von N, ebenso die zu H ähnlichen eine

*) Über den Beweis desselben sowie der folgenden Sätze 7a und 7b innerhalb der Zermeloschen Theorie siehe den Anhang zu dieser Arbeit.

**) Hierin ist keineswegs die Behauptung enthalten, daß es solche geordneten Mengen stets geben müsse, d. h. daß jede beliebige Menge M sich ordnen lasse; vielmehr bedeutet, wenn M sich nicht ordnen lassen sollte, M^0 einfach die Nullmenge.

Untermenge h usf. Die so entstehenden Untermengen $g, h, \cdots$ von N mögen im folgenden der Bequemlichkeit wegen als „Klassen" bezeichnet werden. Eine dieser Klassen besteht nur aus der Nullmenge und heiße die Nullklasse. Aus dem Satze 1 folgt sofort, daß zwei Klassen, welche ein Element gemein haben, miteinander identisch sind. Jedes Element von N (d. h. jede der wohlgeordneten Mengen $G, H, \cdots$) gehört infolgedessen einer und nur einer Klasse an.

Wir betrachten nun diejenige Menge L, deren Elemente die sämtlichen voneinander verschiedenen Klassen sind. Dieselbe existiert auf Grund der Axiome IV (Axiom der Potenzmenge) und III (Axiom der Aussonderung) als Untermenge der Potenzmenge $\mathfrak{U}(N)$ von N, da von jeder Untermenge von N feststeht, ob sie eine Klasse ist oder nicht.

Sind g und h zwei voneinander verschiedene Klassen, G ein Element von g, H ein Element von h, so können die wohlgeordneten Mengen G und H einander nicht ähnlich sein; es ist also entweder G einem Abschnitt von H ähnlich ($G < H$) oder H einem Abschnitt von G ($H < G$). Ist z. B. $G < H$, so ist auch $G' < H'$, wo G' ein beliebiges Element von g, H' ein beliebiges Element von h bedeutet. Entweder gilt also für jedes Paar G', H' von Elementen der Klassen g und h, daß $G' < H'$, oder aber es gilt für jedes Paar, daß $H' < G'$. Im ersteren Falle schreiben wir kurz $g \prec h$, im letzteren $h \prec g$.

Sind g, h, i drei verschiedene Klassen und ist $g \prec h$, $h \prec i$, so gilt offenbar auch $g \prec i$. Es ist also auf diese Weise zwischen den Elementen der Menge L eine widerspruchslose Rangordnung hergestellt worden. Wir zeigen jetzt, daß die so geordnete Menge L auch wohlgeordnet ist.

Sei g ein beliebiges Element von L, G irgend eine der Klasse g angehörende wohlgeordnete Menge. Ist alsdann g_0 irgend ein dem g vorangehendes Element von L ($g_0 \prec g$) und G_0 ein Element von g_0, so ist G_0 einem Abschnitt A von G ähnlich*); A ist aber dann ebenfalls ein Element von g_0. Unter den Elementen der Klasse g_0 befindet sich also ein gewisser Abschnitt A von G, und zwar nur *ein* solcher, da die Elemente von g_0 lauter einander ähnliche Mengen sind. Umgekehrt ist jeder Abschnitt von G Element einer gewissen Klasse $\prec g$, und zwar nur *einer* solchen. Die Klassen, welche $\prec g$ sind, und die Abschnitte von G sind einander also ein-eindeutig zugeordnet und zwar unter Aufrechterhaltung des Ranges. Mithin bilden nach Satz 3 die Klassen, welche $\prec g$ sind (d. h. die dem Element g vorangehenden Elemente von L), eine wohlgeordnete Menge; da aber g ein beliebiges Element von L war, so ist nach

---

*) Auch zum ersten Element einer wohlgeordneten Menge gehört, wie hier und im folgenden angenommen wird, ein Abschnitt, nämlich die Nullmenge.

Satz 4 L selbst wohlgeordnet. (Das Anfangselement von L ist die Nullklasse.)

Es gilt nun ferner: *Jede der wohlgeordneten Mengen $G, H, \cdots$ ist einem Abschnitte von L ähnlich.* Genauer: Gehört die wohlgeordnete Menge G der Klasse g an, so ist G dem durch das Element g von L bestimmten Abschnitte von L ähnlich. Denn nach dem Vorigen besteht eine ein-eindeutige Beziehung unter Aufrechterhaltung des Ranges zwischen den Klassen, welche $\prec g$ sind (d. h. den dem g vorangehenden Elementen von L) einerseits und den Abschnitten von G andererseits; dies bleibt aber richtig, wenn man an Stelle der Abschnitte von G die Elemente von G treten läßt.

Hieraus folgt nun sofort: *L kann weder der Menge M selbst noch irgend einer ihrer Teilmengen äquivalent sein.* Denn wäre L äquivalent der Untermenge M_0 von M (wo M_0 auch die Menge M selbst bedeuten kann), d. h. existierte zwischen den Elementen der Menge L und denen der Menge M_0 eine gegenseitig eindeutige Zuordnung, so ließe M_0 sich auf Grund dieser Zuordnung wohlordnen und die auf solche Weise wohlgeordnete Menge M_0 wäre dann ähnlich L. Andererseits müßte jedoch diese wohlgeordnete Menge M_0, da ihre Elemente zugleich Elemente von M sind, nach dem Vorangehenden einem Abschnitt von L ähnlich sein — Widerspruch.

Damit ist festgestellt, daß zwischen den Mengen L und M mit den Mächtigkeiten $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ keinesfalls eine der beiden Beziehungen

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{l} < \mathfrak{m}$$

stattfinden kann. Ist also M eine beliebige Menge, so existiert stets eine wohlgeordnete Menge L von der Eigenschaft, daß nicht $\mathfrak{l} < \mathfrak{m}$ gilt. *Hiermit ist, ohne das Auswahlprinzip oder die Vergleichbarkeit der Mengen anzuwenden, der Nachweis geführt, daß es keine Menge geben kann, deren Mächtigkeit größer ist als die Mächtigkeit jeder beliebigen wohlgeordneten Menge.*

Setzt man jetzt noch weiter die Vergleichbarkeit der Mengen voraus, so folgt, daß für die bisher betrachteten Mengen M und L

$$\mathfrak{l} > \mathfrak{m}$$

sein muß, d. h. es existiert eine gegenseitig eindeutige Beziehung zwischen den Elementen von M und denjenigen einer gewissen Teilmenge L_0 von L. Da aber L_0 wohlgeordnet ist, so kann auf Grund dieser Beziehung auch M wohlgeordnet werden.

Anhang.

Ich verdanke einer freundlichen Mitteilung des Herrn Hessenberg die Kenntnis der Tatsache, daß der Satz 7 (und mit ihm die Sätze 7a und 7b) auf Grund der Zermeloschen Axiome vollständig bewiesen werden kann (wobei das Auswahlaxiom

nicht benutzt wird). Die Cantorsche Definition der geordneten Menge läßt sich nämlich durch eine ihr äquivalente auf die Zermeloschen Axiome gegründete ersetzen, indem man als „Ordnung" einer Menge M eine Untermenge P der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ definiert, welche die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

1. Sind R und S zwei verschiedene Elemente von P, so ist entweder S eine Teilmenge von R oder R eine Teilmenge von S.

2. Sind x und y zwei verschiedene Elemente von M, so gibt es mindestens ein Element R von P, welches genau *eines* jener beiden als Element enthält.

3. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\mathsf{P}'$ jeder Untermenge P' von P ist Element von P.

(Die Äquivalenz dieser Definition mit der Cantorschen ergibt sich auf folgendem Wege: Betrachtet man eine im Cantorschen Sinne geordnete Menge M, so hat die Menge ihrer Reste die obigen drei Eigenschaften. Ist umgekehrt P eine Menge der obigen Art und setzt man $x \prec y$, wenn es ein Element R von P gibt, welches y enthält und x nicht enthält, so erhält man eine im Cantorschen Sinne geordnete Menge und zwar ist die Menge der Reste dieser letzteren mit P identisch).

Da gemäß dieser Definition jede Ordnung von M eine Untermenge von $\mathfrak{U}M$ ist und von jeder Untermenge von $\mathfrak{U}M$ definit ist, ob sie eine Ordnung von M ist, so ist die Gesamtheit M^0 aller Ordnungen von M eine Untermenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$, jedenfalls also eine Menge, womit Satz 7 bewiesen ist.

Beim Übergang von Satz 7a zu Satz 7b wird davon Anwendung gemacht, daß unter den Ordnungen einer Menge M die Wohlordnungen ebenfalls wieder durch ein definites Kriterium im Sinne Zermelos ausgezeichnet sind. Dasselbe lautet nämlich: Die oben definierte Menge P stellt eine Wohlordnung von M dar, wenn die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\mathsf{P}'$ jeder beliebigen Untermenge P' von P ein Element von P' (nicht nur von P) ist.

Erwähnt sei noch, daß die Sätze 7a und 7b auch bewiesen werden können, ohne erst den Umweg über Satz 7 zu machen. Die obige Eigenschaft 2. der Menge P läßt sich nämlich in die folgenden zwei zerspalten:

2a. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\mathsf{P}$ von P ist M.

2b. Sind x und y zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{S}\mathsf{P}$, so gibt es mindestens ein Element R von P, welches genau *eines* jener beiden als Element enthält.

Läßt man die Eigenschaft 2a. fort, so definiert P im allgemeinen nicht mehr eine Ordnung von M, sondern eine Ordnung einer Teilmenge von M. Hiernach erweist sich also auch M_0 direkt als Teilmenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$. Ersetzt man schließlich 3. durch die weitergehende Forderung, daß die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}\mathsf{P}'$ jeder Untermenge P' von P Element von P' sei, so ist auch M_w auf direktem Wege als Teilmenge von $\mathfrak{U}\mathfrak{U}M$ gekennzeichnet.

Ansätze und Mitteilungen über die vorstehend bezeichnete Theorie der geordneten und der wohlgeordneten Mengen finden sich bei Hessenberg, Grundzüge der Mengenlehre, Kap. 28 (Abhandlungen der Friesschen Schule, neue Folge, Bd. I, Heft 4, Göttingen 1906, S. 674) ferner in desselben Autors Referat über Mengenlehre im Taschenbuch für Mathematiker und Physiker III. Jahrg. (Leipzig 1913) S. 74, endlich in Zermelos zweitem Beweise des Wohlordnungssatzes (Math. Ann. 65, S. 107).

München, Juli 1914.

On the Complete Independence of Schimmack's Postulates for the Arithmetic Mean.

By

Ralph D. Beetle of Princeton, N. J. (U. S. A.).

In a recent paper*), Schimmack gave a very elegant and interesting set of postulates for the arithmetic mean. He proved them consistent, categorical and independent. In the present paper, it is shown that the postulates of Schimmack are also of interest as an excellent illustration of the notion of *complete independence*, introduced by E. H. Moore**).

If $P_1, P_2, \cdots, P_m$ are m properties of systems S of a specified type, it is customary to regard them as *independent* in case no one of them is a logical consequence of the others. Properties, when independent in this sense, are not necessarily devoid of interrelations. For example, it may well be that non-possession of one property implies possession of another.

Moore's notion of *complete independence* is much more restrictive. The properties are *completely independent* in case neither any one of them, nor its negative, is a logical consequence of any combination formed of the others and their negatives.***) To demonstrate the ordinary independence of the m properties, it is necessary to exhibit m systems S. For each P_i, there must exist a system which does not possess the property P_i, but which does possess the remaining properties. The proof of complete independence requires the existence of 2^m types of systems S, that is, of at least one system S which possesses any given combination of the properties, but does not possess the remaining properties.

*) R. Schimmack: Der Satz vom arithmetischen Mittel in axiomatischer Begründung. Math. Ann. 68, p. 125.

**) E. H. Moore: Introduction to a form of general analysis, New Haven Mathematical Colloquium, Yale University Press (1910), p. 82.

***) For instance, Hilbert's axioms of continuity, the Archimedian postulate and the „Vollständigkeitsaxiom" are not completely independent, for the latter is inconsistent with a non-Archimedian system.

That these notions may be extended to the case where the P's are postulates regarding the systems S is evident, and it will be seen that complete independence carries with it ordinary independence and consistency. There have been very few cases in which the postulates of a system, proposed for some explicit purpose, have been shown to be completely independent. For this reason, it seems worth while to call attention to the fact that Schimmack's postulates are completely independent.

In this case, a system S is an infinite sequence of functions,

$$f_1(x_1),\ f_2(x_1, x_2),\ \cdots,\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots,$$

each defined, and real-valued, for all real values of its arguments. The four properties of Schimmack are the following:

(1) $f_n(x_1+h, x_2+h, \cdots, x_n+h) = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) + h;$

(2) $f_n(-x_1, -x_2, \cdots, -x_n) = -f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n);$

(3) $f_n(x_{r_1}, x_{r_2}, \cdots, x_{r_n}) = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n);$

(4) $f_{n+1}[f_n(x_1, \cdots, x_n), f_n(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n), x_{n+1}]$
$= f_{n+1}(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}).$

The subscripts $r_1, r_2, \cdots, r_n$ form any permutation of the integers $1, 2, \cdots, n$. The equalities are to hold for every positive integral value of n, and for all real values of h and the x's.

It is convenient to indicate the character of a system, relative to a set of postulates or properties, by the symbol $(e_1 e_2 \cdots e_m)$, in which e_i is $+$ or $-$, according as the system possesses, or does not possess, the property P_i. For each of the sixteen characters possible in the present case, we give, in the following table, a corresponding system*), and thus prove the complete independence of the postulates.

Character	System
$(+ + + +)$	$f_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$,
$(+ + + -)$	$f_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \sum_1^n \left(x_i - \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^3$,
$(+ + - +)$	$f_n = \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1 + 2 + \cdots + n}$,
$(+ - + +)$	$f_n = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

*) The first five are essentially the same as those given by Schimmack to prove the mutual consistency and ordinary independence of the postulates.

Character	System
$(-++\,+)$	$f_n = \sqrt[3]{\dfrac{x_1^3 + \cdots + x_n^3}{n}}$,
$(++--)$	$f_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \operatorname{sgn}(x_1 - x_n)$,
$(+-+-)$	$f_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + 1$,
$(-++-)$	$f_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$,
$(+--+)$	$f_n = \max\,[x_1 - \operatorname{sgn}(n-1),\ x_2, \cdots, x_n]$,
$(-+-+)$	$f_n = \sqrt[3]{\dfrac{x_1^3 + 2x_2^3 + \cdots + nx_n^3}{1+2+\cdots+n}}$,
$(--++)$	$f_n = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$,
$(+---)$	$f_n = \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{1+2+\cdots+n} + 1$,
$(-+--)$	$f_n = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$,
$(--+-)$	$f_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$,
$(---+)$	$f_n = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + nx_n^2}{1+2+\cdots+n}}$,
$(----)$	$f_n = (x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)^2$.

Princeton, N. J., May 8, 1914.

Über Möglichkeiten im Relativkalkül.

Von

Leopold Löwenheim in Berlin-Lichtenberg.

§ 1.

Definitionen.

Wir setzen $1'_{ijk} = 1'_{ij} + 1'_{ik} + 1'_{jk}$, $0'_{ijk} = 0'_{ij} 0'_{ik} 0'_{jk}$; allgemein:

$$1'_{ijkl\ldots} = 1'_{ij} + 1'_{ik} + 1'_{jk} + 1'_{il} + 1'_{jl} + 1'_{kl} \cdots,$$
$$0'_{ijkl\ldots} = 0'_{ij} 0'_{ik} 0'_{jk} 0'_{il} 0'_{jl} 0'_{kl} \cdots.$$

Man könnte übrigens auch weiter setzen:

$$1''_{ijkl\ldots} = 1'_{ij} 1'_{ik} + 1'_{ij} 1'_{il} + 1'_{ij} 1'_{kl} + 1'_{ik} 1'_{jk} + \cdots,$$
$$1'''_{ijkl\ldots} = 1'_{ij} 1'_{ik} 1'_{il} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

dual entsprechend für $0''$, $0'''$, $\cdots$.

Dann wäre z. B.

$$1'''_{ijk} = 1'_{ij} 1'_{ik} 1'_{jk} = (i = j = k) = 1''_{ijk},$$
$$1''''_{ijk} = 0.$$

$1'''_{ijk}$ und $0'''_{ijk}$ kann vielleicht wichtig sein, wird aber in dieser Abhandlung nicht benutzt werden.

Es sei noch nebenbei bemerkt, daß sich aus dem Entwicklungssatz die Definition für a' ergibt:

$$a' = a \cdot 1' + \bar{a} \cdot 0'.$$

Wir wollen im folgenden unter einem *„Relativausdruck"* stets einen Ausdruck zwischen Relativen oder (nicht notwendig binären) Relativkoeffizienten verstehen, in welchem Σ und Π nur endlich viele Male vorkommt, und wo jedes Σ bzw. Π sich erstreckt entweder über die Indizes, d. h. über sämtliche Individuen des Denkbereichs erster Ordnung, den wir mit Schröder 1^1 nennen, oder aber über sämtliche Relative, die sich mit Hilfe des Denkbereichs bilden lassen. Alle Summen und Produkte, welche

nicht über die Individuen von 1^1 erstreckt sind oder über sämtliche Relative, werden als endlich vorausgesetzt und stets durch $+$ und $\cdot$ bzw. Nebeneinanderstellung der Faktoren bezeichnet, nie durch Σ oder Π.

Durch Gleichsetzung zweier Relativausdrücke entsteht eine „*Relativgleichung*“, die wir uns stets auf 0 gebracht denken wollen. Auf solche Relativgleichungen lassen sich, wie es scheint, alle wichtigen Fragen der Mathematik und des Logikkalküls zurückführen.

Ein Relativausdruck, in welchem jedes Σ und Π über die Indizes, d. h. die Individuen von 1^1, erstreckt ist, also keines über die Relative, heiße ein „*Zählausdruck*“. Durch Gleichsetzung zweier solcher entsteht eine „*Zählgleichung*“. Beispiel einer solchen:

$$\sum_l \prod_{i,j,k} (\bar z_{hi} + \bar z_{kj} + 1'_{ij}) \bar z_{li} \sum_k z_{ki} = 0$$

oder „*kondensiert*“, d. h. in eine Gleichung zwischen Relativen, nicht Relativkoeffizienten verwandelt:

$$0 \dagger \{[1' + (\breve{\bar z} \dagger \bar z)](0 \dagger \breve{\bar z}) \cdot \breve{z} \,; 1\} \dagger 0 = 0.$$

Einen Relativausdruck „*kondensieren*“ heißt, ihn so umwandeln, daß kein Σ und Π mehr vorkommt. Zum Beispiel gibt $\sum_h a_{ih} b_{hj}$ kondensiert $(a\,; b)_{ij}$.

Eine Relativgleichung kann sein

a) eine identische Gleichung;

b) eine „*Fluchtgleichung*“, d. h. eine, die nicht für jedes, wohl aber für jedes endliche 1^1 erfüllt ist (oder ausführlicher: eine Gleichung, die nicht identisch erfüllt ist, die aber stets erfüllt ist, falls die Indizes, über die summiert oder produktiert wird, ein endliches 1^1 zu durchlaufen haben);

c) eine „*Haltgleichung*“, d. h. eine, die nicht einmal für jedes endliche 1^1 für beliebige Werte der Indizes erfüllt ist.

§ 2.

Zählgleichungen.

Satz 1: *Es gibt unkondensierbare Gleichungen, z. B.*

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 0 \textit{ oder } 1,$$

$$\sum_{h,i,j,k,l} 0'_{hijkl} = 0 \textit{ oder } 1,$$

$$\cdots\cdots,$$

also erst recht unkondensierbare Zählausdrücke.

Durch obige Beispiele hat Herr Korselt in einer brieflichen Mitteilung an mich den Satz (bis auf unwesentliche Lücken) bewiesen und dazu bemerkt, daß sich kondensieren läßt:

$$\sum_{i,j} 0'_{ij} = 0 \text{ in } 0' = 0,$$

$$\sum_{i,j,k} 0'_{ijk} = 0 \text{ in } 0'(0';0') = 0.$$

Auch ist

$$\sum_{i,j} 0'_{ij} = (1;0';1)_{ij},$$

$$\sum_{i,j,k} 0'_{ijk} = [1;0'(0';0');1]_{ij}.$$

Was dagegen die Gleichung

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 0$$

betrifft, so ist sie, wie leicht zu sehen, eine Haltgleichung, die dann und nur dann erfüllt ist, wenn 1^1 höchstens drei Elemente enthält. (Die Gleichung

$$\sum_{h,i,j,k} 0'_{hijk} = 1$$

besagt daher in Worten: „1^1 enthält mindestens vier Elemente". Ebenso besagt

$$\sum_{h,i,j,k,l} 0'_{hijkl} = 0$$

„1^1 enthält höchstens vier Elemente", usw.)

Ließen sich nun die Gleichungen in Satz 1 kondensieren, so würde, nachdem sie kondensiert und auf 0 gebracht sind, links kein Relativkoeffizient vorkommen, sondern nur die „Moduln" $1, 0, 1', 0'$, verknüpft durch irgendwelche der sechs logischen Operationen $+, \cdot, \dagger, ;, -, \smile$. Negation und Konversion lassen sich an Modulausdrücken immer ausführen; man kann also erreichen, daß links nur die Knüpfungen $+, \cdot, \dagger, ;$ vorkommen.

Der Ausdruck links ließe sich dann ausrechnen mit Hilfe des Schröderschen „Abacus der Relative" in Schröders Algebra der Logik III, S. 122 bis 123, 13) bis 19).

Nun ist aber (vgl. 19)):

$$0';0' = \begin{cases} 0 = 0', & \text{wenn } 1^1 \text{ ein Element enthält,} \\ 1', & \text{wenn } 1^1 \text{ zwei Elemente enthält,} \\ 1, & \text{wenn } 1^1 \text{ mehr als zwei Elemente enthält.} \end{cases}$$

Auch ist, was Schröder falsch angibt,

$$1;0' = 0';1 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 1^1 \text{ ein Element enthält,} \\ 1, & \text{wenn } 1^1 \text{ mehr als ein Element enthält.} \end{cases}$$

Dual entsprechend $1' \dagger 1'$ und $0 \dagger 1' = 1' \dagger 0$.

Die übrigen Modulknüpfungen sind unabhängig von der Anzahl der Elemente von 1^1. Also ist das Ergebnis jeder Knüpfung zwischen zwei

Moduln bei einem dreielementigen 1^1 genau dasselbe wie bei einem vierelementigen. Daher muß auch bei der Ausrechnung der linken Seite das Schlußergebnis bei einem dreielementigen und vierelementigen 1^1 dasselbe sein; ist also die durch Kondensation erhaltene Gleichung bei einem dreielementigen 1^1 erfüllt, so ist sie es auch bei einem vierelementigen. Sie kann daher nicht durch bloße Umformung (Kondensation) der Gleichungen in Satz 1 entstanden sein, da bei diesen das Gegenteil der Fall ist.

Schröder erklärt in Bd. III, S. 551 die Kondensation für stets ausführbar, benutzt aber dabei die Formel $a_{\varkappa\lambda} = (\breve{\varkappa} ; a ; \lambda)_{ij}$, bei der die Elemente des 1^1 als Relative gedeutet werden. Betrachtet man aber das als zulässig, so ist die Kondensation eine so triviale Sache, daß sie diesen Namen nicht verdient und ganz wertlos ist.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, daß sich die Bedingung dafür, daß das System a höchstens drei Elemente enthält, übersichtlicher als bei Schröder in der Form schreiben läßt:

$$\sum_{h,i,j,k} a_h a_i a_j a_k 0'_{hijk} = 0.$$

Daß die von Schröder versuchte Kondensation der Bedingung unmöglich ist, folgt für $a = 1$ aus dem Vorhergehenden. Entsprechend läßt sich auch ausdrücken, daß das System a höchstens 4, 5, $\cdots$ Elemente besitzt. „Das System a besitzt mindestens drei Elemente", wird ausgedrückt durch

$$\prod_{h,i,j} (\bar{a}_h + \bar{a}_i + \bar{a}_j + 1'_{hij}) = 0,$$

und die Vereinigung der beiden letzten Gleichungen besagt, daß das System a genau drei Elemente besitzt.

Satz 2: *Jede Fluchtzählgleichung ist bereits in einem abzählbaren Denkbereich nicht mehr für beliebige Werte der Relativkoeffizienten erfüllt.*

Wir denken uns zum Beweise die Gleichung auf 0 gebracht. Wir beweisen zunächst, daß sich jede Zählgleichung auf eine bestimmte Normalform bringen läßt, die auf S. 453 unter (3) steht. *Zunächst suchen wir zu erreichen, daß unter einem* (ein- oder mehrfachen) Π *niemals ein* Π *oder* Σ *vorkommt.* Setzen wir voraus, daß ein Produktand mindestens ein Π oder Σ enthält, so können wir vier Fälle unterscheiden:

1) Der Produktand ist ein $\cdot$ Produkt. Dies läßt sich vermeiden durch Anwendung der Formel

$$\prod_i A_i B_i = \prod_i A_i \prod_i B_i.$$

(Speziell ist z. B. $\prod_{i,j} A_i B_j C_{ij} = \prod_i A_i \prod_j B_j \prod_{i,j} C_{ij}$.)

2) Der Produktand ist ein Π Produkt ($= \prod_k A_{ik}$, wo die A_{ik} Funk-

tionen von Relativkoeffizienten sind). Dann läßt sich dieses aus dem Produktanden herausschaffen mit Hilfe der Formel

$$\prod_i(\prod_k A_{ik}) = \prod_{i,k} A_{ik}.$$

3) Der Produktand ist eine + Summe, also etwa gleich

$$A + B + C + \cdots \text{ nicht in inf.}$$

Wir unterscheiden hier zwei Unterfälle:

a) Eins oder mehrere der $A, B, \cdots$ sind ($\cdot$ oder Π) Produkte. Dieser Fall läßt sich durch das sog. „Ausaddieren" mit Hilfe der Formel $a + bc = (a + b)(a + c)$ auf 1) und 2) zurückführen.

b) Keines der $A, B, \cdots$ ist ein Produkt. Eine + Summe kann auch keines sein, wenn wirklich die $A, B, \cdots$ die *letzten* Summanden sind, in die sich der Produktand ohne Anwendung von Σ zerlegen läßt. Also ist jedes der $A, B, \cdots$ entweder ein (negierter oder unnegierter) Relativkoeffizient oder ein Σ. Sind alle diese Summanden Relativkoeffizienten, so sind wir schon am Ziel; ist aber z. B.

$$A = \sum_k A_{ik}, \quad B = \sum_k B_{ik},$$

so läßt sich der Produktand in der Form schreiben:

$$\sum_k (A_{ik} + B_{ik} + C + \cdots),$$

womit dieser Fall auf 4) zurückgeführt ist.

4) Der Produktand ist eine Σ Summe. Unsere Aufgabe besteht dann darin, das $\Pi\Sigma$ in $\Sigma\Pi$ zu verwandeln, d. h. das Produkt auszumultiplizieren. Dies geschieht durch die Formel:

$$\prod_i \sum_k A_{ik} = \sum_{k_\lambda}{}^{\lambda} \prod_i A_{ik_i}.$$

Hier soll das k_λ unter dem $\sum$ bedeuten, daß k_λ *alle* Indizes, d. h. alle Elemente von 1^1, durchlaufen soll, und das λ rechts vom $\sum$ soll bedeuten, daß *jedes* von den k_λ diese Indizes durchlaufen soll, daß wir also, wenn 1^1 n Elemente besitzt (wo n auch eine höhere Mächtigkeit bezeichnen kann), eine $n$fache Summe haben. Die A sind Funktionen von (nicht notwendig binären) Relativkoeffizienten.

Um die obige Formel dem Verständnis näher zu bringen, will ich einmal die darin vorkommenden Σ und Π z. T. ausführen, d. h. ich will hier einmal ausnahmsweise (entgegen der Vorschrift auf S. 448) für die-

selben das Zeichen + sowie Nebeneinanderstellung und Punkte benutzen. Die Indizes will ich mit $1, 2, 3, \cdots$ bezeichnen. Dann lautet die Formel:

$$\prod_i (A_{i1} + A_{i2} + A_{i3} + \cdots) = \sum_{k_1, k_2, k_3, \cdots} A_{1k_1} A_{2k_2} A_{3k_3} \cdots$$

$$= \sum_{k_1 = 1, 2, 3, \cdots} \sum_{k_2 = 1, 2, 3, \cdots} \sum_{k_3 = 1, 2, 3, \cdots} \cdots A_{1k_1} A_{2k_2} A_{3k_3} \cdots.$$

Unsere Formel muß bei mehrfachem Σ und Π folgendermaßen verallgemeinert werden:

$$\prod_{i, i', \cdots} \sum_{k, k', \cdots} A_{ii' \cdots kk' \cdots} = \sum_{k_{ii'} \cdots k'_{ii'} \cdots \cdots} A_{ii' \cdots k_{ii'} \cdots k'_{ii'} \cdots \cdots}.$$

Durch das Verfahren unter 1) bis 4) läßt sich nach und nach jedes Σ und Π aus dem Produktanden entfernen. Dabei kann es wohl vorkommen, daß die Umformung unter 4) mehrere Male hintereinander angewendet werden muß, und wir wollen noch angeben, wie dies geschieht:

$$\prod_h \sum_i \prod_k \sum_l A_{hikl} = \prod_h \sum_i \sum_{l_k}{}^{k} \prod_k A_{hikl_k} = \sum_{i_h} \sum_{l_{kh}}{}^{k,h} \prod_{h,k} A_{hi_h k l_{kh}}.$$

Daß man nicht $l_{(k_h)}$ schreiben muß statt l_{kh}, ist zwar für den Fortgang des Beweises unwesentlich; trotzdem aber will ich es dadurch ersichtlich machen, daß ich die Formel für einen 1^1 mit nur zwei Elementen 1, 2 ausführe, indem ich wieder einmal ausnahmsweise (entgegen der Vorschrift auf S. 448) das + und die Nebeneinanderstellung benutze. Auch will ich an Stelle von A_{hikl} kurz $(hikl)$ schreiben:

$$\prod_h \sum_i \prod_k \sum_l (hikl)$$

$$= \prod_h \sum_i [(hi11)(hi21) + (hi11)(hi22) + (hi12)(hi21) + (hi12)(hi22)]$$

$$= \prod_h [(h111)(h121) + (h111)(h122) + (h112)(h121) + (h112)(h122)$$
$$+ (h211)(h221) + (h211)(h222) + (h212)(h221) + (h212)(h222)]$$

$$= \sum_{p, q, r, s, t, u = 1, 2} (1p1r)(1p2s)(2q1t)(2q2u).$$

Für $1^1 = (1, 2, 3)$ erhält man

$$\sum_{i_1, i_2, i_3, l_{11}, l_{12}, \cdots, l_{33} = 1, 2, 3} (1i_1 1l_{11})(1i_1 2l_{12})(1i_1 3l_{13})(2i_2 1l_{21})(2i_2 2l_{22})(2i_2 3l_{23})$$
$$(3i_3 1l_{31})(3i_3 2l_{32})(3i_3 3l_{33}).$$

Nachdem die Produktanden alle von Σ und Π befreit sind, bleibt nur noch übrig, alle Klammern aufzulösen, soweit sie nicht direkt hinter

einem Σ und Π stehen, und die Produkte der Σ auszumultiplizieren. Dies geschieht mit Hilfe der Formel

$$\sum_i A_i \sum_i B_i = \sum_{i,k} A_i B_k,$$

entsprechend bei mehrfachen Summen.

Genau ebenso kann auch ein $\sum'$ mit einem anderen oder mit einem Σ multipliziert werden, desgleichen auch mehrfache Summen.

Es entsteht zuletzt eine Gleichung von der Form

(1) $$\begin{aligned} &C + \sum D_1 + \sum D_2 + \cdots \text{ nicht in inf.} \\ &+ \prod E_1 + \prod E_2 + \cdots \text{ nicht in inf.} \\ &+ \sum \prod F_1 + \sum \prod F_2 + \text{ nicht in inf.} = 0, \end{aligned}$$

wo die Summen und Produkte im allgemeinen mehrfache sein werden und die C, D_ν, E_ν, F_ν identische Funktionen von Relativkoeffizienten ohne Σ und Π sind. In unserem Beispiel auf S. 448 entsteht durch die angedeuteten Umformungen

$$\sum_l \sum_{k_\lambda}{}^{\lambda} \prod_{i,j,h} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\, \bar{z}_{li}\, z_{k_l i} = 0.$$

Nun kann man in (1) zunächst dafür sorgen, daß unter allen Σ genau die gleichen Summationsindizes stehen, indem man fehlende einfach hinzufügt (da $\sum_i a_i = \sum_{i,j} a_i$). Bei den Gliedern ohne Σ kann man ein Σ einfach hinzufügen (da $a = \sum_i a$). Darauf kann man alle Σ in ein einziges Σ zusammenfassen [da $\sum_i a_i + \sum_i b_i = \sum_i (a_i + b_i)$]. Es entsteht eine Gleichung von der Form

(2) $$\sum (F_0 + \prod F_1 + \prod F_2 + \cdots \text{ nicht in inf.}) = 0$$

oder ausaddiert nach der Formel $\prod_i a_i + \prod_i b_i = \prod_{i,j} (a_i + b_j)$:

$$\sum \prod (F_0 + F_1 + F_2 + \cdots \text{ nicht in inf.}) = 0$$

oder kurz

(3) $$\sum \prod F = 0.$$

Wollen wir nun entscheiden, ob (3) in irgendeinem Denkbereich identisch erfüllt ist oder nicht, so können wir bei unserer Betrachtung das Σ weglassen und die Gleichung untersuchen

(4) $$\prod F = 0$$

oder in unserem Beispiel

$$\prod_{h,i,j} (\bar{z}_{hi} + \bar{z}_{hj} + 1'_{ij})\, \bar{z}_{li}\, z_{k_l i} = 0.$$

Denn daß diese Gleichung *identisch* erfüllt sei, bedeutet doch nichts anderes, als daß sie für *beliebige* Werte von (z und) l sowie von den k_i (d. h. von $k_1, k_2, \cdots$) erfüllt sei. Etwas anderes besagte aber das weggelassene Σ auch nicht, war also für uns wenigstens überflüssig. (Man hätte besser auch schon in (1) die Σ weglassen können, ebenso in unserem Beispiel auf S. 448 das $\sum\limits_l$ schon *vor* Herstellung der Normalform, aber nicht in diesem Beispiel das $\sum\limits_k$, allgemein kein Σ, das unter einem Π vorkommt, da bei einem solchen die obigen Betrachtungen nicht gelten.)

F kann drei Arten von Indizes enthalten:

1) *„Konstante“* Indizes, d. h. solche, die in jedem Faktor des Π immer dieselben sein müssen (l in unserem Beispiel). Wir wollen sie in irgendeiner Reihenfolge durch die ersten Zahlen $1, 2, \cdots, n$ bezeichnen. Wir setzen also $l = 1$ in unserem Beispiel.

2) *„Produktionsindizes“* (i, j, h in unserem Beispiel). Sie durchlaufen unabhängig voneinander sämtliche Elemente des Denkbereichs, so daß also *jedem* Wertsystem derselben ein Faktor des Π entspricht und umgekehrt.

3) *„Fluchtindizes“* (wie k_i in unserem Beispiel sowie i_h und l_{kh} auf S. 452). Ihre *„Subindizes“* (i bzw. h bzw. k, h) sind Produktionsindizes, und die Fluchtindizes sind (nicht notwendig eindeutige) Funktionen ihrer Subindizes, d. h. z. B. l_{kh} bezeichnet in allen denjenigen Faktoren des Π ein und dasselbe Element, in denen die Produktionsindizes k und h dieselben Werte haben (aber in anderen Faktoren bezeichnet l_{kh} nicht notwendig andere Elemente).

Wir schreiben nun von den Faktoren des Π in (4) zunächst nur alle diejenigen hin, in denen die sämtlichen Produktionsindizes keine anderen als die oben unter 1) definierten Werte $1, 2, \cdots, n$ haben, oder sollten konstante Indizes fehlen, so nehmen wir irgendein Element des Denkbereichs, bezeichnen es mit 1 und schreiben den Faktor hin, in dem alle Produktionsindizes den Wert 1 haben. Wir setzen in diesem Falle $n = 1$. In F werden aber auch Fluchtindizes vorkommen, etwa

$$i_j,\ k_{lm},\ \cdots.$$

In jedem der bisher hingeschriebenen Faktoren haben $j, l, m, \cdots$ als Produktionsindizes irgendwelche von den Werten $1, 2, \cdots, n$; wir werden also in diesen Faktoren als Fluchtindizes haben:

$$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n,\ k_{11},\ k_{12},\ k_{21},\ \cdots,\ k_{nn},\ \cdots.$$

Dies sind keine Funktionen von Indizes mehr, sondern bezeichnen ganz bestimmte Elemente, die wir auch in irgendeiner Reihenfolge mit den Zahlen $n + 1,\ n + 2, \cdots, n_1$ bezeichnen wollen. (Ausdrücklich sei be-

merkt, daß zwei Elemente, die durch verschiedene der Zahlen von 1 bis n_1 bezeichnet sind, weder als gleich *noch als verschieden* vorausgesetzt werden.)

Das bis jetzt hingeschriebene Produkt nennen wir P_1. In unserem Beispiel wäre also

$$P_1 = \bar{z}_{11}(\bar{z}_{11} + \bar{z}_{11} + 1'_{11}) z_{21} = \bar{z}_{11} z_{21}.$$

(Hier durfte $1'_{11} = 1$ gesetzt werden; wäre aber $1'_{12}$ vorgekommen, so hätte dieses nicht gleich 0 gesetzt werden dürfen, da ja nicht vorausgesetzt wird, daß 2 ein anderes Element bezeichnet als 1. Man hätte vielmehr $1'_{12}$ stehen lassen müssen.)

ΠF wird zum mindesten dann in jedem Denkbereich identisch verschwinden, wenn P_1 dies tut, d. h. wenn P_1 sowohl verschwindet, falls sämtliche Elemente $1, 2, \cdots, n_1$ untereinander verschieden sind, als auch, wenn beliebig viele derselben einander gleich sind. Um zu sehen, ob alles dies der Fall ist, gehen wir alle diese Möglichkeiten durch; bilden also aus P_1 alle diejenigen (endlich vielen) Spezialisierungen $P_1', P_1'', P_1''', \cdots$, welche entstehen, wenn man unter den Elementen $1, 2, \cdots, n_1$ beliebig viele oder wenige als gleich betrachtet (wobei dann auch die Relativkoeffizienten von $1'$ und $0'$ ausgewertet werden).

Verschwinden also alle $P_1^{(\nu)}$ identisch, so ist (4) identisch erfüllt. Wenn nicht, so schreiben wir jetzt von dem ΠF alle diejenigen noch nicht in P_1 aufgenommenen Faktoren zu den schon in P_1 aufgenommenen hinzu, in denen die sämtlichen Produktionsindizes keine anderen als die Werte von 1 bis n_1 haben. Das so entstehende Produkt (das also die alten Faktoren von P_1 auch enthalten soll,) nennen wir P_2. In P_2 werden die Fluchtindizes $i_j, k_m, \cdots$ die Werte haben:

$$i_1, i_2, \cdots, i_{n_1}, k_{11}, k_{12}, k_{21}, \cdots, k_{n_1 n_1}, \cdots,$$

von denen wir diejenigen, die nicht schon durch eine Zahl benannt sind, durch die Zahlen $n_1 + 1, n_1 + 2, \cdots, n_2$ benennen. (Auch von diesen wird nicht vorausgesetzt, daß sie verschiedene Elemente darstellen, oder Elemente, die sich von den alten unterscheiden.)

In unserem Beispiel ist, wenn man statt $z_{\varkappa\lambda}$ kurz $\varkappa\lambda$ schreibt:

$$\begin{aligned} P_2 = P_1 &(\overline{11} + \overline{12} + 1'_{12})(\overline{12} + \overline{11} + 1'_{21})(\overline{12} + \overline{12} + 1'_{22})(\overline{21} + \overline{21} + 1'_{11}) \\ &(\overline{21} + \overline{22} + 1'_{12})(\overline{22} + \overline{21} + 1'_{21})(\overline{22} + \overline{22} + 1'_{22})\,\overline{12} \cdot 32 \\ = P_1 &(\overline{21} + \overline{22} + 1'_{12})\,\overline{12} \cdot 32 = (\overline{22} + 1'_{12}) \cdot \overline{11} \cdot \overline{12} \cdot 21 \cdot 32. \end{aligned}$$

Wir setzen jetzt in P_2 (wie früher in P_1) die benutzten Indizes auf alle erdenklichen Arten einander gleich und ungleich. Die so aus P_2 entstehenden Produkte nennen wir

$$P_2', P_2'', P_2''', \cdots.$$

Verschwinden sie alle, so ist die Gleichung (4) identisch erfüllt. Wenn nicht, so bilden wir P_3, indem wir sämtliche Faktoren des ΠF hinschreiben, in denen die Produktionsindizes zwischen 1 und n_2 liegen. Die neuen Fluchtindizes nennen wir $n_2 + 1, n_2 + 2, \cdots, n_3$.

In unserem Beispiel ist

$$P_3 = (\overline{22} + 1'_{12})(\overline{23} + 1'_{13})(\overline{22} + \overline{23} + 1'_{23})(\overline{31} + 1'_{12})(\overline{31} + \overline{33} + 1'_{13})(\overline{33} + 1'_{23}) \\ \cdot \overline{11} \cdot \overline{12} \cdot 13 \cdot 21 \cdot 32 \cdot 43 .$$

Durch Gleich- bzw. Ungleichsetzung der Indizes bilden wir wieder

$$P_3', P_3'', P_3''', \cdots$$

usf. Da sich hiernach leicht beschreiben läßt, wie man aus dem P_n das P_{n+1} und die $P'_{n+1}, P''_{n+1}, P'''_{n+1}, \cdots$ bildet, so ist die abzählbar unendliche Reihe der $P_\varkappa$ hiermit als definiert anzusehen und ebenso die $P_\varkappa^{(\nu)}$.

Verschwinden für ein $\varkappa$ (und daher auch für alle darauffolgenden) sämtliche $P_\varkappa^{(\nu)}$, so ist die Gleichung identisch erfüllt. Wenn nicht, so ist die Gleichung schon in dem soeben konstruierten abzählbaren Denkbereich erster Ordnung nicht mehr erfüllt. Es gibt dann nämlich unter den $P_1', P_1'', P_1''', \cdots$ mindestens ein Q_1, welches in unendlich vielen der nicht verschwindenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ als Faktor auftritt (weil ja jedes der unendlich vielen nicht verschwindenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ eins der endlich vielen $P_1^{(\nu)}$ als Faktor enthält). Ferner gibt es unter den $P_2', P_2'', P_2''', \cdots$ mindestens ein Q_2, welches Q_1 als Faktor enthält und in unendlich vielen der nicht verschwindenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ als Faktor auftritt (weil jedes der unendlich vielen nicht verschwindenden und Q_1 als Faktor enthaltenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ eins der endlich vielen $P_2^{(\nu)}$ als Faktor enthält). Ebenso gibt es unter den $P_3', P_3'', P_3''', \cdots$ mindestens ein Q_3, welches Q_2 als Faktor enthält und in unendlich vielen der nicht verschwindenden $P_\varkappa^{(\nu)}$ als Faktor auftritt, usf.

Jedes Q_ν ist $= 1$, also ist auch

$$1 = Q_1 Q_2 Q_3 \cdots \text{ in inf.}$$

Nun ist aber ΠF für diejenigen Werte der Summationsindizes, durch deren Einsetzung die $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots$ entstanden sind, $= Q_1 Q_2 Q_3 \cdots$, also $= 1$. Daher verschwindet ΠF nicht identisch. Die Gleichung (4) ist also schon in einem abzählbaren Denkbereich nicht mehr erfüllt, q.e.d.

Anwendung: *Alle Fragen über Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Schröderschen oder Müllerschen oder Huntingtonschen Gebietsaxiome sind, (wenn überhaupt,) schon in einem abzählbaren Denkbereich entscheidbar.*

Die Axiomsysteme für den Gebietekalkül von Schröder, Müller u. a. lassen sich als Relativgleichungen schreiben, wenn man den Denkbereich erster Ordnung 1^1 alle Gebiete umfassen läßt und die Beziehung sub zwischen Gebieten als ein Relativ s bezeichnet. (Hier ist also wohl zu

unterscheiden: einmal die Beziehungen der Subsumtion, Addition usw. für die *Gebiete*, und andererseits die Beziehungen für die *Relativkoeffizienten*. Erstere Subsumtion „a sub b“ wird mit $s_{ab}=1$, letztere Subsumtion, etwa „s_{ab} sub s_{cd}“ mit $s_{ab} \mathrel{-\!\!\!\in} s_{cd}$ bezeichnet.)

Die Müllerschen Axiome I $a \mathrel{-\!\!\!\in} a$, II $(a \mathrel{-\!\!\!\in} b)(b \mathrel{-\!\!\!\in} c) \mathrel{-\!\!\!\in} (a \mathrel{-\!\!\!\in} c)$, III $(a \mathrel{-\!\!\!\in} b)(b \mathrel{-\!\!\!\in} a) = (a = b)$, $\mathrm{IV}_\times$ $0 \mathrel{-\!\!\!\in} a$, IV_+ $a \mathrel{-\!\!\!\in} 1$, V $1 \mathrel{\bar{\mathrel{-\!\!\!\in}}} 0$ geben, wenn man in diesen für 0 und 1 lieber n und e schreibt zur Vermeidung von Verwechslungen: I $s_{aa}=1$, II $s_{ab}s_{bc} \mathrel{-\!\!\!\in} s_{ac}$, III $s_{ab}s_{ba}=1'_{ab}$, $\mathrm{IV}_\times$ $s_{na}=1$, IV_+ $s_{ae}=1$, V $s_{en}=0$. Da aber die Axiome für beliebige a, b, c gelten sollen, so wäre noch überall $\prod\limits_a$ bzw. $\prod\limits_{a,b}$, $\prod\limits_{a,b,c}$ hinzuzufügen, und vor $\mathrm{IV}_\times$, IV_+ noch, dem Sinn dieser Axiome gemäß, $\sum\limits_n$, $\sum\limits_e$.

VI könnte ausgedrückt werden mit Hilfe von ternären Relativen π, σ, indem man setzt:

$$(\pi_{abc}=1)=(ab=c), \quad (\sigma_{abc}=1)=(a+b=c).$$

Man kann aber auch VI ausdrücken, ohne diese ternären Relative zu Hilfe zu nehmen. $\mathrm{VI}_\times$ fordert, daß es zu je zwei Gebieten a, b ein größtes, d. h. allen anderen Untergebieten übergeordnetes Untergebiet c gibt (das man Produkt von a und b nennt), ein Gebiet c also, für das in der Schröder-Müllerschen Schreibweise:

$$1)\ (c \mathrel{-\!\!\!\in} a)(c \mathrel{-\!\!\!\in} b),$$

$$2)\ \prod_x (x \mathrel{-\!\!\!\in} a)(x \mathrel{-\!\!\!\in} b) \mathrel{-\!\!\!\in} (x \mathrel{-\!\!\!\in} c),$$

d. h. also in der neuen hier anzuwendenden Schreibweise:

$$1)\ s_{ca}s_{cb}=1,$$

$$2)\ \prod_x (s_{xa}s_{xb} \mathrel{-\!\!\!\in} s_{xc}).$$

Demnach ist

$$(\pi_{abc}=1)=(s_{ca}s_{cb}=1)\prod_x (s_{xa}s_{xb} \mathrel{-\!\!\!\in} s_{xc})$$

oder

$$\pi_{abc}=s_{ca}s_{cb}\prod_x (\bar{s}_{xa}+\bar{s}_{xb}+s_{xc}),$$

dual entsprechend σ_{abc}.

Es ist

$$\mathrm{VI}_\times \prod_{a,b}\sum_c \pi_{abc}=1, \quad \mathrm{VI}_+ \prod_{a,b}\sum_c \sigma_{abc}=1,$$

wo für π_{abc} und σ_{abc} obige binäre Ausdrücke einzusetzen sind, d. h.

$$\mathrm{VI}_\times \prod_{a,b}\sum_c s_{ca}s_{cb}\prod_d (\bar{s}_{da}+\bar{s}_{db}+s_{dc})=1,$$

dual entsprechend VI_+.

VII lautet bei Müller $(a+z)(\bar{a}+z) = z = az + \bar{a}z$ und fordert die Existenz eines „Negats“ zu a, das eben dieser Gleichung genügt. Schreiben wir also b statt $\bar{a}$, so ist vor die ganze Gleichung noch $\sum\limits_{b}$ zu setzen und dann noch vor das Ganze $\prod\limits_{a,z}$. Um die an dieser Stelle unzulässige Bezeichnung von Produkt und Summe von Gebieten durch π und σ ersetzen zu können, zerlegen wir VII folgendermaßen:

$$\prod_{a,z}\sum_{b}\prod_{cdfghi}[(a+z=c)(b+z=d)(cd=f)(az=g)(bz=h)(g+h=i)=(f=z=i)].$$

So wird durch Benutzung von π und σ

$$\text{VII}\quad \prod_{a,z}\sum_{b}\prod_{cdfghi}(\sigma_{azc}\sigma_{bzd}\pi_{cdf}\pi_{azg}\pi_{bzh}\sigma_{ghi} \mathrel{-\!\!\!<} 1''_{fzi}),$$

wo noch für die Relativkoeffizienten von π und σ die obigen Werte auf S. 457 einzusetzen sind.

Bei den Unabhängigkeitsuntersuchungen ist nun zu entscheiden, ob aus gewissen Axiomen ein anderes folgt. Daß dieses der Fall ist, läßt sich aber durch eine Relativgleichung ausdrücken, die man primär machen kann. Es kommt also bei den Unabhängigkeitsuntersuchungen darauf hinaus, zu entscheiden, ob eine gewisse Relativgleichung und zwar nach dem Vorhergehenden eine Zählgleichung identisch erfüllt ist oder nicht. Ist es aber nicht der Fall, so läßt sich nach Satz 2 bereits ein Gegenbeispiel in einem endlichen oder abzählbaren Denkbereich geben, qed.

Auf Grund dieser Überlegungen habe ich die Unabhängigkeit der einzelnen Axiome untersucht und denke die Resultate bei anderer Gelegenheit zu veröffentlichen. Die Arbeit von Huntington darüber halte ich für verfehlt, weil er bei unbequemen Axiomen einfach in ihrer Formulierung hinzufügt: „Wenn die vorhergehenden Axiome erfüllt sind“, ein billiges Mittel, um nach Belieben Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen!

Satz 3: *Die Auswertung eines Produktes oder einer Summe über Relative ist nicht immer möglich.*

Es läßt sich nämlich mit den Schröderschen Hilfsmitteln ohne weiteres eine Gleichung aufstellen, welche besagt, daß der Denkbereich endlich oder abzählbar sei, d. h. daß jedes System $a ; 1$ endlich oder ~ 1 (dem Denkbereich ähnlich) sei:

$$(a ; 1 \text{ endlich}) + (a ; 1 \sim 1).$$

Daß $a ; 1$ endlich ist, bedeutet, daß keine Abbildung z das $a ; 1$ ähnlich auf einen echten Teil b seiner selbst abbildet. Daß aber z ein System a ähnlich auf b abbildet, wird nach Schröder, Algebra der Logik, Bd. III, S. 605, (10) ausgedrückt durch

$$(1)\qquad (z ; \breve{z} + \bar{\breve{z}} ; z \mathrel{-\!\!\!<} 1')(b \mathrel{-\!\!\!<} z ; a)(a \mathrel{-\!\!\!<} \breve{z} ; b),$$

und daß b echter Teil von a ist, durch

$$(2) \qquad (b \in a)(b \neq a)(b \neq 0),$$

$a ; 1 \sim 1$ nach (1) durch

$$\sum_z (z ; \breve{z} + \breve{z} ; z \in 1')(1 \in z ; a ; 1)(a ; 1 \in \breve{z} ; 1).$$

Daß also 1^1 endlich oder abzählbar ist, wird ausgedrückt durch

$$\Big\{0 = \sum_z \sum_b (z ; \breve{z} + \breve{z} ; z \in 1')(b \in z ; a)(a \in \breve{z} ; b)(b \in a)(b \neq a)(b \neq 0)\Big\}$$
$$+ \sum_z (z ; \breve{z} + \breve{z} ; z \in 1')(1 \in z ; a ; 1)(a ; 1 \in \breve{z} ; 1).$$

Dies ist, wie jede Sekundärgleichung, leicht in eine Primärgleichung zu verwandeln (vgl. Schröder, Bd. III, S. 150—151) und diese wieder in eine Koeffizientenbeziehung. Wären nun $\prod\limits_z$ und $\sum\limits_z$ auswertbar, so müßte die Gleichung nach Satz 2 identisch erfüllt oder bereits in einem endlichen oder abzählbaren Denkbereich nicht erfüllt sein, was alles nicht der Fall ist.

Der Leser wird fragen, warum sich nicht der Beweis von Satz 2 Wort für Wort auch auf die obige Gleichung übertragen läßt, die doch gewiß nicht in einem endlichen oder abzählbaren 1^1 erfüllt ist. Allerdings läßt sich nach der Methode jenes Beweises ein Denkbereich konstruieren, in dem die Gleichung nicht identisch erfüllt ist; nur erweist sich dieser Denkbereich nicht als abzählbar. Da nämlich auch über *Relative* z produktiert wird, treten auch Fluchtindizes von der Form i_z auf, wo z kein „Subindex", sondern ein „Subrelativ" ist, so daß zu jedem z ein Index gehört. Nähert sich aber die Indexzahl dem Unendlichen, so nähert sich die Zahl der möglichen z dem Kontinuum und damit auch die Anzahl der nötigen Fluchtindizes, d. h. die Mächtigkeit des erforderlichen Denkbereichs. (Dadurch wird aber wiederum die Menge der möglichen z von noch höherer Mächtigkeit, als die des Kontinuums ist, und folglich ebenso die Menge der nötigen Fluchtindizes usw. in inf.)

§ 3.

Uninäre Gleichungen.

Satz 4: *Zwischen uninären Relativkoeffizienten gibt es keine Fluchtgleichungen, nicht einmal dann, wenn die Relativkoeffizienten von* $1'$ *und* $0'$ *als einzige binäre noch dazu treten.*

Wenn letztere fehlen, so läßt sich sehr leicht zeigen, daß Fluchtindizes überhaupt zu umgehen sind und daher bei der Konstruktion des Denkbereichs auf S. 454 ff. überhaupt gar kein Anlaß vorliegt, ihn unendlich zu machen.

Kommen aber Koeffizienten von $1'$ oder $0'$ vor, so stellen wir eine bestimmte Normalform her. Die linke Seite der auf 0 gebrachten Gleichungen ist symmetrisch in bezug auf alle Indizes, d. h. in bezug auf alle Elemente des 1^1 mit Ausnahme einer *endlichen* Anzahl ganz bestimmter, die ich die *„ausgezeichneten Indizes“* nennen will. Die zu diesen Indizes gehörigen Relativkoeffizienten sowie etwa die vorkommenden indexlosen Gebiete will ich die *„ausgezeichneten Gebiete“* nennen. Sie können übrigens auch fehlen. Alle in der Gleichung hingeschriebenen Indizes sind entweder Summations- oder Produktionsindizes oder ausgezeichnete Indizes.

Wir denken uns nun die linke Seite der Gleichung in der Booleschen Weise entwickelt nach den ausgezeichneten Gebieten. Die in Rede stehende Normalform, deren Herstellbarkeit ich oben behauptete, will ich nun zunächst einmal beschreiben. Sie ist

1) dadurch gekennzeichnet, daß die Entwicklungskoeffizienten Funktionen sind, die symmetrisch sind in bezug auf *alle*, (auch die ausgezeichneten) Indizes,

2) durch eine Eigenschaft eben dieser symmetrischen Funktionen, die wir jetzt erörtern wollen.

Wir können zunächst annehmen, daß diese symmetrischen Funktionen (die ja Entwicklungskoeffizienten waren bei der Booleschen Entwicklung nach den ausgezeichneten Gebieten), keine indexlosen Gebiete mehr enthalten (da diese ja mit zu den ausgezeichneten Gebieten gehören, nach denen entwickelt wurde). Die symmetrischen Funktionen enthalten, wie wir behaupten, keine Koeffizienten von $1'$ und $0'$. Sie lassen sich nach Boole in der Weise entwickeln, daß nur die Koeffizienten 0 und 1 vorkommen. Obgleich wir uns nur die Glieder mit dem Koeffizienten 1 hingeschrieben denken wollen, so können es doch unendlich viele Glieder sein, so daß wir an eine Abkürzung denken müssen.

Kommt in der Entwicklung z. B. das Glied vor

$$a_1 a_2 a_3 \bar{a}_4 \bar{a}_5 \bar{a}_6 \bar{a}_7 \cdots = a_1 a_2 a_3 \prod_i (\bar{a}_i + 1'_{123i}),$$

so kommen auch alle Glieder vor, welche aus diesem durch Indexvertauschung hervorgehen. Deren Summe will ich bezeichnen mit $(3, \infty)_a$, also

$$(3, \infty)_a = \sum_{h,i,j} a_h a_i a_j 0'_{hij} \prod_k (\bar{a}_k + 1'_{hijk})$$

und die Summe der Glieder, welche aus

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 a_4 a_5 a_6 a_7 \cdots$$

durch Indexvertauschung hervorgehen, will ich bezeichnen durch $(\infty, 3)_a$. Allgemein setzen wir

$$(n, \infty)_a = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} 0'_{i_1 i_2 \ldots i_n} \prod_k (\bar{a}_k + 1'_{i_1 i_2 \ldots i_n k}).$$

Entsprechend entsteht $(\infty, n)_a$ hieraus durch Vertauschung von a_λ und $\bar{a}_\lambda$ für jedes λ.

Kommen mehrere Relative vor, z. B. a und b, so bezeichnen wir z. B. die Summe der Glieder, welche aus

$$(a_1 b_1 a_2 b_2)(a_3 \bar{b}_3 a_4 \bar{b}_4 a_5 \bar{b}_5)(\bar{a}_6 b_6)(\bar{a}_7 \bar{b}_7 \bar{a}_8 \bar{b}_8 \cdots)$$

durch Indexvertauschung hervorgehen, durch

$$(2, 3, 1, \infty)_{a,b}.$$

Ebenso bezeichnen wir z. B. die Summe der durch Indexvertauschung aus

$$(a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_i b_i)\left(\prod_\varrho a_\varrho \bar{b}_\varrho + 1'_{1,2,\ldots,i+k+l,\varrho}\right)(\bar{a}_{i+1} b_{i+1} \bar{a}_{i+2} b_{i+2} \cdots \bar{a}_{i+k} b_{i+k})$$
$$(\bar{a}_{i+k+1} \bar{b}_{i+k+1} \bar{a}_{i+k+2} \bar{b}_{i+k+2} \cdots \bar{a}_{i+k+l} \bar{b}_{i+k+l})$$

hervorgehender Summe durch

$$(i, \infty, k, l)_{a,b}.$$

Hiernach ist das allgemeine Bildungsgesetz wohl klar. Daß überhaupt an allen Stellen bis auf eine stets lauter endliche Zahlen stehen, wird als das eine Kennzeichen gerade unserer symmetrischen Funktionen anzusehen sein.

Aber auch bei dieser abgekürzten Schreibweise kann die Entwicklung noch unendlich viele Glieder enthalten. Wir bezeichnen nun beispielsweise mit

$$(\geqq 2, \geqq 5)_a$$

die Summe aller derjenigen Glieder, in denen mindestens zwei unnegierte und mindestens fünf negierte a_ν vorkommen, d. h. es ist

$$(\geqq 2, \geqq 5)_a = (2, \infty)_a + (3, \infty)_a + (4, \infty)_a + \cdots + (\infty, 5)_a + (\infty, 6)_a + (\infty, 7)_a + \cdots$$
$$= \sum_{\varkappa, \lambda, \mu, \ldots, \sigma} a_\varkappa a_\lambda \bar{a}_\mu \bar{a}_\nu \bar{a}_\pi \bar{a}_\varrho \bar{a}_\sigma 0'_{\varkappa\lambda\mu\nu\pi\varrho\sigma}.$$

Allgemein:

$$(\geqq p, \geqq q)_a = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_q}} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_p} \bar{a}_{j_1} \bar{a}_{j_2} \cdots \bar{a}_{j_q} 0'_{i_1 i_2 \cdots i_p j_1 j_2 \cdots j_q}.$$

Daß sich nun bei Anwendung dieser Schreibweise die ganze symmetrische Funktion als Summe *endlich* vieler Glieder darstellen läßt, ist ein zweites Kennzeichen gerade unserer symmetrischen Funktionen und überhaupt der Kernpunkt des ganzen Beweises.

Die Herstellungsmethode einer solchen Normalform will ich nur andeuten. Jeder Relativausdruck baut sich aus solchen Relativausdrücken, welche kein Σ oder Π enthalten und daher schon die verlangte Normal-

form besitzen, durch wiederholte Anwendung der vier Operationen 1) $+$, 2) $\cdot$, 3) Σ, 4) Π auf: Man wird also jeden Relativausdruck auf die Normalform bringen können, wenn man einen solchen Ausdruck auf die Normalform bringen kann, welcher aus bereits Normalform besitzenden Ausdrücken entsteht durch *einmalige* Anwendung einer jener vier Operationen. Die Ausarbeitung einer Methode für jede einzelne dieser vier Operationen ist nicht schwer und sei dem Leser überlassen.

Die Normalform läßt sich also herstellen. Sie ist eine Boolesche Entwicklung. Hat bei ihrer Herstellung sich alles weggehoben, so ist die Gleichung in jedem beliebigen Denkbereich identisch erfüllt. Ist aber auch nur ein einziges Glied stehen geblieben, so kann man sofort einen *endlichen* Denkbereich angeben, in welchem dieses Glied und folglich die ganze linke Seite der Gleichung nicht identisch verschwindet. Ist z. B. ein Glied

$$p(\geqq 2, \geqq 3, 1, \infty)_{a,b}$$

stehen geblieben, wo p Produkt ausgezeichneter Gebiete ist, so verschwindet das Glied nicht in einem Denkbereich mit sechs Elementen, in welchem

$$\begin{array}{ll} p = 1, & \\ a_1 = a_2 = 1, & b_1 = b_2 = 1, \\ a_3 = a_4 = a_5 = 1, & b_3 = b_4 = b_5 = 0, \\ a_6 = 0, & b_6 = 1 \end{array}$$

ist.

Folgerung: *Fluchtgleichungen enthalten außer den Moduln auch noch andere Relative.*

Satz 5: *Die Auswertung eines Π oder Σ über alle Relative ist stets möglich für einen Ausdruck, der nur uninäre Relativkoeffizienten oder höchstens noch die Koeffizienten von $1'$ oder $0'$ enthält und endlich viele Σ oder Π über sämtliche Indizes.*

Es sei ein Σ über Relative auszuwerten; beim Π verfährt man dual entsprechend.

Man entwickle in die Normalform des vorigen Satzes. Dann kann man die Glieder einzeln auswerten. Es ist z. B.

$$\sum_b (5, 7, 3, \infty)_{a\,b} = (5+7,\ 3+\infty)_a = (12, \infty)_a,$$

$$\sum_a (5, 7, \geqq 3, 4)_{a,b} = (\geqq 5+3,\ 7+4)_a = (\geqq 8, 11)_a.$$

Kommt unter einem $\sum\limits_a$ ein ausgezeichneter Koeffizient a_i vor, so ist er bei der Auswertung zu streichen (d. h. $=1$ zu setzen), ebenso wäre $\bar{a}_i$ zu streichen.

Es bleibt nur noch die Aufgabe, das Ergebnis aus der Normalform in einen gewöhnlichen Relativausdruck zurückzuverwandeln. Die Methode hierfür zeige folgendes Beispiel:

$$(2, 1, 3, \infty)_{a,b} = \sum_{h,i,j,k,l,m} (a_h b_h a_i b_i)(a_j \bar{b}_j)(\bar{a}_k b_k \bar{a}_l b_l \bar{a}_m b_m)\, 0'_{hijklm} \prod_n (\bar{a}_n \bar{b}_n + 1'_{hijklmn}).$$

§ 4.

Zurückführung des höheren Relativkalküls auf binären.

Satz 6: *Jede Relativgleichung bzw. Zählgleichung ist einer binären äquivalent*, d. h. ist eine beliebige Relativgleichung bzw. Zählgleichung $f = 0$ gegeben, so kann man eine binäre Relativgleichung bzw. Zählgleichung $F = 0$ angeben, welche dann und nur dann identisch bzw. nicht identisch bzw. niemals (für kein Wertsystem der Parameter) erfüllt ist, wenn das entsprechende von $f = 0$ gilt; ebenso eine binäre Gleichung bzw. Zählgleichung $F' = 0$, welche dann und nur dann für einige Wertsysteme erfüllt ist, falls es $f = 0$ ist. Dieses läßt sich ja auf jenes zurückführen. F' stimmt aber nicht mit F überein.

Dieser Satz hat im Relativkalkül die Bedeutung, die in der Algebra der Weierstraßsche Satz hat, daß alle Probleme, die sich mit solchen komplexen Zahlen mit mehr als zwei Grundeinheiten lösen lassen, für welche dieselben Formeln gelten wie für unsere Zahlen, sich auch mit den binären komplexen Zahlen lösen lassen. Ebenso sind auch alle Probleme, die sich mit Hilfe des ternären und höheren Relativkalküls lösen lassen, auch schon im binären zu erledigen. (Einfacher kann freilich unter Umständen die Heranziehung ternärer und höherer Relative sein.)

Die Bedeutung unseres Satzes kann man daraus ermessen, daß jeder Satz der Mathematik oder irgend eines Kalküls, der sich erfinden läßt, sich als eine Relativgleichung schreiben läßt, mit deren Erfülltsein der mathematische Satz steht und fällt. Diese Umwandlung beliebiger mathematischer Sätze in Relativgleichungen wird, wie ich denke, wohl jeder ausführen können, der die Arbeiten von Whitehead und Russel kennt. Da nun zufolge unseres Satzes sich aller Relativkalkül auf binären Relativkalkül zurückführen läßt, so folgt daraus, daß man die Richtigkeit jedes beliebigen mathematischen Satzes entscheiden kann, wenn man nur entscheiden kann, ob eine binäre Relativgleichung identisch erfüllt ist oder nicht.

Es sei nun zunächst eine quaternäre Relativgleichung vorgelegt; die ternäre läßt sich als ein Sonderfall hiervon auffassen. Denn sind ternäre Relativkoeffizienten a_{ijk} gegeben, so kann man quaternäre definieren durch die Gleichungen $a_{ijkl} = a_{ijk}$.

Wir betrachten einen neuen Denkbereich, dessen Elemente die *Elementenpaare* des alten 1^1 sind, den wir also 1^2 nennen müssen. Ist also

$$1^1 = (i, j, k, \cdots)$$

so ist

$$1^2 = ((i, i), (i, j), (j, i), (j, j), (i, k) \cdots).$$

Der neue Denkbereich $\mathfrak{E}$, den wir im folgenden zugrunde legen wollen, entsteht nun aus 1^2, indem man (i, i) durch i, (j, j) durch j, usw. ersetzt. Es ist also

$$\mathfrak{E} = (i, (i, j), (j, i), j, (i, k) \cdots).$$

Die Elemente benennen wir zweckmäßig mit einzelnen Buchstaben, etwa $I, K, L, \cdots$. Ist $I = (i, j)$, so nennen wir i das *Vorderglied*, j das *Hinterglied* von I. *i wollen wir als sein eigenes Vorder- und Hinterglied betrachten.*

Jedem quaternären Relativ a, dessen Indizes 1^1 zu durchlaufen haben, ordnen wir nun ein binäres Relativ A zu, dessen Indizes $\mathfrak{E}$ durchlaufen sollen, und zwar in der Weise, daß für $I = (i, j)$ $K = (k, l)$

$$a_{ijkl} = A_{IK}, \quad a_{iikl} = A_{iK}, \quad a_{ijkk} = A_{Ik}, \quad a_{iikk} = A_{ik}$$

ist. Damit ist, wenn a als gegeben betrachtet wird, A vollständig definiert als binäres Relativ mit $\mathfrak{E}$ als Denkbereich erster Ordnung.

Auf Grund dieser Zuordnung ersetzen wir nun in $f = 0$ alle quaternären Relative durch die zugeordneten binären. Da die Relativkoeffizienten nicht mehr durchweg Elemente von 1^1, sondern Elemente von $\mathfrak{E}$ sind, so sind auch die Summations- und Produktionsindizes so abzuändern, daß sie sich über das ganze $\mathfrak{E}$ erstrecken. Kommt z. B. in f vor

(1) $$\sum_i a_{ijkl}\, b_{jkli},$$

und wird a_{ijkl} durch A_{IK}, b_{jkli} durch B_{JL} ersetzt, so kommt der Summationsindex i vor in $I = (i, j)$ und in $L = (l, i)$; daher ersetzen wir die Summation über i zunächst durch eine solche über I und L und schreiben

(2) $$\sum_I \sum_L A_{IK}\, B_{JL}.$$

Wir müssen nun aber bedenken, daß diese neue Summe mehr Summanden enthält als die alte (da sich I und L jetzt über das ganze $\mathfrak{E}$ erstrecken und nicht nur über 1^1). Diesem Übelstande müssen wir abhelfen, denn wir wollen ja eine Gleichung herstellen, welche genau soviel Summanden und Faktoren enthält, wie die alte, ja, welche sich von der alten durch nichts unterscheidet als durch die Bezeichnung (mit einer Ausnahme

freilich). Wir erreichen unsern Zweck, indem wir jedes $A_{IK}\,B_{JL}$ mit je einem Faktor multiplizieren, welcher gleich 1 ist bei denjenigen Summanden, welche auch in der alten Summe auftreten, bei den übrigen aber gleich 0. Wir definieren nämlich zwei Relative V und H durch

$$(3)\qquad \begin{cases}(V_{IJ}=1)=(I \text{ ist Vorderglied zu } J),\\ (H_{IJ}=1)=(I \text{ ist Hinterglied von } J).\end{cases}$$

Diese Definitionseigenschaften von V und H sind später auch noch in die Gleichung aufzunehmen; einstweilen betrachten wir V und H als gegebene Relative, deren Indizes Elemente von $\mathfrak{E}$ bedeuten. Denn auch die Vorder- und Hinterglieder sind ja Elemente von $\mathfrak{E}$. Es gilt

$$(4)\qquad \begin{cases}((\breve{V};\,V)_{IJ}=1)=(\text{Vorderglied von } I=\text{Vorderglied von } J),\\ ((\breve{V};\,H)_{IJ}=1)=(\text{Vorderglied von } I=\text{Hinterglied von } J),\\ ((\breve{H};\,H)_{IJ}=1)=(\text{Hinterglied von } I=\text{Hinterglied von } J).\end{cases}$$

Die Summe

$$(5)\qquad \sum_I\sum_L A_{IK}\,B_{JL}\,H_{jJ}\,V_{lL}$$

ist nur der Form nach eine Summation über $\mathfrak{E}$, in Wirklichkeit ist es nur eine Summation über 1^1, da die zu (2) hinzugefügten Faktoren alle Glieder wegfallen lassen außer denjenigen, in denen die Summationsindizes die Hinterglieder bzw. die Vorderglieder von j bzw. l haben. Trotzdem enthält auch diese Summe immer noch mehr Summanden als (1); und es sind nur diejenigen Summanden beizubehalten, für die das Vorderglied von I übereinstimmt mit dem Hinterglied von L, d. h. es ist noch der Faktor $(\breve{V};\,H)_{IL}$ hinzuzufügen.

$$(6)\qquad \sum_I\sum_L A_{IK}\,B_{JL}\,H_{jI}\,V_{lL}(\breve{V};\,H)_{IL}$$

enthält nun genau so viel Summanden wie das vorgelegte (1), doch ist (6) allgemeiner als (1), weil die Übereinstimmung der beiden Indizes j, der beiden k, der beiden l, welche in (1) zu sehen ist, nicht in (6) zum Ausdruck hommt. Dies muß noch geschehen mit Hilfe von (4):

$$(7)\qquad \sum_I\sum_L A_{IK}\,B_{JL}\,H_{jI}\,V_{lL}(\breve{V};\,H)_{IL}(\breve{V};\,H)_{JI}\,(\breve{V};\,H)_{KJ}(\breve{V};\,H)_{LK}$$

ist an Stelle von (1) zu setzen und von derselben Allgemeinheit wie (1). Das Produktieren geschieht dual entsprechend wie das Summieren.

Wie in diesem Beispiel durch die letzten Faktoren die Gleichheit

gewisser Indizes der vorgelegten Gleichung zum Ausdruck gebracht wird (eine Gleichheit, die bei der Einführung der neuen Relativkoeffizienten zunächst nicht mehr zum Ausdruck kam), so hat man überall zu suchen, wo in $f=0$ gleiche Indizes vorkommen oder wo die Gleichheit bzw. Ungleichheit von Indizes durch Koeffizienten wie $1'_{ij}$ oder $0'_{ij}$ zum Ausdruck kommt; und wo dann durch Einführung der neuen Relativkoeffizienten diese Gleichheit bzw. Ungleichheit nicht mehr zum Ausdruck kommt, hat man sie wieder durch Einführung entsprechender Faktoren bzw. Summanden wie in dem letzten Beispiel zum Ausdruck zu bringen. Nur dann kann man sicher sein, daß die neue Gleichung genau die entsprechenden Umformungen gestattet wie $f=0$ und folglich genau dann identisch erfüllt ist, wenn $f=0$ es ist, da ja dann beide Gleichungen genau dieselben Funktionen von Relativkoeffizienten enthalten, nur daß die Argumente, d. h. die Relativkoeffizienten, anders benannt sind.

Jetzt sind noch die Eigenschaften von V und H in die neue Gleichung aufzunehmen. Ich will im folgenden Relative stets in Form einer Tabelle schreiben, d. h., wenn etwa $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ die Elemente eines Denkbereichs erster Ordnung sind, so will ich das Relaliv a folgendermaßen schreiben:

$$a = \left\{\begin{array}{c|cccc} & \alpha & \beta & \gamma & \cdots \\ \hline \alpha & a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} & \cdots \\ \beta & a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} & \cdots \\ \gamma & a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

Jeder Untermenge des Denkbereichs erster Ordnung entspricht dann ein „System" im Schröderschen Sinne, z. B. der Menge

$$\mathfrak{A} = (\alpha, \gamma, \delta)$$

entspricht das System

$$\mathfrak{A} = \left\{\begin{array}{c|cccccc} & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \cdots \\ \hline \alpha & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \delta & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

in welchem die zu den Elementen α, γ, δ von $\mathfrak{A}$ gehörenden Zeilen lauter Einsen enthalten, die übrigen Zeilen dagegen lauter Nullen.

Der Untermenge 1^1 von $\mathfrak{C}$ entspricht nun ein System q, nämlich

$$q = \left\{ \begin{array}{c|cccccc} & i & (i,j) & (j,i) & j & (i,k) & \cdots \\ \hline i & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ (i,j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ (j,i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ j & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ (i,k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

Ferner ist

$$V = \left\{ \begin{array}{c|cccccc} & i & (i,j) & (j,i) & j & (i,k) & \cdots \\ \hline i & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ (i,j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ (j,i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ j & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ (i,k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

$$H = \left\{ \begin{array}{c|cccccc} & i & (i,j) & (j,i) & j & (i,k) & \cdots \\ \hline i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ (i,j) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ (j,i) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ j & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ (i,k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right.$$

Wir wollen nun die Eigenschaften von V und H durch bloße Relativgleichungen ausdrücken. Diese Eigenschaften bestehen kurz gesagt darin, daß sie die Elemente von $\mathfrak{C}$ in ein quadratisches Schema ordnen. Diese Eigenschaft ist nun im folgenden logisch zu zergliedern und in Relativgleichungen zu übersetzen.

Zunächst sind V und H das, was Schröder eine Funktion im engeren Sinne nennt, d. h. V und H ordnen jedem Element I von $\mathfrak{C}$ ein und nur ein Element zu (nämlich das Vorder- bzw. Hinterglied von I). Diese Eigenschaft wird ausgedrückt durch

(1) $$V ; \breve{V} \mathrel{-\!\!\!\!\in} 1' \mathrel{-\!\!\!\!\in} \breve{V} ; V,$$

(2) $$H ; \breve{H} \mathrel{-\!\!\!\!\in} 1' \mathrel{-\!\!\!\!\in} \breve{H} ; H$$

(vgl. Schröder Bd. III, S. 587, 17)).

Die Menge sämtlicher Vorderglieder ist das frühere 1^1, das System sämtlicher Vorderglieder ist also q (vgl. S. 467), d. h. es ist $q = V;1$; da aber ebenso $q = H;1$ ist, so ist

(3) $$V;1 = H;1.$$

Eine weitere Eigenschaft von V und H besteht darin, daß jedes Element von 1^1 sein eigenes Vorderglied ist, d. h.

$$q \cdot 1' \preceq V \cdot 1'$$

oder

(4) $$V;1 \cdot 1' \preceq V \cdot 1',$$

ebenso

(5) $$H;1 \cdot 1' \preceq H \cdot 1'.$$

Wegen $V \preceq V;1$ darf statt $\preceq$ auch $=$ stehen in (4) und (5).

Man denke sich nun ein quadratisches Schema hergestellt von folgender Art

	i	j	k	.	. .
i					
j					
k					
.					
.					

wo $i, j, k, \cdots$ die sämtlichen Elemente von 1^1 sind, d. h. die sämtlichen Vorder- und Hinterglieder. Wir schreiben nun ein Element von $\mathfrak{E}$, welches das Vorderglied m und das Hinterglied n besitzt, in das Feld der m^{ten} Zeile und n^{ten} Spalte unseres Schemas. Durch (1), (2), (3) ist zum Ausdruck gebracht, daß jedes Element von $\mathfrak{E}$ genau ein Vorder- und ein Hinterglied besitzt, d. h. also nach unserer Vorschrift in genau ein Feld unseres Schemas hineingeschrieben wird. Es ist nun zum Ausdruck zu bringen, daß jedes Feld ein und nur ein Element enthält.

Daß jedes Feld *höchstens* ein Element enthält, bedeutet folgendes: Haben zwei Elemente I und J dasselbe Vorder- und Hinterglied, ist also

$$(\breve{V};V)_{IJ} = 1, \qquad (\breve{H};H)_{IJ} = 1,$$

so stimmt I und J überein, d. h. $1'_{IJ} = 1$; es ist also

$$(\breve{V};V)_{IJ}\,(\breve{H};H)_{IJ} \preceq 1'_{IJ}$$

und da dies für beliebige I, J gilt, ist

(6) $$\breve{V};V \cdot \breve{H};H \preceq 1'.$$

Daß endlich jedes Feld des Schemas *mindestens* ein Element von $\mathfrak{E}$ enthält, bedeutet folgendes: Wenn I und J zu 1^1 gehören, wenn also $q_{IJ}=1$, $q_{JI}\equiv\breve{q}_{IJ}=1$, so muß ein Element K existieren, welches I zum Vorderglied und J zum Hinterglied hat, es muß dann also sein

$$1=\sum_K V_{IK}H_{JK}\equiv\sum_K V_{IK}\breve{H}_{KJ}\equiv(V;\breve{H})_{KJ}.$$

Daher ist $q_{IJ}\breve{q}_{IJ}\Subset(V;\breve{H})_{IJ}$ für beliebige I, J, d. h.

$$q\breve{q}\Subset V;\breve{H}$$

oder

(7) $$V;1\cdot 1;\breve{H}\Subset V;\breve{H}.$$

Der Gleichung $F'=0$ ist also noch (1) bis (7) als Voraussetzung voran zuschicken:

(8) $$(1)\text{ bis }(7)\Subset(F'=0).$$

Dies gibt, in eine Primärgleichung verwandelt und auf 0 gebracht, die gesuchte Gleichung $F=0$.

Ist in der Tat $f=0$ nicht identisch erfüllt, so gibt es einen Bereich 1^1 und ein Wertsystem der Relativkoeffizienten von den in f vorkommenden Relativen a, b, $\cdots$, für welche sie nicht erfüllt ist. Konstruiert man dann aus 1^1 durch Paarbildung den Bereich $\mathfrak{E}$ und definiert V und H wie auf S. 465, so ist für diese V und H die Vor. (1) bis (7) erfüllt, kann also wegbleiben, und $F=0$ kann durch $F'=0$ ersetzt werden. Jedem Koeffizienten aber, der in $f=0$ vorkommt, entspricht ein Koeffizient, der in $F'=0$ vorkommt; und mit einem Wertsystem, das $f=0$ nicht erfüllt, ist auch eins gegeben, das $F'=0$ und damit $F=0$ nicht erfüllt, qed.

Ist umgekehrt ein Bereich $\mathfrak{E}$ und ein Wertsystem der Relativkoeffizienten der in $F=0$ vorkommenden Relative A, B, $\cdots$, H, V gegeben, welches $F=0$ nicht erfüllt, so gehören zu diesem Wertsystem auch Werte von V und H, und zwar solche, welche (1) bis (7) erfüllen; denn für andere Wertsysteme ist ja $F=0$ nach (8) identisch erfüllt. $F'=0$ kann daher nach (8) durch das gegebene Wertsystem nicht erfüllt sein. Wir können nun einen Bereich 1^1 und ein zu diesem gehöriges Wertsystem der in $f=0$ vorkommenden Relativkoeffizienten finden, für das auch $f=0$ nicht erfüllt ist. Setzen wir nämlich $V;1=q$, so entspricht diesem System eine Menge, die wir als Bereich 1^1 für $f=0$ zugrunde legen wollen. Kommt in $F'=0$ ein Koeffizient A_{IK} vor, so gibt es nach (1) bis (7) genau je ein Element i, j, k, l, so daß

$$V_{iI}=1,\quad H_{jI}=1,\quad V_{kK}=1,\quad H_{lK}=1.$$

Nach Bestimmung dieser Werte i, j, k, l lassen wir dem A_{IK} ein a_{ijkl} entsprechen und erteilen dem a_{ijkl} denselben Wert, der für A_{IK} gegeben ist.

So gelangen wir zu einem Wertsystem, welches $f = 0$ nicht erfüllt, da es $F' = 0$ nicht erfüllt. Mit $f = 0$ ist daher auch $F = 0$ identisch erfüllt und umgekehrt.

Liegt nun eine höhere Relativgleichung vor, etwa eine senäre mit Koeffizienten a_{ijklmn}, so kann man diese nach derselben Methode in eine ternäre verwandeln, (deren Umwandlung in eine binäre wir bereits kennen), indem man setzt:

$$(i, j) = I, \quad (k, l) = K, \quad (m, n) = M,$$

oder man kann sie mit unwesentlicher Abänderung der Methode auch gleich in eine binäre verwandeln, indem man setzt

$$(i, j, k) = I, \quad (l, m, n) = L.$$

Quinäre, septenäre usw. Gleichungen lassen sich auf senäre, oktonäre usw. zurückführen.

Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

In dieser Arbeit werde ich einen Existenzbeweis mitteilen, der von der Funktion $f(x, y)$ lediglich Stetigkeit fordert und der mir wesentlich durchsichtiger scheint als die seither für diesen Fall gegebenen Beweise.*) Dazu kommt der folgende weitere Vorteil. Bei allen bisher geführten Existenzbeweisen (mit und ohne *Lipschitz*bedingung) wird die Funktion $f(x, y)$ in einem Bereich $|x - x_0| \leqq a$, $|y - y_0| \leqq b$ stetig vorausgesetzt, und wenn M das Maximum ihres absoluten Betrages ist, so erhält man die Integrale allemal nur in dem Bereich

$$|x - x_0| \leqq \text{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Demgegenüber liefert der folgende Beweis einen Existenzbereich, der im allgemeinen erheblich größer ist und in der Praxis meist gestatten wird, die Integralkurven in ihrem *gesamten* Verlauf zu verfolgen. Dabei beschränke ich mich auf den Fall $x - x_0 > 0$, da dann für den umgekehrten nur die Transformation $x = -x'$ nötig ist.

§ 1.

Formulierung des Existenztheorems.

Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig in einem Gebiet T, das durch die Ungleichungen

$$x_0 \leqq x \leqq X,$$
$$\omega_1(x) \leqq y \leqq \omega_2(x)$$

definiert ist. Dabei sollen die Funktionen $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ den folgenden Forderungen genügen:

---

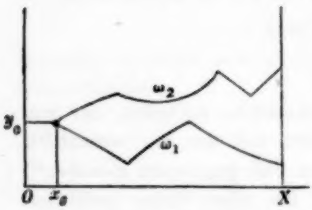
*) Literatur bei Painlevé: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II A 4a, § 8.

1. Sie sind in dem Intervall (x_0, X) stetig und nehmen für $x = x_0$ den Wert y_0 an.

2. Die vor- und rückwärtsgenommenen Differentialquotienten $D_+\omega_i(x)$, $D_-\omega_i(x)$ sind vorhanden und genügen den Ungleichungen:

$$D_\pm\,\omega_1(x) \leqq f(x, \omega_1(x)),$$
$$D_\pm\,\omega_2(x) \geqq f(x, \omega_2(x)).$$

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir zeigen, daß es im Intervall (x_0, X) wenigstens eine Funktion $y = y(x)$ gibt, die ganz im Gebiet T bleibt, so daß insbesondere $y(x_0) = y_0$ ist, und die der Differentialgleichung



$$y' = f(x, y)$$

genügt.

Zur Veranschaulichung ist in der Figur ein Gebiet T gezeichnet.

Wenn $f(x, y)$ stetig ist für

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y - y_0| \leqq b,$$

und wenn M das Maximum von $|f(x, y)|$ in diesem Bereich ist, so genügen die Funktionen

$$\omega_1(x) = y_0 - M(x - x_0), \quad \omega_2(x) = y_0 + M(x - x_0)$$

unseren Forderungen in dem Intervall

$$0 \leqq x - x_0 \leqq \text{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Der bekannte in der Einleitung erwähnte Existenzbereich ist also in dem unseren jedenfalls enthalten.

§ 2.

Gewinnung einer Funktion $g(x)$, die sich später als Integral erweisen wird.

Das Maximum von $|f(x, y)|$ im Gebiet T sei M; dabei soll $M > 0$ sein, da für $M = 0$ die Sache trivial ist. Wir setzen die Funktion $f(x, y)$ über T hinaus fort, indem wir definieren:

$$f(x, y) = f(x, \omega_1(x)) \quad \text{für} \quad y < \omega_1(x),$$
$$f(x, y) = f(x, \omega_2(x)) \quad \text{für} \quad y > \omega_2(x).$$

Dann ist die Funktion $f(x, y)$ für $x_0 \leqq x \leqq X$ und beliebige y definiert; offenbar ist sie in diesem unendlichen Gebiet *gleichmäßig stetig*, und das Maximum ihres absoluten Betrages ist immer noch M.

Jede stetige Funktion $\varphi(x)$, die für x_0 den Wert y_0 annimmt und für $x_0 \leqq x \leqq X$ den Ungleichungen

$$D_\pm\,\varphi(x) < f(x, \varphi(x))$$

genügt, nennen wir eine *Unterfunktion*. Z. B. wird

$$\varphi(x) = \omega_1(x) - \varepsilon(x - x_0),$$

wenn ε irgend eine positive Zahl bedeutet, eine Unterfunktion sein; denn hier ist

$$D_\pm \varphi(x) = D_\pm \omega_1(x) - \varepsilon \leqq f(x, \omega_1(x)) - \varepsilon = f(x, \varphi(x)) - \varepsilon.$$

Jede stetige Funktion $\psi(x)$, die für x_0 den Wert y_0 annimmt und für $x_0 \leqq x \leqq X$ den Ungleichungen

$$D_\pm \psi(x) > f(x, \psi(x))$$

genügt, nennen wir eine *Oberfunktion*. Z. B. wird

$$\varphi(x) = \omega_2(x) + \varepsilon(x - x_0) \qquad (\varepsilon > 0)$$

eine solche sein.

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine Unter-, $\psi(x)$ eine Oberfunktion, so ist stets

(1) $$\varphi(x) \leqq \psi(x) \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x \leqq X$$

und zwar Gleichheit nur an der Stelle x_0. Denn wegen $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$ und wegen

$$D_+ \varphi(x_0) < f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, \psi(x_0)) < D_+ \psi(x_0)$$

ist jedenfalls $\varphi(x) < \psi(x)$, wenn $x - x_0$ positiv und genügend klein. Wäre nun einmal $\varphi(x) \geqq \psi(x)$, so müßte es eine *erste* Stelle $x_1 (> x_0)$ geben, für die $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ wäre; also

$$\varphi(x_1) = \psi(x_1),$$
$$\varphi(x_1 - h) < \psi(x_1 - h)$$

für beliebig kleine positive h. Daraus folgt aber

$$D_- \varphi(x_1) \geqq D_- \psi(x_1),$$

während in Wahrheit doch

$$D_- \varphi(x_1) < f(x_1, \varphi(x_1)) = f(x_1, \psi(x_1)) < D_- \psi(x_1)$$

sein muß.

Ist $\psi(x)$ eine *bestimmte* Oberfunktion, so ist die Ungleichung (1) richtig für *jede* Unterfunktion $\varphi(x)$. Für einen festen Wert x haben daher die Funktionswerte der Unterfunktionen eine endliche obere Grenze, die wir $g(x)$ nennen. Offenbar ist $g(x_0) = y_0$. Ebenso haben die Funktionswerte der Oberfunktionen eine endliche untere Grenze $G(x)$, und es ist auch $G(x_0) = y_0$. Aus (1) folgt dann sofort $g(x) \leqq G(x)$.

Da $\omega_1(x) - \varepsilon(x - x_0)$ eine Unterfunktion ist, so wird jedenfalls

$$g(x) \geqq \omega_1(x) - \varepsilon(x - x_0)$$

sein; also weil hier ε beliebig klein sein kann:

$$g(x) \geqq \omega_1(x).$$

Analog ist $G(x) \leqq \omega_2(x)$; also schließlich:

(2) $$\omega_1(x) \leqq g(x) \leqq G(x) \leqq \omega_2(x).$$

Hiermit haben wir für $x_0 \leqq x \leqq X$ zwei Funktionen $g(x)$, $G(x)$ definiert, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annehmen und wegen (2) dem Gebiet T angehören. Wir wollen beweisen, daß diese Funktionen Integrale unserer Differentialgleichung sind. Dabei wird es genügen, den Beweis für $g(x)$ durchzuführen, der dann sofort auf $G(x)$ zu übertragen ist. Wir führen den Beweis in drei Schritten (§ 3—5).

§ 3.

Stetigkeit von $g(x)$.

Der erste Schritt besteht in dem Nachweis, daß $g(x)$ stetig ist. Seien x_1, x_2 zwei ungleiche Werte des Intervalles (x_0, X), und etwa $x_1 < x_2$. Ist $\varphi(x)$ eine beliebige Unterfunktion, so hat man einerseits*)

$$(3)\quad \begin{cases} g(x_2) - g(x_1) \leqq g(x_2) - \varphi(x_1) < g(x_2) - \varphi(x_2) + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x))\, dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \leqq g(x_2) - \varphi(x_2) + M(x_2 - x_1). \end{cases}$$

Andererseits aber auch

$$(4)\quad g(x_2) - g(x_1) \geqq \varphi(x_2) - g(x_1) = [\varphi(x_1) - g(x_1)] + [\varphi(x_2) - \varphi(x_1)].$$

Nun gibt es eine Unterfunktion $\varphi(x)$, welche an der Stelle x_2 dem Wert $g(x_2)$ beliebig nahe kommt, weil ja $g(x_2)$ als obere Grenze von $\varphi(x_2)$ definiert ist. Daher folgt aus (3):

$$(5)\qquad g(x_2) - g(x_1) \leqq M(x_2 - x_1).$$

Andererseits gibt es, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, auch eine Unterfunktion $\varphi_1(x)$, welche an der Stelle x_1 der Ungleichung

$$g(x_1) - \varphi_1(x_1) < \varepsilon$$

---

*) Hier sowie mehrfach später wird der Satz benutzt: *Aus der Ungleichung $D_+ \varphi(x) < F(x)$, wo $\varphi(x)$, $F(x)$ stetige Funktionen bedeuten, folgt für $x_1 < x_2$:*

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) < \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx.$$

Diesen beweist man folgendermaßen. Die stetige Funktion

$$P(x) = \left[\varphi(x_2) - \varphi(x_1) - \int\limits_{x_1}^{x_2} F(t)\, dt\right] \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \varphi(x) + \int\limits_{x_1}^{x} F(t)\, dt$$

hat im Intervall (x_1, x_2) ein Maximum, und da $P(x_2) = P(x_1)$, so nimmt sie ihr Maximum gewiß auch an einer von x_2 verschiedenen Stelle ξ an. Dann ist aber $D_+ P(\xi) \leqq 0$; also:

$$\left[\varphi(x_2) - \varphi(x_1) - \int\limits_{x_1}^{x_2} F(t)\, dt\right] \frac{1}{x_2 - x_1} \leqq D_+ \varphi(\xi) - F(\xi) < 0. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

genügt. Setzt man dann

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{für} \quad x_0 \leqq x \leqq x_1, \\ \varphi_1(x_1) - (M+\varepsilon)(x-x_1) & \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq X, \end{cases}$$

so ist offenbar auch $\Phi(x)$ eine Unterfunktion; und wenn man in (4) speziell $\varphi(x) = \Phi(x)$ einsetzt, erhält man:

$$g(x_2) - g(x_1) > -\varepsilon - (M+\varepsilon)(x_2 - x_1).$$

Da ε hier beliebig klein sein kann, so ist auch

$$(6) \qquad g(x_2) - g(x_1) \geqq -M(x_2 - x_1).$$

Mit den Ungleichungen (5) und (6) ist aber die Stetigkeit von $g(x)$ bewiesen.

§ 4.

Approximation von $g(x)$ durch Unterfunktionen.

Sei ε eine (beliebig kleine) positive Zahl. Dann gibt es gewiß eine Unterfunktion $\varphi(x)$, für welche an einer *festen* Stelle x des Intervalles (x_0, X) die Ungleichung

$$(7) \qquad g(x) - \varphi(x) < \varepsilon$$

gilt, da ja $g(x)$ die obere Grenze von $\varphi(x)$ ist (bei festgehaltenem x). Wir wollen aber jetzt zeigen, *daß es auch eine Unterfunktion $\varphi(x)$ gibt, für welche die Ungleichung* (7) *im ganzen Intervall* (x_0, X) *gilt.* Dazu schicken wir folgenden Hilfssatz voraus:

Sind $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ Unterfunktionen, so ist auch

$$\Phi(x) = \operatorname{Max}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

eine Unterfunktion.

Es genügt, das für $n = 2$ zu beweisen, weil der allgemeine Satz sich dann sofort durch den Schluß von n auf $n+1$ ergibt. Sei also $n = 2$. Offenbar ist $\Phi(x)$ stetig, und es ist $\Phi(x_0) = y_0$. Wenn nun an einer Stelle $x = \xi$ etwa $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$ ist, so gilt das auch in der Umgebung von ξ; folglich ist $\Phi(\xi) = \varphi_1(\xi)$, und

$$D_\pm \Phi(\xi) = D_\pm \varphi_1(\xi) < f(\xi, \varphi_1(\xi)) = f(\xi, \Phi(\xi)).$$

Wenn dagegen an einer Stelle $x = \xi'$ einmal $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ ist, so findet man leicht:

$$D_+ \Phi(\xi') = \operatorname{Max}(D_+ \varphi_1(\xi'), D_+ \varphi_2(\xi')) < f(\xi', \varphi_1(\xi')) = f(\xi', \varphi_2(\xi')),$$

$$D_- \Phi(\xi') = \operatorname{Min}(D_- \varphi_1(\xi'), D_- \varphi_2(\xi')) < f(\xi', \varphi_1(\xi')) = f(\xi', \varphi_2(\xi'));$$

also gewiß auch

$$D_\pm \Phi(\xi') < f(\xi', \Phi(\xi')),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Um nun eine Unterfunktion der oben verlangten Art nachzuweisen, schalten wir in das Intervall (x_0, X) Zwischenwerte ein:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = X,$$

und zwar so nahe beieinander, daß

$$x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{3M},$$

und daß außerdem die Schwankung der stetigen Funktion $g(x)$ in den Intervallen (x_{i-1}, x_i) kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ ist.*) Nun läßt sich gewiß eine Unterfunktion $\varphi_i(x)$ angeben, welche an der Stelle x_i der Ungleichung

$$g(x_i) - \varphi_i(x_i) < \frac{\varepsilon}{3}$$

genügt. Nach dem obigen Hilfssatz ist dann auch

$$\Phi(x) = \operatorname{Max}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$$

eine Unterfunktion, und von dieser läßt sich zeigen, daß sie der Forderung (7) genügt. Ist nämlich x irgend ein Wert des Intervalles (x_0, X), so gehört x auch einem Teilintervall (x_{i-1}, x_i) an. Daher wird

$$\begin{aligned}\Phi(x) \geqq \varphi_i(x) > \varphi_i(x_i) &- \int_x^{x_i} f(t, \varphi_i(t))\,dt \\ &\geqq \varphi_i(x_i) - M(x_i - x) \\ &\geqq g(x) - [g(x) - g(x_i)] - [g(x_i) - \varphi_i(x_i)] - M(x_i - x_{i-1}) \\ &> g(x) - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Also in der Tat

$$g(x) - \Phi(x) < \varepsilon. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

§ 5.

Nachweis, daß $g(x)$ der Differentialgleichung genügt.

Wir kommen jetzt zum dritten und letzten Schritt unseres Beweises. Seien wieder x_1, x_2 irgend zwei Werte des Intervalles (x_0, X), und sei $x_1 < x_2$. Dann ist, wenn $\varphi(x)$ eine beliebige Unterfunktion bedeutet (vgl. (3) und (4)):

$$g(x_2) - g(x_1) < g(x_2) - \varphi(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} f(x, \varphi(x))\,dx, \tag{8}$$

$$g(x_2) - g(x_1) \geqq [\varphi(x_1) - g(x_1)] + [\varphi(x_2) - \varphi(x_1)]. \tag{9}$$

---

*) Nach (5) und (6) ist übrigens die zweite Bedingung von selbst erfüllt, wenn die erste erfüllt ist.

Nun kann man nach § 4 die Unterfunktion $\varphi(x)$ so wählen, daß $g(x) - \varphi(x)$ im ganzen Intervall (x_0, X) beliebig klein wird; dann wird aber auch $|f(x, \varphi(x)) - f(x, g(x))|$ beliebig klein, und aus (8) folgt daher:

(10) $$g(x_2) - g(x_1) \leqq \int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x))\,dx.$$

Andererseits sei ε eine beliebig kleine positive Zahl. Man kann ihr eine positive Zahl $\delta = \delta(\varepsilon)$ zuordnen derart, daß für $x_0 \leqq x \leqq X$ durchweg

(11) $$|f(x, y) - f(x, z)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |y - z| < \delta$$

wird. Und wiederum gibt es eine positive Zahl $\eta = \eta(\varepsilon)$ derart, daß

(12) $$|g(x) - g(x')| < \frac{\delta}{3} = \frac{\delta(\varepsilon)}{3} \quad \text{für} \quad |x - x'| < \eta$$

wird.*) Wir setzen dann

$$\text{Min}\left(\eta, \frac{\delta}{3(M+\varepsilon)}\right) = \sigma,$$

so daß also σ eine positive Zahl ist, die von ε abhängt.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir in (9) für x_1, x_2 speziell zwei Zahlen wählen, für welche

$$0 < x_2 - x_1 < \sigma$$

ist, und wollen für $\varphi(x)$ eine Unterfunktion einsetzen, die wir auf folgende Art konstruieren.

Bedeutet τ eine beliebig kleine positive Zahl, die jedenfalls kleiner als $\frac{\delta}{3}$ sein soll, so gibt es eine Unterfunktion $\varphi_1(x)$, die an der Stelle x_1 der Ungleichung

$$g(x_1) - \varphi_1(x_1) < \tau < \frac{\delta}{3}$$

genügt. Wir setzen dann

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) \quad \text{für} \quad x_0 \leqq x \leqq x_1, \\ \varphi_1(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t, g(t))\,dt - \varepsilon(x - x_1) \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ \Phi(x_2) - (M+1)(x - x_2) \quad \text{für} \quad x_2 \leqq x \leqq X, \end{cases}$$

und zeigen, daß $\Phi(x)$ eine Unterfunktion ist. Zunächst ist $\Phi(x_0) = \varphi_1(x_0) = y_0$. Sodann ist das Bestehen der Ungleichungen

$$D_\pm \Phi(x) < f(x, \Phi(x))$$

in den Intervallen (x_0, x_1) und (x_2, X) trivial; wir brauchen das also nur

*) Nach (5) und (6) kann man $\eta = \frac{\delta}{3M}$ wählen.

noch für das Intervall (x_1, x_2) zu beweisen. Für einen Wert x dieses Intervalles ist nun

(13) $$D_\pm \Phi(x) = f(x, g(x)) - \varepsilon.$$

Andererseits ist

$$g(x) - \Phi(x) \leqq |g(x) - g(x_1)| + |g(x_1) - \Phi(x_1)| + |\Phi(x_1) - \Phi(x)|$$
$$< \frac{\delta}{3} + \tau + (M + \varepsilon)(x - x_1) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta,$$

so daß nach (11)

$$|f(x, g(x)) - f(x, \Phi(x))| < \varepsilon$$

sein wird. Aus (13) folgt dann

$$D_\pm \Phi(x) < f(x, \Phi(x)) + \varepsilon - \varepsilon.$$

Also ist $\Phi(x)$ wirklich eine Unterfunktion. Diese wollen wir für $\varphi(x)$ in (9) einsetzen, und erhalten dann

$$g(x_2) - g(x_1) \geqq \Phi(x_1) - g(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(t, g(t))\, dt - \varepsilon(x_2 - x_1)$$
$$> -\tau + \int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x))\, dx - \varepsilon(x_2 - x_1).$$

Da aber τ beliebig klein sein darf (unabhängig von ε), so folgt hieraus:

$$g(x_2) - g(x_1) \geqq \int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x))\, dx - \varepsilon(x_2 - x_1)$$

für $0 < x_2 - x_1 < \sigma = \sigma(\varepsilon)$. Im Verein mit (10) ergibt sich also:

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x))\, dx \geqq \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \geqq \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x, g(x))\, dx - \varepsilon,$$

wo ε beliebig klein sein darf, wenn nur das Intervall (x_1, x_2) klein genug, nämlich $< \sigma(\varepsilon)$ ist. Hieraus folgt aber augenblicklich:

$$g'(x) = f(x, g(x))$$

im ganzen Intervall (x_0, X); w. z. b. w. Selbstverständlich ist unter $g'(x_0)$ nur $D_+ g(x_0)$, unter $g'(X)$ nur $D_- g(X)$ zu verstehen.

§ 6.

Ergänzungen zu dem Existenztheorem.

Ebenso wie wir die Funktion $g(x)$ als Integral der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

nachgewiesen haben, erweist sich auch die Funktion $G(x)$ des § 2 als ein Integral. Wir beweisen jetzt, daß jedes beliebige Integral $y = y(x)$,

das für $x = x_0$ den Wert y_0 hat und dem Gebiet T angehört, den Ungleichungen

$$g(x) \leqq y(x) \leqq G(x)$$

genügt.

Wäre einmal $y(x) < g(x)$, so müßte es auch eine Unterfunktion $\varphi(x)$ geben, für die einmal $y(x) < \varphi(x)$ wäre. Nun ist aber

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) > D_+ \varphi(x_0);$$

daher für genügend kleine positive $x - x_0$ gewiß $y(x) > \varphi(x)$. Da aber auch einmal $y(x) < \varphi(x)$ werden soll, muß es eine *erste* Stelle $\xi (> x_0)$ geben, für die $y(\xi) = \varphi(\xi)$ wird. Dann ist aber

$$y(\xi) = \varphi(\xi),$$
$$y(\xi - h) > \varphi(\xi - h)$$

für beliebig kleine positive h, woraus folgt:

$$D_- y(\xi) \leqq D_- \varphi(\xi) < f(\xi, \varphi(\xi)) = f(\xi, y(\xi)),$$

während doch

$$D_- y(\xi) = y'(\xi) = f(\xi, y(\xi))$$

sein muß. Wegen dieses Widerspruchs ist in der Tat dauernd $y(x) \geqq g(x)$, und ebenso zeigt man, daß $y(x) \leqq G(x)$ ist.

Wir wollen deshalb $g(x)$ als die Minimal-, $G(x)$ als die Maximallösung der Differentialgleichung bezeichnen. Wenn beide zusammenfallen, kann es nach obigem nur *ein* Integral geben, das für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Dafür ist bekanntlich die Lipschitzsche Bedingung hinreichend; weitere hinreichende Bedingungen hat Herr Osgood angegeben.*)

Wenn die Minimal- und Maximallösung nicht identisch sind, so wird das zwischen ihnen liegende Gebiet, wie bereits Herr G. Mie gezeigt hat**), lückenlos von Integralen ausgefüllt; d. h. wenn die Zahlen x_1, y_1 den Ungleichungen genügen:

$$x_0 < x_1 \leqq X,$$
$$g(x_1) < y_1 < G(x_1),$$

so gibt es wenigstens ein Integral, das für $x = x_0$ den Wert y_0 und für $x = x_1$ den Wert y_1 annimmt. Setzen wir nämlich die Funktion $f(x, y)$

*) W. F. Osgood: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung. Monatshefte für Mathematik und Physik 9.

**) G. Mie: Beweis der Integrierbarkeit gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme nach Peano. Math. Ann. 43.

wieder über T hinaus fort wie in § 2, so gibt es wenigstens ein Integral — es heiße Y —, das für $x = x_1$ den Wert y_1 annimmt und im Gebiet

$$x_1 \geqq x \geqq x_0,$$

$$M(x_1 - x) \geqq Y(x) - y_1 \geqq - M(x_1 - x)$$

bleibt; das lehrt unser Existenzsatz, wenn man die in der Einleitung erwähnte Transformation $x = -x'$ macht. Wenn dabei dauernd

$$g(x) \leqq Y(x) \leqq G(x) \qquad (x_1 \geqq x \geqq x_0)$$

ist, so hat Y die verlangte Eigenschaft. Andernfalls muß es im Intervall (x_0, x_1) eine *letzte* Stelle ξ geben, für welche $Y(\xi) = g(\xi)$ oder $Y(\xi) = G(\xi)$ wird. Dann ist aber die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} Y(x) & \text{für } x_1 \geqq x \geqq \xi, \\ g(x) \text{ bzw. } G(x) & \text{für } \xi \geqq x \geqq x_0 \end{cases}$$

ein Integral der verlangten Art.

Beispiel. Bei der Differentialgleichung $y' = \sqrt{y}$, wo der nicht negative Wert der Quadratwurzel gemeint ist, gibt es unendlich viele Integrale durch den Nullpunkt. Dabei ist 0 die Minimal-, und $\frac{x^2}{4}$ die Maximallösung. Alle dazwischenliegenden münden in die Minimallösung ein. Denn das für $x = 0$ verschwindende Integral, welches für $x = x_1 (> 0)$ den Wert $y_1 \left(> 0, < \frac{1}{4} x_1^2\right)$ annimmt, ist:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(x - x_1 + 2\sqrt{y_1}\right)^2 & \text{für } x \geqq x_1 - 2\sqrt{y_1}, \\ 0 & \text{für } x \leqq x_1 - 2\sqrt{y_1}. \end{cases}$$

§ 7.

Zwei Beispiele.

Wir behandeln jetzt zwei Beispiele, die die Nützlichkeit des in § 1 angegebenen Existenzbereiches der Integrale dartun sollen.

Erstes Beispiel.

$$y' = x - y^2.$$

Hier ist $f(x, y) = x - y^2$, und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist überall vorhanden und stetig. Also ist in der Umgebung jeder Stelle die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, so daß durch jeden Punkt der Ebene eine und nur eine Integralkurve geht. Wie weit sich aber eine solche erstreckt, ohne etwa mit einer zur Y-Achse parallelen Asymptote ins Unendliche zu wandern, darüber läßt sich aus den bisher bekannten Existenztheoremen nichts ausreichendes entnehmen. Wir wollen jetzt zeigen: *Wenn $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, so läßt sich die durch den Punkt x_0, y_0 gehende Integralkurve bis*

zu beliebig großen positiven Werten von x fortsetzen und hat den Parabelzweig $y = \sqrt{x}$ mit positiver Wurzel zur Asymptotenlinie.

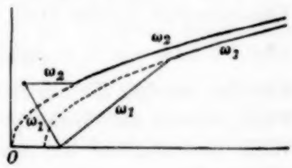
Ist etwa $x_0 - y_0^2 < 0$, so bilden wir, unter δ eine beliebig kleine positive Zahl verstehend, die Funktionen

$$\omega_1(x) = \begin{cases} y_0 - A(x - x_0) & \text{für } y_0 - A(x - x_0) \geqq 0, \\ a\left(x - x_0 - \frac{y_0}{A}\right) & \text{für } 0 \leqq a\left(x - x_0 - \frac{y_0}{A}\right) \leqq \sqrt{x - \delta}, \\ \sqrt{x - \delta} & \text{für } \sqrt{x - \delta} \leqq a\left(x - x_0 - \frac{y_0}{A}\right), \end{cases}$$

$$\omega_2(x) = \begin{cases} y_0 & \text{für } x \leqq y_0^2, \\ \sqrt{x} & \text{für } x \geqq y_0^2. \end{cases}$$

Diesen entsprechen geometrisch zwei gebrochene Kurvenzweige, die in nebenstehender Figur gezeichnet sind. Man sieht sofort:

$$\omega_1(x_0) = \omega_2(x_0) = y_0;$$
$$\omega_1(x) < \omega_2(x) \text{ für } x > x_0,$$
$$D_\pm\, \omega_2(x) \geqq x - \omega_2(x)^2;$$



und wenn die Zahl A sehr groß, und $a (> 0)$ sehr klein, so wird auch

$$D_\pm\, \omega_1(x) \leqq x - \omega_1(x)^2.$$

Die Funktionen $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ genügen also den Forderungen unseres Existenztheorems, wobei der Wert X noch ganz beliebig groß angenommen werden kann. Daher läßt sich das für $x = x_0$ den Wert y_0 annehmende Integral $y = y(x)$ bis zu beliebig großen Werten von x fortsetzen, und es ist dauernd

$$\omega_1(x) \leqq y(x) \leqq \omega_2(x).$$

Also insbesondere, wenn x genügend groß ist,

$$\sqrt{x - \delta} \leqq y(x) \leqq \sqrt{x},$$

so daß in der Tat die Parabel $y = \sqrt{x}$ Asymptotenlinie ist.

Wenn $x_0 - y_0^2 \geqq 0$, so kann man für $\omega_1(x)$ die gleiche Funktion wählen wie oben, für $\omega_2(x)$ wählt man

$$\omega_2(x) = \begin{cases} y_0 + B(x - x_0) & \text{für } y_0 + B(x - x_0) \leqq \sqrt{x}, \\ \sqrt{x} & \text{für } y_0 + B(x - x_0) \geqq \sqrt{x}, \end{cases}$$

wo B genügend groß sein muß. Man findet dann das gleiche Resultat.

Zweites Beispiel.*)

$$(14)\qquad y' = \sqrt{1 + 2\lambda x - y^2} \qquad (\lambda \geqq 0),$$

wo mit der Quadratwurzel der *nicht negative* Wert gemeint ist. Wir suchen die durch den Nullpunkt gehende Integralkurve und beschränken uns dabei auf die Halbebene $x \geqq 0$. Für $\lambda = 0$ haben wir die Gleichung

$$(15)\qquad y' = \sqrt{1 - y^2},$$

deren Integral sich direkt angeben läßt, nämlich

$$(16)\qquad y_{\lambda=0} = \begin{cases} \sin x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{für } x \geqq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ist $\lambda > 0$, so bemerken wir zunächst, daß die Integralkurve nie die Parabel $1 + 2\lambda x - y^2 = 0$ treffen kann; denn sie müßte im Schnittpunkt wegen (14) eine zur X-Achse parallele Tangente haben, also vorher ein Stück weit im Äußeren der Parabel verlaufen sein; aber dort hat die Quadratwurzel keinen Sinn mehr. In jedem Punkt der Integralkurve ist also $1 + 2\lambda x - y^2 > 0$; daher ist $\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{1 + 2\lambda x - y^2}$ vorhanden und stetig. Also ist daselbst die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, so daß die Integralkurve, soweit sie überhaupt existiert, sich nie verästeln kann, sondern völlig eindeutig ist. Um nun die wirkliche Existenz nachzuweisen, bilden wir die Funktionen

$$(17)\qquad \omega_1(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{für } x \geqq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$(18)\qquad \omega_2(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \sqrt{1 + 2\lambda x} & \text{für } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ \sqrt{1 + 2\lambda x} & \text{für } x \geqq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Dann ist augenscheinlich

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0; \quad \omega_1(x) < \omega_2(x) \quad \text{für} \quad x > 0,$$

und außerdem

$$D_\pm\, \omega_1(x) \leqq \sqrt{1 + 2\lambda x - \omega_1(x)^2},$$

$$D_\pm\, \omega_2(x) \geqq \sqrt{1 + 2\lambda x - \omega_2(x)^2}.$$

Unser Existenztheorem liefert daher die Integralkurve in der ganzen Halbebene $x \geqq 0$, und zwar ist

$$\omega_1(x) \leqq y(x) \leqq \omega_2(x).$$

---

*) Vgl. E. Borel: Sur la théorie des résonateurs et la discontinuité des solutions de certains systèmes différentiels. Annali di matematica, ser. 3, t. 21 (1913), S. 225—232.

Läßt man λ gegen Null wandern, so konvergiert die Funktion $\omega_2(x)$ gegen die Funktion (16), während $\omega_1(x)$ dauernd mit (16) identisch bleibt. Die Integralkurve von (14) konvergiert also bei nach Null abnehmendem λ gegen die Integralkurve von (15).

Das scheint im Widerspruch zu stehen mit den Angaben bei Borel a. a. O. Aber Herr Borel hat nicht die Gleichung (14) betrachtet, sondern vielmehr die folgende:

(14a) $$y'^2 = 1 + 2\lambda x - y^2,$$

welche für $\lambda = 0$ außer dem Integral (16) noch das Integral

$$y = \sin x \quad \text{für } \textit{alle } x \geqq 0$$

zuläßt (was bei der Gleichung (14) wegen unserer Vorschrift über das Vorzeichen der Quadratwurzel nicht der Fall ist). Gegen *dieses* Integral konvergiert freilich das Integral von (14) oder (14a) mit abnehmendem λ nicht; insofern hat Herr Borel vollständig recht. Gleichwohl kann ich den a. a. O. auf Seite 228 stehenden Satz „Lorsque λ tend vers zéro, l'intégrale de (14a) n'a pas pour limite l'intégrale de l'équation $y'^2 = 1 - y^2$, mais une courbe entièrement différente“ nicht als zutreffend anerkennen Herr Borel hat eben das Integral (16) übersehen.

Eine höchst merkwürdige Unstetigkeit liegt dagegen in dem von Herrn Borel nicht untersuchten Fall vor, wenn λ durch *negative* Werte nach Null strebt. Während nämlich für $\lambda \geqq 0$ die durch den Nullpunkt gehende Integralkurve von (14) sich, wie wir sahen, bis zu beliebig großen Werten von x fortsetzen läßt, erreicht sie für $\lambda < 0$ bei einer Abszisse $x = \xi$, die höchstens $\frac{\pi}{2}$ ist, *ihr Ende; für* $x > \frac{\pi}{2}$ *existiert sie gar nicht*, kann also auch nicht gegen eine Grenzkurve konvergieren. Auch wenn man auf das Vorzeichen der Quadratwurzel keinen Wert legt, also die Gleichung (14a) statt (14) betrachtet, existiert die Kurve nicht für $x > \xi$.*)

Zum Beweis setzen wir $\lambda = -\mu$. Die vom Nullpunkt ausgehende Integralkurve wird dann nach rechts (d. h. für wachsende x) zunächst ansteigen, und zwar so lange, bis sie die Parabel $1 - 2\mu x - y^2 = 0$ trifft. Die Abszisse des Schnittpunkts sei $x = \xi$, also die Ordinate $y = \sqrt{1 - 2\mu\xi}$. Im Schnittpunkt hat die Integralkurve eine zur X-Achse parallele Tangente; daher würde eine weitere Fortsetzung nach rechts ins Äußere der Parabel führen, wo aber die Quadratwurzel in (14) keinen Sinn hat; eine Fortsetzung über ξ hinaus existiert also nicht.

Nun ist noch zu zeigen, daß $\xi \leqq \frac{\pi}{2}$ ist. Wäre $\xi > \frac{\pi}{2}$, so würde daraus folgen:

*) Man erkennt dann unschwer, daß sie eine Spitze mit der Abszisse ξ hat.

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) < y(\xi) = \sqrt{1-2\mu\xi} < \sqrt{1-\mu\pi}. \tag{19}$$

Andererseits verifiziert man aber leicht, daß

$$\varphi(x) = \sqrt{1-\mu\pi}\,\sin x$$

im Intervall $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ eine Unterfunktion ist. Daher muß

$$y \geqq \sqrt{1-\mu\pi}\,\sin x \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$$

sein, und folglich, indem man x gegen $\frac{\pi}{2}$ wandern läßt, auch

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq \sqrt{1-\mu\pi}$$

im Widerspruch mit (19). Die Annahme $\xi > \frac{\pi}{2}$ ist daher nicht haltbar. W. z. b. w.

Über Irrationalität gewisser unendlicher Reihen.

Von

Otto Szász in Frankfurt a. M.

In einer vorhergehenden Arbeit von Herrn Bernstein und mir*) wurde mit Hilfe der auf Eisenstein zurückgehenden Kettenbruchentwicklung**):

$$(1)\quad \sum_0^\infty{}^\lambda q^{\lambda^2} x^\lambda = 1 + \frac{qx|}{|1} - \frac{q^3x|}{|1} + \frac{q^3(1-q^2)x|}{|1} - \frac{q^7x|}{|1} + \frac{q^5(1-q^4)x|}{|1} - + \cdots$$

bewiesen, daß die Reihe $\sum_0^\infty{}^\lambda \left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda^2} x^\lambda$ einen irrationalen Wert hat, wenn r, s und x *reelle* Zahlen sind, die den Bedingungen genügen:

$$(2)\qquad \begin{cases} x \neq 0 \text{ und rational,} \\ |s| > |r|^3 \text{ und } r, s \text{ ganze Zahlen.} \end{cases}$$

Im folgenden wird dieser Satz auf einfacherem Wege bewiesen und zugleich sein Gültigkeitsbereich erweitert: unter Beibehaltung der Bedingungen (2) dürfen x, r und s auch *komplexe* Zahlen sein.***)

Ich benutze nicht den unendlichen Kettenbruch (1), sondern ziehe die ihm zugrunde liegende Funktionenfolge heran:

---

*) Über Irrationalität unendlicher Kettenbrüche mit einer Anwendung auf die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu q^{\nu^2} x^\nu$, Math. Ann. 76 (1915), S. 295—300. Daselbst auch weiterer Literaturnachweis.

**) Vgl. Oskar Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 315, 333 und 353.

***) Eine komplexe ganze Zahl ist von der Form: $a + bi$, wo a und b reelle ganze Zahlen sind; eine komplexe rationale Zahl ist der Quotient zweier ganzer Zahlen. Hier sei erwähnt, daß Herr O. Perron den bekannten Legendreschen Irrationalitätssatz auf Kettenbrüche ausdehnte, deren Elemente ganze Zahlen eines imaginären quadratischen Körpers sind. Man vgl. seine Arbeit: Über die Konvergenz der Jacobi-Kettenalgorithmen mit komplexen Elementen, Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 37 (1907), S. 401—482, insb. S. 453.

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}_{2\nu}(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty}\lambda\, q^{\lambda(2\nu+\lambda)} \frac{(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu+2})\cdots(1-q^{2\nu+2\lambda-2})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2\lambda})} x^{\lambda}, \\ \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty}\lambda\, q^{\lambda(2\nu+\lambda)} \frac{(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu+2})\cdots(1-q^{2\nu+2\lambda})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2\lambda})} x^{\lambda}, \\ (\nu = 0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

Man bestätigt leicht die Formeln:

$$\mathfrak{Q}_0(x) = 1, \quad \mathfrak{Q}_1(x) = \sum_{0}^{\infty}\lambda\, q^{\lambda^2} x^{\lambda},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_{2\nu}(x) &= \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) - q^{4\nu+1} x\, \mathfrak{Q}_{2\nu+2}(x), \\ \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) &= \mathfrak{Q}_{2\nu+2}(x) + q^{2\nu+1}(1-q^{2\nu+2}) x\, \mathfrak{Q}_{2\nu+3}(x), \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots);$$

setzt man hierin

$$q = \frac{r}{s}, \quad x = \frac{m}{n},$$

$$\mathfrak{Q}_{2\nu}(x) = s^{(2\nu-1)\nu} n^{\nu}\, Q_{2\nu}(x), \quad \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) = s^{(2\nu+1)\nu} n^{\nu}\, Q_{2\nu+1}(x),$$

so erhält man die Rekursionsformeln:

$$(4)\quad \begin{cases} Q_{2\nu}\left(\frac{m}{n}\right) = s^{2\nu}\, Q_{2\nu+1}\left(\frac{m}{n}\right) - r^{4\nu+1} m\, Q_{2\nu+2}\left(\frac{m}{n}\right), \\ Q_{2\nu+1}\left(\frac{m}{n}\right) = s^{2\nu+1} n\, Q_{2\nu+2}\left(\frac{m}{n}\right) + r^{2\nu+1}(s^{2\nu+2} - r^{2\nu+2}) m\, Q_{2\nu+3}\left(\frac{m}{n}\right), \\ (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \end{cases}$$

deren Koeffizienten nunmehr komplexe *ganze* Zahlen sind.

Man beweist auch leicht, daß bei festem x und q ($|q| < 1$)

$$(5)\quad \lim_{\nu=\infty} \mathfrak{Q}_{\nu}(x) = 1$$

ist; in der Tat folgt aus (3) unmittelbar:

$$|\mathfrak{Q}_{\nu}(x) - 1| \leqq |q|^{2\nu} \left(\prod_{1}^{\infty}\lambda\, \frac{1 + |q|^{2\lambda}}{1 - |q|^{2\lambda}} \right) \sum_{1}^{\infty}\lambda\, |q|^{\lambda^2} |x|^{\lambda},$$

und der rechtsseitige Ausdruck strebt offenbar mit wachsendem ν gegen Null.

Hieraus folgt auch, daß es bei festem x und q eine Zahl $N = N(x, q)$ gibt, derart, daß

$$\mathfrak{Q}_{\nu} \neq 0 \quad \text{ist für} \quad \nu \geqq 2N,$$

oder auch

$$Q_{\nu}(x) \neq 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2N.$$

Sei nun zur Abkürzung:

$$\frac{Q_\nu(x)}{Q_{\nu+1}(x)} = P_\nu(x) \qquad (\nu = 2N-1, 2N, \cdots);$$

ich beweise zunächst, daß $P_{2N}\left(\frac{m}{n}\right)$ irrational ist.

Aus (4) folgt $\left(\text{ich schreibe kurz } P_\varkappa \text{ statt } P_\varkappa\left(\frac{m}{n}\right)\right)$:

$$(6) \quad \begin{cases} P_{2\nu+1}(P_{2\nu} - s^{2\nu}) = -r^{4\nu+1}m, \\ P_{2\nu+2}(P_{2\nu+1} - s^{2\nu+1}n) = r^{2\nu+1}(s^{2\nu+2} - r^{2\nu+2})m, \\ (\nu = N, N+1, \cdots); \end{cases}$$

hieraus läßt sich P_ν als rationale Funktion von P_{2N} ausdrücken. Man erhält:

$$(7) \quad \begin{cases} P_{2\nu-1}(B_{2\nu-1}P_{2N} - A_{2\nu-1}) = r^{4\nu-3}m(B_{2\nu-2}P_{2N} - A_{2\nu-2}), \\ P_{2\nu}(B_{2\nu}P_{2N} - A_{2\nu}) = -r^{2\nu-1}(s^{2\nu} - r^{2\nu})m(B_{2\nu-1}P_{2N} - A_{2\nu-1}), \\ (\nu = N+1, N+2, \cdots), \end{cases}$$

wobei

$$B_{2N} = 0, \quad B_{2N+1} = 1, \quad A_{2N} = -1, \quad A_{2N+1} = s^{2N},$$

$$\left.\begin{aligned} B_{2\nu+1} &= s^{2\nu}B_{2\nu} + r^{2\nu-1}(s^{2\nu} - r^{2\nu})mB_{2\nu-1}, \\ A_{2\nu+1} &= s^{2\nu}A_{2\nu} + r^{2\nu-1}(s^{2\nu} - r^{2\nu})mA_{2\nu-1}, \end{aligned}\right\} (\nu = N+1, N+2, \cdots)$$

$$\left.\begin{aligned} B_{2\nu+2} &= s^{2\nu+1}nB_{2\nu+1} - r^{4\nu+1}mB_{2\nu}, \\ A_{2\nu+2} &= s^{2\nu+1}nA_{2\nu+1} - r^{4\nu+1}mA_{2\nu}, \end{aligned}\right\} \qquad (\nu = N, N+1, \cdots)$$

ist, wie man mit vollständiger Induktion leicht bestätigt. Für das folgende ist nur von Wichtigkeit, daß die B_ν, A_ν *ganze* (komplexe) Zahlen sind; ferner ist

$$B_\nu P_{2N} - A_\nu \neq 0 \quad \text{für} \quad \nu = 2N, 2N+1, \cdots,$$

denn für $\nu = 2N$ ist dies offenbar richtig und seine allgemeine Gültigkeit folgt dann durch vollständige Induktion aus (7). Hieraus ergibt sich auch:

$$(8) \quad P_{2\nu-1}P_{2\nu}(B_{2\nu}P_{2N} - A_{2\nu}) = -r^{6\nu-4}(s^{2\nu} - r^{2\nu})m^2(B_{2\nu-2}P_{2N} - A_{2\nu-2})$$
$$(\nu = N+1, N+2, \cdots);$$

ferner ist nach Definition:

$$(9) \qquad P_{2\nu-1}P_{2\nu} = \frac{Q_{2\nu-1}}{Q_{2\nu+1}} = s^{4\nu-1}n\frac{\mathfrak{Q}_{2\nu-1}}{\mathfrak{Q}_{2\nu+1}},$$

und

$$\left|\frac{s^{4\nu-1}n}{r^{6\nu-4}(s^{2\nu} - r^{2\nu})m^2}\right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{s^{2\nu-1}}{r^{6\nu-4}m^2}\right| \geq \frac{1}{2|m|^2}\left(\frac{|s|}{|r|^3}\right)^{2\nu-1}.$$

Falls $|s| > |r|^3$ ist, wächst also dieser Quotient über alle Schranken; mit Berücksichtigung von (5), (8) und (9) folgt hieraus, daß die unendlich vielen von Null verschiedenen positiven Zahlen:

$$(10) \qquad |B_{2\nu} P_{2N} - A_{2\nu}| \qquad (\nu = N, N+1, \cdots)$$

unter jede Schranke sinken, daher ist P_{2N} irrational.

Aus (4) folgt nun aber sukzessive, daß auch die Zahlen

$$Q_{2N-1}, \; Q_{2N-2}, \; \cdots, \; Q_1$$

von Null verschieden sind und die P_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ sämtlich irrational sind.

Der Fall $|s| = |r|^3$ konnte im reellen Gebiet leicht auf den Fall $|s| > |r|^3$ zurückgeführt werden; hier würde er eine gesonderte Behandlung erheischen.

Aus (8) ist leicht ersichtlich, daß für $|s| < |r|^3$ die Größen (10) von einem gewissen an monoton unbegrenzt wachsen. Dasselbe gilt auch für die entsprechenden Ausdrücke mit ungeraden Indizes, so daß für diesen Fall der hier eingeschlagene Weg zu keinem Resultat führt.

Ist schließlich ξ eine Nullstelle von $\mathfrak{Q}_\nu(x)$, so ist $P_\nu(x) = 0$, also rational, daher muß auch ξ irrational sein; die Nullstellen sind in unendlicher Anzahl vorhanden, denn $\mathfrak{Q}_\nu(x)$ ist offenbar (für $|q| < 1$ und jedes ν) eine ganze transzendente Funktion nullter Ordnung.

Zusammenfassend gilt also der Satz:

Ist x eine von Null verschiedene reelle oder komplexe rationale Zahl und r, s reelle oder komplexe ganze Zahlen, die der Bedingung

$$|s| > |r|^3$$

genügen, sa hat die Reihe $\sum_0^\infty \left(\frac{r}{s}\right)^{\lambda^2} x^\lambda$ *einen irrationalen Wert. Unter der gleichen Bedingung sind* $\left(q = \frac{r}{s} \textit{ gesetzt}\right)$ *die Nullstellen der Funktionen* (3) *sämtlich irrational.*

Auf ähnlichem Wege läßt sich zeigen, daß unter denselben Bedingungen auch die Reihe $\sum_0^\infty q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} x^\nu$ einen irrationalen Wert hat und ihre Nullstellen sämtlich irrational sind. Auch die Irrationalität von e^x für alle komplexen rationalen Werte des Argumentes kann auf diesem Wege von neuem bewiesen werden, indem man den Beweis der Irrationalität für reelle rationale x der Arbeit von F. Bernstein und O. Szász in entsprechender Weise verallgemeinert. Der Grundgedanke aller dieser Überlegungen

ist der, eine absolut abnehmende Folge von Linearformen $B_\nu \zeta - A_\nu$ zu konstruieren, wo ζ die Irrationalität ist und B_ν, A_ν ganzzahlig sind. Dieser Gedanke findet sich zuerst bei Lambert, der die bekannte Kettenbruchentwicklung von $\operatorname{tg} x$ und die Irrationalität von $\operatorname{tg} x$ und e^x für rationale x streng bewies.*)

Göttingen, den 21. Juli 1914.

*) J. H. Lambert, Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques, Histoire de l'Académie de Berlin 1761 (publ. 1768), S. 265—322. Vgl. hierzu Alfred Pringsheim, Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π, Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 28 (1898), S. 325—337.

Ein Grenzwertsatz über die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion.

Von

G. Szegő in Budapest.

1. Es sei $f(x)$ eine überall stetige, nach 2π periodische, positive*) Funktion. Ferner ihre formell gebildete Fouriersche Reihe sei

$$f(x) \sim a_0 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx).$$

Ich bilde die charakteristische Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades

$$D_n(f-\lambda) = \begin{vmatrix} a_0 - \lambda & a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 & \cdots & a_n + ib_n \\ a_1 - ib_1 & a_0 - \lambda & a_1 + ib_1 & \cdots & a_{n-1} + ib_{n-1} \\ a_2 - ib_2 & a_1 - ib_1 & a_0 - \lambda & \cdots & a_{n-2} + ib_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n - ib_n & a_{n-1} - ib_{n-1} & a_{n-2} - ib_{n-2} & \cdots & a_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots),$$

welche bekanntlich $n+1$ reelle Wurzeln

$$\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \cdots, \lambda_n^{(n)}$$

hat. Es ist dann

$$\text{(T)} \qquad \lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \cdots \lambda_n^{(n)} = D_n(f)$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 & \cdots & a_n + ib_n \\ a_1 - ib_1 & a_0 & a_1 + ib_1 & \cdots & a_{n-1} + ib_{n-1} \\ a_2 - ib_2 & a_1 - ib_1 & a_0 & \cdots & a_{n-2} + ib_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \vdots \\ a_n - ib_n & a_{n-1} - ib_{n-1} & a_{n-2} - ib_{n-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots).$$

*) Darunter verstehe ich im folgenden immer eine Funktion, die im Intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$ ein positives Minimum besitzt.

O. Toeplitz*), C. Carathéodory und L. Fejér**) befaßten sich mit diesen Determinanten, welche aus den Fourierschen Konstanten gebildet werden können, und ihre Untersuchungen ergaben, daß dieselben mit dem Wertevorrat von $f(x)$ im engsten Zusammenhange stehen. Es sind nämlich mit deren Hilfe gewisse Maximum-Minimum-Probleme lösbar, welche sich auf positive harmonische Funktionen mit gegebenen $2n+1$ ersten Koeffizienten beziehen, sowie auch einige Fragen der Funktionentheorie von allgemeinem Interesse und großer Wichtigkeit. Determinanten ähnlicher Form begegnete man schon viel früher in der Literatur, jedoch im Bereiche ganz anderer Fragen.

Im folgenden befasse ich mich mit einer Vermutung von Herrn G. Pólya***), nach welcher die aus den n^{ten} Wurzeln†) dieser Determinanten gebildete ganz bestimmte Folge unter den oben genannten Bedingungen für $\lim n = \infty$ einem Grenzwerte zustrebt, welcher dem „geometrischen Mittel" von $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ gleich ist, d. h.

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\lambda_0^{(n)} \lambda_1^{(n)} \cdots \lambda_n^{(n)}} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{D_n(f)} \text{ existiert und } = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(x)\, dx}.$$

Diese Vermutung ist im Falle des Poissonschen Integralkernes, d. h. bei der Funktion

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx$$
$$(|r| < 1),$$

wie auch für trigonometrische Polynome erster Ordnung leicht zu beweisen.

Es ist mir gelungen, diese Behauptung von G. Pólya unter den obigen

*) O. Toeplitz, a) *Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen math.-phys. Kl. (1907), S. 110—116]; b) *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* [Ibid. (1910), S. 489—506]; c) *Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen.* I. Teil: *Theorie der L-Formen* [Math. Ann. 70 (1910), S. 351—376]; d) *Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 32 (2. Semester 1911), S. 191—192].

**) C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen* [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 32 (2. Semester 1911), S. 193—217]; ferner: C. Carathéodory und L. Fejér, *Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz* [Ibid. 32 (2. Semester 1911), S. 218—239].

***) L'Intermédiaire des Mathématiciens 21 (1914), S. 27. Question 4340.

†) Diese Determinanten sind, wie wir sehen werden, unter den obigen Bedingungen, sämtlich positiv (s. Formel (T*)).

Bedingungen ganz allgemein zu beweisen. Herr M. Fekete hat sogar mit Anwendung eines einfachen Determinantensatzes auch die Existenz von

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}(f)}{D_n(f)}$$

bewiesen, welches dann nach allgemeinen Grenzwertsätzen mit $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{D_n(f)}$ übereinstimmt. Ich bezeichne diesen Grenzwert im folgenden durch $D(f)$ und beweise also, daß

$$(1') \qquad D(f) = G(f),$$

wo $G(f)$ das geometrische Mittel von $f(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ bedeutet, d. h.

$$G(f) = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log f(x)\, dx}.$$

Dies geschieht folgendermaßen. Ich forme zuerst die Determinante (T) nach einer bekannten, von G. Landsberg*) herrührenden Methode zu einem $(n+1)$-fachen Integrale um, welches von G. Pólya gefunden worden ist.**) Dann beweise ich nach M. Fekete zunächst die Existenz von $D(f)$; nachdem dieser Nachweis geliefert ist, werden die darauffolgenden Betrachtungen schon wesentlich einfacher. Darauf folgt, nach Ableitung eines formalen Satzes für die Determinante (T), der Beweis der Formel

$$D(\varphi)\, D\left(\frac{1}{\varphi}\right) = 1,$$

wo $\varphi(x)$ ein positives trigonometrisches Polynom beliebiger Ordnung bedeutet. Endlich beweise ich die Behauptung (1') für trigonometrische Polynome beliebiger Ordnung; der Übergang zu beliebigen stetigen, nach 2π periodischen, positiven Funktionen ist dann, auf Grund des bekannten Weierstraßschen Satzes, sehr leicht.

Ich erwähne schließlich, daß die Sätze (1) und (1^{bis}) direkte Approximationsmethoden zur Berechnung bestimmter Integrale von der Form $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log f(x)\, dx$ darbieten.

2. Es seien

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_m(x),$$
$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots,\ \varphi_m(x)$$

im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ gegebene reelle oder komplexe integrierbare

*) G. Landsberg, *Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen* [Math. Ann. 69 (1910), S. 231].

**) L'Intermédiaire des Mathématiciens. l. c.

Funktionen. Dann besagt der oben erwähnte, von G. Landsberg formulierte Satz, daß

$$\text{(L)}\quad \begin{vmatrix} \int_a^b f_1(x)\,\varphi_1(x)\,dx & \cdots & \int_a^b f_m(x)\,\varphi_1(x)\,dx \\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ \int_a^b f_1(x)\,\varphi_m(x)\,dx & \cdots & \int_a^b f_m(x)\,\varphi_m(x)\,dx \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{m!}\underbrace{\int_a^b\cdots\int_a^b}_{m} \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_m) \\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ f_m(x_1) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_m) \\ \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ \varphi_m(x_1) & \cdots & \varphi_m(x_m) \end{vmatrix} dx_1\,dx_2\cdots dx_m.$$

Setzt man in dieser Formel

$$m = n + 1,$$
$$f_r(x) = \frac{f(x)}{2\pi} e^{i(r-1)x},$$
$$\varphi_r(x) = e^{-i(r-1)x},$$
$$x_r = \vartheta_{r-1}$$
$$(r = 1, 2, \cdots, n+1),$$

so erhält man für die Determinante (T) folgenden Ausdruck:

$$D_n(f) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}}\,\frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}_{n+1} f(\vartheta_0) f(\vartheta_1)\cdots f(\vartheta_n)\,\Delta_{n+1}(e^{i\vartheta_0}, e^{i\vartheta_1}, \cdots, e^{i\vartheta_n})$$
$$\times \Delta_{n+1}(e^{-i\vartheta_0}, e^{-i\vartheta_1}, \cdots, e^{-i\vartheta_n})\,d\vartheta_0\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_n.$$

Hier — wie auch im folgenden — bezeichnet Δ_n die Vandermondsche Determinante ihrer Argumente, d. h.

$$\Delta_n(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & \cdots & z_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ z_1^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{\mu<\nu}^{1,\cdots,n} (z_\nu - z_\mu).$$

Da

$$(e^{i\vartheta_\nu} - e^{i\vartheta_\mu})(e^{-i\vartheta_\nu} - e^{-i\vartheta_\mu}) = 2^2 \sin^2\frac{\vartheta_\mu - \vartheta_\nu}{2}$$

ist, so folgt

$$\text{(T*)}\quad D_n(f) = \frac{2^{n^2-1}}{(n+1)!}\,\frac{1}{\pi^{n+1}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}_{n+1} f(\vartheta_0) f(\vartheta_1)\cdots f(\vartheta_n)$$
$$\times \prod_{\mu<\nu}^{0,\cdots,n} \sin^2\frac{\vartheta_\mu - \vartheta_\nu}{2}\,d\vartheta_0\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_n.$$

Aus dieser Formel kann ich zunächst unschwer eine obere und untere Grenze für $D_n(f)$ gewinnen. Ist nämlich $f(x) = 1$, so folgt aus (T)

$$\frac{2^{n^2-1}}{(n+1)!}\,\frac{1}{\pi^{n+1}}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}\prod_{\mu<\nu}^{0,\ldots,n}\sin^2\frac{\vartheta_\mu-\vartheta_\nu}{2}\,d\vartheta_0\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_n = 1, \tag{2}$$

also, wenn m und M das Minimum bzw. Maximum von $f(x)$ bezeichnen,

$$m^{n+1} \leqq D_n(f) \leqq M^{n+1}. \tag{3}$$

Es sei ferner $g(x)$ eine ebensolche Funktion wie $f(x)$ und ihr Minimum und Maximum sei μ bzw. M. Dann folgt unmittelbar aus der Formel (T*), daß

$$\mu^{n+1} D_n(f) \leqq D_n(fg) \leqq \mathsf{M}^{n+1} D_n(f). \tag{4}$$

3. Der Beweis der Existenz von

$$\lim_{n=\infty}\frac{D_{n+1}(f)}{D_n(f)} = \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{D_n(f)} = D(f)$$

läßt sich so ausführen. Es sei

$$A = |a_{\sigma,\tau}| \qquad (\sigma,\tau = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

eine beliebige Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Minoren ich mit $A_{\sigma\tau}$ bezeichnen will. Dann ist bekanntlich

$$\begin{vmatrix} A_{rr} & A_{rs} \\ A_{sr} & A_{ss} \end{vmatrix} = A \cdot A_{\left\{ {rr \atop ss} \right\}},$$
$$(r, s = 0, 1, 2, \cdots, n;\ r \neq s),$$

wo $A_{\left\{ {rr \atop ss} \right\}}$ die Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bezeichnet, welche aus A, durch Streichen der r und s^{ten} Zeilen bzw. r und s^{ten} Spalten, hervorgeht. Wenn also A eine Hermitesche Determinante ist, d. h. $a_{\sigma,\tau} = \bar{a}_{\tau,\sigma}$, dann ist bekanntlich auch $A_{\sigma,\tau} = \bar{A}_{\tau,\sigma}$, so daß

$$A_{rr} \cdot A_{ss} - A \cdot A_{\left\{ {rr \atop ss} \right\}} = |A_{rs}|^2 \geqq 0.$$

Ich wende dieses Resultat auf $D_n(f)$ an, indem ich $r = 0$, $s = n$ setze. Dann wird

$$A_{rr} = A_{00} = D_{n-1}(f),$$
$$A_{ss} = A_{nn} = D_{n-1}(f),$$
$$A_{\left\{ {rr \atop ss} \right\}} = A_{\left\{ {00 \atop nn} \right\}} = D_{n-2}(f),$$

also

$$[D_{n-1}(f)]^2 - D_n(f) \cdot D_{n-2}(f) \geqq 0 \tag{5}$$

und daraus folgt, da, wie es aus (T^*) ersichtlich ist, die Determinanten $D_n(f)$ sämtlich positiv ausfallen,

(6) $$\frac{D_{n-1}(f)}{D_{n-2}(f)} \geqq \frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)} > 0.$$

Die positiven Zahlen $\frac{D_n(f)}{D_{n-1}(f)}$ bilden also eine monoton abnehmende Folge, so daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{D_{n+1}(f)}{D_n(f)}, \text{ also auch } \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{D_n(f)}$$

existiert und einen gemeinsamen (nicht negativen) Wert $D(f)$ hat, der nur von der Funktion $f(x)$ abhängt und dessen Auswertung unser weiteres Ziel bildet.*)

Aus der Ungleichung (3) folgt unmittelbar, daß

(3^{bis}) $$m \leqq D(f) \leqq M,$$

daß also $D(f)$ einen gewissen Mittelwert bedeutet. Ferner folgt aus (4)

(4^{bis}) $$\mu D(f) \leqq D(fg) \leqq \mathsf{M} D(f).$$

4. Es sei jetzt

(7) $$f(x) \sim a_0 + 2\sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \sin rx)$$

und

(8) $$\varphi(x) = \alpha_0 + 2\sum_{r=1}^{k} (\alpha_r \cos rx + \beta_r \sin rx).$$

Ferner sei

(9) $$f(x)\,\varphi(x) \sim A_0 + 2\sum_{r=1}^{\infty} (A_r \cos rx + B_r \sin rx).$$

---

*) Ich bemerke hier, daß nicht nur der Quotient $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ monoton zu seinem Grenzwerte strebt, sondern auch $\sqrt[n]{D_n}$, und zwar gleichfalls abnehmend. Es ist nämlich, wenn $m > 1$, $\log D_n$ positiv und

$$\log D_n - \log D_{n-1} \geqq \log D_{n+1} - \log D_n,$$
$$2 \log D_n \geqq \log D_{n-1} + \log D_{n+1}.$$

Ich setze $b_n = \frac{\log D_n}{n}$, so ist

$$2n b_n \geqq (n-1) b_{n-1} + (n+1) b_{n+1},$$
$$(n+1)(b_n - b_{n+1}) \geqq (n-1)(b_{n-1} - b_n).$$

Wenn also $b_{n-1} \geqq b_n$, so ist auch $b_n \geqq b_{n+1}$. Man hat aber $b_1 \geqq b_2$, da $D_1^2 \geqq D_2$, also für jedes n: $b_n \geqq b_{n+1}$ und so $\sqrt[n]{D_n} \geqq \sqrt[n+1]{D_{n+1}}$. Es ist ferner $D_n^{n+1} \geqq D_{n+1}^n$, so daß $D_n \geqq \left(\frac{D_{n+1}}{D_n}\right)^n$, also $\sqrt[n]{D_n} \geqq \frac{D_{n+1}}{D_n}$.

Ich führe die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} = z,$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} a_r \pm i b_r &= c_{\pm r}, \\ \alpha_r \pm i \beta_r &= \gamma_{\pm r}, \\ A_r \pm i B_r &= C_{\pm r}. \end{aligned}$$

$$(r = 0, 1, 2, \cdots; \; b_0 = \beta_0 = B_0 = 0).$$

Dann ist

$$(7^{\text{bis}}) \qquad f(x) \sim c_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (c_r z^{-r} + c_{-r} z^r) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{c_r}{z^r}.$$

Ähnlich

$$(8^{\text{bis}}) \qquad \varphi(x) = \sum_{r=-k}^{k} \frac{\gamma_r}{z^r}$$

und

$$(9^{\text{bis}}) \qquad f(x)\,\varphi(x) \sim \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{C_r}{z^r}.$$

In der formellen Produktreihe von (7^{bis}) und (8^{bis})

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{\mu=-k}^{k} \gamma_\mu c_{r-\mu}}{z^r}$$

und in der Reihe (9^{bis}) haben nach einem bekannten Satz von Hurwitz die entsprechenden Glieder gleiche Koeffizienten, d. h.

$$(11) \qquad C_r = \sum_{\mu=-k}^{k} \gamma_\mu c_{r-\mu}$$

$$(r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

5. Mit Hilfe der Bezeichnungen (10) kann $D_n(f)$ in der Form

$$(12) \qquad D_n(f) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Es sei jetzt $n + 1 > 2k$. Ich bilde das Produkt $D_n(f) \cdot D_{n-2k}(\varphi)$. Zu diesem Zwecke lasse ich die Determinante $D_n(f)$ in ihrer ursprünglichen Form (12), forme aber die Determinante $D_{n-2k}(\varphi)$ von $(n - 2k + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung in eine Determinante $(n + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung um

durch Hinzufügung von $2k$ Zeilen bzw. Spalten mit geeigneten Elementen. Und zwar wenn

$$D_n(f) = |e_{\sigma,\tau}| \qquad (\sigma,\tau = 0,1,2,\cdots,n),$$

$$D_{n-2k}(\varphi) = |f_{\sigma,\tau}| \qquad (\sigma,\tau = 0,1,2,\cdots,n),$$

so ist

$$e_{\sigma,\tau} = c_{\tau-\sigma},$$

$$(13) \qquad f_{\sigma,\tau} = \begin{cases} \left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\} \text{ für } 0 \leqq \tau \leqq k-1 \text{ und } n-k+1 \leqq \tau \leqq n, & \begin{matrix}\text{wenn } \sigma = \tau\\ \text{wenn } \sigma \neq \tau;\end{matrix} \\ \gamma_{\tau-\sigma} \text{ für } k \leqq \tau \leqq n-k. \end{cases}$$

Ich multipliziere nun diese zwei Determinanten, indem ich Zeilen mit Spalten komponiere. Es sei die Produktdeterminante

$$|g_{\sigma,\tau}| \qquad (\sigma,\tau = 0,1,2,\cdots,n),$$

wo

$$g_{\sigma,\tau} = \sum_{\nu=0}^{n} e_{\sigma,\nu} f_{\nu,\tau}.$$

Ist

a) $0 \leqq \tau \leqq k-1$, so ist

$$g_{\sigma,\tau} = e_{\sigma,\tau} f_{\tau\tau} = e_{\sigma,\tau} = c_{\tau-\sigma}.$$

b) $n-k+1 \leqq \tau \leqq n$, so ist wieder

$$g_{\sigma,\tau} = c_{\tau-\sigma}.$$

c) Ist endlich $k \leqq \tau \leqq n-k$, so wird

$$g_{\sigma,\tau} = \sum_{\nu=0}^{n} e_{\sigma,\nu} f_{\nu,\tau} = \sum_{\nu=0}^{n} c_{\nu-\sigma} \gamma_{\tau-\nu},$$

oder, da $\gamma_m = 0$, wenn $|m| > k$,

$$g_{\sigma,\tau} = \sum_{\nu=\tau-k}^{\nu=\tau+k} c_{\nu-\sigma} \gamma_{\tau-\nu} = \sum_{\mu=-k}^{k} c_{\tau-\sigma-\mu} \gamma_\mu,$$

also nach (11)

$$g_{\sigma,\tau} = C_{\tau-\sigma}.$$

Auf Grund der Vorhergehenden hat man also

$$(14) \qquad D_n(f) D_{n-2k}(\varphi)$$

$$= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{k-1} & C_k & \cdots & C_{n-k} & c_{n-k+1} & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{k-2} & C_{k-1} & \cdots & C_{n-k-1} & c_{n-k} & \cdots & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{-n} & c_{-(n-1)} & \cdots & c_{-(n-k+1)} & C_{-(n-k)} & \cdots & C_{-k} & c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}.$$

6. Nun beweise ich mit Hilfe der Formel (14) den

Satz I. *Ist $\varphi(x)$ ein positives trigonometrisches Polynom k^{ter} Ordnung, so ist*

$$D(\varphi)\,D\left(\frac{1}{\varphi}\right)=1. \tag{15}$$

Setze ich nämlich in (14) $f(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$, so ist $f(x)\,\varphi(x)=1$, also $C_m=0$, wenn $m\neq 0$ und $C_0=1$. Also

$$D_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)D_{n-2k}(\varphi) \tag{16}$$

$$=\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
c_0 & \cdots & c_{k-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-k+1} & \cdots & c_n\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-2k+2} & \cdots & c_{n-k+1}\\
\hline
c_{-k} & \cdots & c_{-1} & 1 & 0\cdots & 0 & c_{n-2k+1} & \cdots & c_{n-k}\\
\cdot & \cdots & \cdot & 0 & 1\cdots & 0 & \cdot & \cdots & \cdot\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
c_{-(n-k)} & \cdots & c_{-(n-2k+1)} & 0 & 0\cdots & 1 & c_1 & \cdots & c_k\\
\hline
c_{-(n-k+1)} & \cdots & c_{-(n-2k+2)} & 0 & \cdots & 0 & c_0 & \cdots & c_{k-1}\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
c_{-n} & \cdots & c_{-(n-k+1)} & 0 & \cdots & 0 & c_{-(k-1)} & \cdots & c_0
\end{array}\right|,$$

oder auf Grund des Laplaceschen Entwicklungssatzes:

$$D_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)D_{n-2k}(\varphi)=\left|\begin{array}{cccccc}
c_0 & \cdots & c_{k-1} & c_{n-k+1} & \cdots & c_n\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
c_{-(k-1)} & \cdots & c_0 & c_{n-2k+2} & \cdots & c_{n-k+1}\\
c_{-(n-k+1)} & \cdots & c_{-(n-2k+2)} & c_0 & \cdots & c_{k-1}\\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\
c_{-n} & \cdots & c_{-(n-k+1)} & c_{-(k-1)} & \cdots & c_0
\end{array}\right|. \tag{16$^{\text{bis}}$}$$

Mit Hilfe des Riemannschen Lemma: $\lim\limits_{n=\infty} c_n=0$ ergibt sich aus (16^{bis}), daß*)

$$\lim_{n=\infty} D_n\left(\frac{1}{\varphi}\right)D_{n-2k}(\varphi)=\left|\begin{array}{ccc}
c_0 & \cdots & c_{k-1}\\
\cdot & \cdots & \cdot\\
c_{-(k-1)} & \cdots & c_0
\end{array}\right|^2=\left[D_{k-1}\left(\frac{1}{\varphi}\right)\right]^2>0 \tag{17}$$

und daraus folgt der Satz I.

7. Ich beweise jetzt den

Satz II. *Ist $\varphi(x)$ ein positives trigonometrisches Polynom k^{ter} Ordnung, so hat man*

$$D(\varphi)\geqq G(\varphi), \tag{18}$$

---

*) Dies ist eine Bemerkung von G. Pólya.

wo $G(\varphi)$ das geometrische Mittel von $\varphi(x)$ im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ bedeutet.

Ich bewies diesen Satz zuerst in einer ziemlich langwierigen Weise, jedoch rein *elementar*, mittels des Determinantensatzes (14). Ich erhielt nämlich daraus durch Anwendung der Landsbergschen Umformung folgendes Resultat

$$D(f)\, D(\varphi) \leq D(f\varphi).$$

Nun gebrauchte ich einen leicht beweisbaren Hilfssatz, nach welchem jedes positive trigonometrische Polynom $\varphi(x)$ sich als Produkt positiver trigonometrischer Polynome erster Ordnung darstellen läßt. Es wird also

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\, \varphi_2(x) \cdots \varphi_k(x),$$

wo $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$ positive trigonometrische Polynome erster Ordnung bezeichnen. Also bekomme ich, durch sukzessive Anwendung der vorigen Ungleichung

$$D(\varphi) \geqq D(\varphi_1)\, D(\varphi_2\, \varphi_3 \cdots \varphi_k) \geqq D(\varphi_1)\, D(\varphi_2)\, D(\varphi_3 \cdots \varphi_k) \geqq \cdots$$
$$\cdots \geqq D(\varphi_1)\, D(\varphi_2) \cdots D(\varphi_k).$$

Für trigonometrische Polynome erster Ordnung ist aber die Behauptung (1′) leicht zu verifizieren, so daß

$$D(\varphi) \geqq G(\varphi_1)\, G(\varphi_2) \cdots G(\varphi_k) = G(\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \varphi_k) = G(\varphi).$$

Ich werde hier eine wesentlich einfachere, von M. Fekete herrührende Methode zur Ableitung des Satz II gebrauchen, die sich jedoch auf ein Resultat von O. Toeplitz und einen Determinantensatz von E. Fischer stützt.

Es ist bekannt, daß die als Zyklanten bezeichneten Determinanten

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & d_{p-1} \\ d_{p-1} & d_0 & d_1 & \cdots & d_{p-2} \\ d_{p-2} & d_{p-1} & d_0 & \cdots & d_{p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & d_0 \end{vmatrix},$$

wo $d_0, d_1, \cdots, d_{p-1}$ beliebige Größen bedeuten, in dieser Form darstellbar sind

$$(19^{\text{bis}}) \qquad \prod_{h=1}^{p} \left(d_0 + d_1 \varepsilon_h + d_2 \varepsilon_h^2 + \cdots + d_{p-1} \varepsilon_h^{p-1}\right),$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ die p^{ten} Einheitswurzeln bezeichnen. Es sei

$$(8) \qquad \varphi(x) = \alpha_0 + 2 \sum_{r=1}^{k} (\alpha_r \cos rx + \beta_r \sin rx)$$

ein positives trigonometrisches Polynom k^{ter} Ordnung; ich bilde mit Herrn Toeplitz die Zyklante $(2n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $(n \geq k)$

$$
(20) \quad Z_n(\varphi) = \begin{vmatrix}
\gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n & \gamma_{-n} & \cdots & \gamma_{-2} & \gamma_{-1} \\
\gamma_{-1} & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n & \cdots & \gamma_{-3} & \gamma_{-2} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\gamma_{-(n-1)} & \gamma_{-(n-2)} & \cdots & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n & \gamma_{-n} \\
\gamma_{-n} & \gamma_{-(n-1)} & \cdots & \gamma_{-1} & \boxed{\gamma_0} & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\
\gamma_n & \gamma_{-n} & \cdots & \gamma_{-2} & \gamma_{-1} & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{-n} & \gamma_{-(n-1)} & \gamma_{-(n-2)} & \cdots & \gamma_0 & \gamma_1 \\
\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n & \gamma_{-n} & \gamma_{-(n-1)} & \cdots & \gamma_{-1} & \gamma_0
\end{vmatrix},
$$

wo die γ_m die Bedeutung (10) haben. Man hat dann nach (19^{bis})

$$
Z_n(\varphi) = \prod_{h=1}^{2n+1} \varphi^*\left(e^{ih\frac{2\pi}{2n+1}}\right),
$$

wenn

$$
\varphi^*(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n + \gamma_{-n} z^{n+1} + \gamma_{-n+1} z^{n+2} + \cdots + \gamma_{-1} z^{2n}.
$$

Es ist aber, wenn z eine $(2n+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel bezeichnet,

$$
z^{n+r} = z^{2n+1+r-n-1} = \frac{1}{z^{n-r+1}},
$$

$$
(r = 1, 2, \cdots, n),
$$

so daß für solche Werte von z

$$
\begin{aligned}
\varphi^*(z) &= \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_n z^n + \frac{\gamma_{-n}}{z^n} + \frac{\gamma_{-n+1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{\gamma_{-1}}{z} \\
&= \sum_{r=-k}^{k} \frac{\gamma_r}{z^r}
\end{aligned}
$$

und dies ist gleich $\varphi(-x)$ (Ungl. (8^{bis})), wenn x das Argument von z bedeutet. Es ist also

$$
(20^{\text{bis}}) \quad Z_n(\varphi) = \prod_{h=1}^{2n+1} \varphi\left(-h \cdot \frac{2\pi}{2n+1}\right),
$$

so daß

$$
(21) \quad \lim_{n=\infty} \sqrt[2n+1]{Z_n(\varphi)} = \lim_{n=\infty} e^{\frac{1}{2n+1}\sum_{h=1}^{2n+1} \log \varphi\left(-h \cdot \frac{2\pi}{2n+1}\right)} = G(\varphi).
$$

Ich wende jetzt auf die Zyklante $Z_n(\varphi)$ einen Determinantensatz von E. Fischer*) an, welcher folgendermaßen lautet:

Hilfssatz. *Ist*

$$\sum \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{pp} = |b_{\sigma,\tau}| \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots, p)$$

eine Hermitesche Determinante $(b_{\sigma,\tau} = \bar{b}_{\tau,\sigma})$ *und die Hermitesche Form*

$$\sum_{\sigma,\tau=1}^{p} b_{\sigma,\tau} x_\sigma \bar{x}_\tau$$

definit positiv, so bestehen die Ungleichungen

$$\sum \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{pp} \leqq \left(\sum \pm b_{11} b_{22} \cdots b_{\varrho\varrho}\right) \left(\sum \pm b_{\varrho+1,\varrho+1} \cdots b_{pp}\right)$$
$$(\varrho = 1, 2, \cdots, p-1).$$

In unserm Falle sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $Z_n(\varphi - \lambda) = 0$ die äquidistanten Ordinaten von $\varphi(x)$, so daß jene sämtlich positiv ausfallen und daraus folgt bekanntlich**), daß die entsprechende Hermitesche Form definit positiv wird. Der Hilfssatz ist also anwendbar. Man hat $p = 2n + 1$, wählen wir ferner $\varrho = n + 1$, dann wird

$$Z_n(\varphi) \leqq D_n(\varphi) \cdot D_{n-1}(\varphi)$$

also

$$\sqrt[2n+1]{Z_n(\varphi)} \leqq \sqrt[2n+1]{D_n(\varphi) \cdot D_{n-1}(\varphi)} = \left(\sqrt{D_n^{\frac{1}{n}} D_{n-1}^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{2n}{2n+1}}$$

und daraus folgt, daß

$$G(\varphi) \leqq D(\varphi).$$

8. Ich beweise jetzt den

Satz II*. *Ist $f(x)$ eine stetige, nach 2π periodische, positive Funktion, so ist*

$$D(f) \geqq G(f). \tag{18bis}$$

Es sei ε eine beliebige positive Zahl, dann läßt sich nach dem bekannten Satz von Weierstraß ein trigonometrisches Polynom k^{ter} Ordnung $\varphi(x)$ finden, so daß gleichmäßig

$$1 - \varepsilon \leqq \frac{f(x)}{\varphi(x)} \leqq 1 + \varepsilon.$$

Ich setze nun in den Ungleichungen (4^{bis}) $\varphi(x)$ und $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ statt $f(x)$ und $g(x)$, so wird

$$(1-\varepsilon) D(\varphi) \leqq D(f) \leqq (1+\varepsilon) D(\varphi),$$

*) Archiv der Math. und Physik 13 (1908), S. 36, Satz III.

**) S. z. B. G. Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie* (Leipzig, Veit & Comp.) (1909), S. 283, § 118.

also

$$D(f) \geqq (1-\varepsilon) D(\varphi) \geqq (1-\varepsilon) G(\varphi).$$

Ferner

$$G(\varphi) = G(f)\, G\left(\frac{\varphi}{f}\right) \geqq G(f) \operatorname{Min.}\left(\frac{\varphi}{f}\right) \geqq \frac{G(f)}{1+\varepsilon},$$

so daß

$$D(f) \geqq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\, G(f).$$

Daraus folgt, da ε beliebig klein ist

$$D(f) \geqq G(f).$$

Ich setze jetzt $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$. Dann wird

$$D\left(\frac{1}{\varphi}\right) \geqq G\left(\frac{1}{\varphi}\right).$$

Es ist aber nach Satz I

$$D\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{D(\varphi)},$$

ferner

$$G\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{G(\varphi)},$$

also

$$\frac{1}{D(\varphi)} \geqq \frac{1}{G(\varphi)}$$

und so

$$D(\varphi) \leqq G(\varphi).$$

Daraus und aus (18) folgt, daß

$$D(\varphi) = G(\varphi). \tag{22}$$

Damit ist die Behauptung (1') für positive trigonometrische Polynome beliebiger Ordnung bewiesen.*)

9. Es sei endlich $f(x)$ eine stetige, nach 2π periodische, positive Funktion und ε eine beliebig kleine positive Zahl. Nach den vorigen läßt sich ein trigonometrisches Polynom $\varphi(x)$ finden, so daß

$$(1-\varepsilon) D(\varphi) \leqq D(f) \leqq (1+\varepsilon) D(\varphi),$$

---

*) Ich erwähne hier, daß Herr M. Fekete auch einen direkten Beweis von (22) gefunden hat, der sich auf die folgenden Tatsachen stützt:

1. Es sei $a_{rs} = \bar{a}_{sr}$, $\varepsilon_{rs} = 1$ oder 0, je nachdem $r = s$ oder $r \neq s$, und

$$S_\nu(x) = |a_{rs} - \varepsilon_{rs} x| \qquad (r, s = 1, \cdots, \nu)$$
$$(\nu = 1, 2, \cdots).$$

Dann werden die Wurzeln der säkularen Gleichung $S_{\nu+1}(x) = 0$ durch die von $S_\nu(x) = 0$ getrennt.

2. Für das trigonometrische Polynom $\varphi(x)$ von der Ordnung k stimmen die Abschnittsdeterminanten der Zyklante $Z_n(\varphi)$, abgesehen von den k letzten, mit

$$D_0(\varphi),\ D_1(\varphi),\ D_2(\varphi), \cdots$$

überein.

also nach (22)

$$(1-\varepsilon)\,G(\varphi) \leqq D(f) \leqq (1+\varepsilon)\,G(\varphi),$$

$$(1-\varepsilon)\,G\left(\frac{\varphi}{f}\right) G(f) \leqq D(f) \leqq (1+\varepsilon)\,G\left(\frac{\varphi}{f}\right) G(f),$$

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\,G(f) \leqq D(f) \leqq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\,G(f).$$

Es ist aber ε beliebig klein, so daß

$$D(f) = G(f), \tag{23}$$

womit unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen ist.*)

*) Während der Korrektur dieser Arbeit hat mir Herr G. Pólya mitgeteilt, daß der Satz sogar für beliebige, im Riemannschen Sinne integrierbare positive Funktionen in Gültigkeit bleibt.

Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts.

Von

Wilhelm Blaschke in Leipzig.

Als spezielles isoperimetrisches Problem in der Ebene bezeichnet man die Aufgabe, unter allen geschlossenen ebenen Kurven gegebenen Umfangs die zu finden, die ein möglichst großes Flächenstück umgrenzt. Die Lösung ist, wie schon die alten griechischen Geometer behauptet haben, die Kreislinie. Für diese isoperimetrische Eigenschaft des Kreises hat unter der Voraussetzung der Existenz einer Lösung des Problems J. Steiner mehrere Beweise gegeben.*) Bei einer dieser besonders schönen Untersuchungen geht Steiner von der elementaren Eigenschaft des Sehnenvierecks aus, unter allen Vierecken mit vorgeschriebenen Seitenlängen den größten Flächeninhalt zu besitzen. Dieser Beweis läßt sich so anordnen, daß die bei Steiner noch unerledigte Existenzfrage gleichzeitig mitgelöst wird.

Von dieser geistvollen Methode Steiners will ich nun hier zeigen, daß sie auch dazu ausreicht, ein verwickelteres Variationsproblem, dessen Kenntnis ich einer mündlichen Mitteilung des Herrn P. Funk verdanke, völlig zu erledigen.

Nachdem sich schon 1778 Euler mit verwandten Dingen beschäftigt hatte, sind in neuerer Zeit von verschiedenen Mathematikern, besonders von Hurwitz und Minkowski, konvexe Punktmengen in der Ebene betrachtet worden, die in jeder Richtung dieselbe Breite haben, das heißt, bei denen parallele Stützlinien einen von ihrer Richtung unabhängigen Abstand haben.**) Die Kreisfläche ist ein triviales Beispiel für diese „Be-

*) Über Maximum und Minimum usw., Gesammelte Werke 2, S. 177—308. Man vgl. dazu meinen Vortrag: Kreis und Kugel, Jahresbericht d. D. Math.-Ver. (1915), Bd. 24, S. 195ff.

**) Die ältere Literatur über diesen Gegenstand findet man angegeben bei Ch. Jordan und R. Fiedler, Courbes orbiformes, im Archiv f. Math. (3) 21, S. 226—235. Dasselbe ausführlicher in: Courbes convexes . . ., Paris 1912, von denselben Verfassern. — A. Hurwitz, Sur quelques applications géométriques des series de Fourier, Annales de l'école normale supérieure, (3) 19 (1902), S. 357—408. H. Minkowski, Über die Körper konstanter Breite, Gesammelte Abhandlungen II, S. 277—279. — Eine neue Definition

reiche konstanter Breite"; ein zweites Beispiel ist von F. Reuleaux zu kinematischen Zwecken benutzt worden: Ein Kreisbogendreieck, dessen Ecken und Bogenmittelpunkte in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks zusammenfallen (Fig. 1).

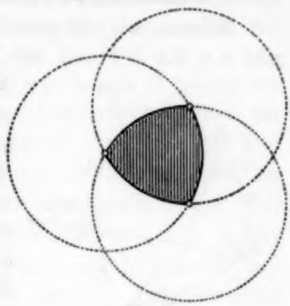


Fig. 1.

Alle diese Bereiche von vorgegebener konstanter Breite haben — das wohl hat zuerst E. Barbier*) bemerkt — denselben Umfang. Nach dem isoperimetrischen Satze hat also die Kreisfläche den *größten* Inhalt. Hier soll hingegen mit Hilfe der Methode Steiners gezeigt werden, daß das Kreisbogendreieck von Reuleaux unter diesen Bereichen den *kleinsten* Flächeninhalt besitzt. Dabei will ich mich, da es sich um recht elementare Überlegungen handeln wird, darauf beschränken, den Gedankengang des Beweises darzulegen ohne alle Schritte im einzelnen durchzuführen.

Ich erbringe den angekündigten Beweis zuerst für spezielle Bereiche konstanter Breite, nämlich für gewisse Kreisbogenpolygone. Das gelingt ohne jeden Grenzübergang durch endlichoftmalige Anwendung desselben elementaren Prozesses. Die Übertragung dieses Ergebnisses auf beliebige Bereiche konstanter Breite erfolgt dann durch Annäherung der allgemeinen Bereiche durch die früher untersuchten speziellen.

Die hier mitgeteilte Beweismethode läßt sich ohne weiteres zur Lösung des analogen Problems der sphärischen Geometrie verwenden.

Die Behandlung des Minimumproblems von Funk mit den gewöhnlichen Methoden der Variationsrechnung dürfte mit einigen Schwierigkeiten verbunden sein, da die Grenzlinien der zulässigen Bereiche einer linearen Differentialungleichung zweiter Ordnung (Krümmungsbeschränkung) unterworfen sind und da die Lösung Knickpunkte hat.**)

---

der Punktmengen konstanter Breite bei E. Meißner, Punktmengen konstanter Breite, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich 1911.

*) Sur le problème de l'aiguille ..., J. de math. (2) 5 (1860), S. 273—288, bes. S. 283, 284.

**) Ich will hier nebenbei darauf hinweisen, wie sich unsere Minimumaufgabe symmetrisch in Formeln fassen läßt: Eine Funktion $\omega(\varphi)$, die den Bedingungen

$$|\omega(\varphi)| \leq r$$

und

$$\int_0^\pi \omega(\varphi) \cos\varphi \, d\varphi = 0, \quad \int_0^\pi \omega(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = 0$$

genügt, ist so zu bestimmen, daß

§ 1.
Kreisbogenpolygone konstanter Breite nach Reuleaux.

Nehmen wir ein geschlossenes Polygon D mit der ungeraden Seitenzahl $n = 2m + 1$ und mit lauter gleichen Seiten von der Länge d. Die Ecken sollen p_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$ und die zunächst nur bis auf Vielfache von 2π erklärten „Außenwinkel" von D sollen α_k heißen. α_k bedeutet also den Winkel zwischen der von p_{k-1} nach p_k und der von p_k nach p_{k+1} gerichteten Polygonseite (Fig. 2), wobei der Stellenzeiger k mod. n zu nehmen ist. Für die α_k mögen die Beziehungen gelten

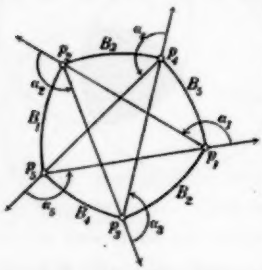


Fig. 2.

(1) $$0 < \alpha_k < \pi,$$

(2) $$\sum \alpha_k = (n-1)\pi.$$

Um p_k als Mittelpunkt schlagen wir im positiven Umlaufsinn einen Kreisbogen B_k vom Halbmesser d, und zwar soll B_k in p_{k+1} beginnen und in p_{k-1} endigen, also dem positiven Zentriwinkel $\pi - \alpha_k$ entsprechen. Diese gerichteten Bogen B_k schließen sich, da n ungerade vorausgesetzt ist, zu einer einzigen gerichteten Kurve R zusammen, von der sich zeigen läßt, daß sie den positiv umfahrenen Rand eines konvexen Bereichs bildet. Da nämlich der Außenwinkel $\pi - \alpha_{k-1}$ zweier aneinanderstoßender Kreisbogen B_k und B_{k-2} nach (1) zwischen 0 und π liegt, brauchen wir zum Beweise, daß R konvex ist, nur mehr einzusehen, daß die Gesamtkrümmung von R gleich 2π ist. Diese Gesamtkrümmung setzt sich zusammen aus der Krümmung an den Ecken, das ist

$$\sum (\pi - \alpha_k)$$

und der längs der Seiten, die genau ebensoviel beträgt. Insgesamt ergibt sich also nach (2) in der Tat 2π.

Dem allereinfachsten Fall $n = 3$ entspricht das eingangs erwähnte

---

$$\int_0^\pi \int_0^\pi K(\varphi, \psi)\, \omega(\varphi)\, \omega(\psi)\, d\varphi\, d\psi$$

ein Minimum wird, worin

$$K(\varphi, \psi) = \begin{cases} \cos\varphi \sin\psi & \text{für } \varphi \leq \psi, \\ \sin\varphi \cos\psi & \text{,, } \varphi \geq \psi. \end{cases}$$

Dabei bedeutet $\omega(\varphi) + r$ den Krümmungshalbmesser der gesuchten Kurve von der konstanten Breite $2r$ ausgedrückt, als Funktion des Winkels φ der Tangente mit einer festen Richtung. Die Lösung ist

$$\omega(\varphi) = (-1)^k r \quad \text{für} \quad k\frac{\pi}{3} < \varphi - \varphi_0 < (k+1)\frac{\pi}{3}.$$

Kreisbogendreieck (Fig. 1); der nächsthöhere Fall $n = 5$ wird durch die beigegebene Figur 2 veranschaulicht. Jede in dieser Art konstruierte Kurve R hat konstante Breite, nämlich ihre Breite ist gleich der Länge d der Seiten des *„Diagonalecks"* D von R. Da zuerst F. Reuleaux derartige Kreisbogenpolygone R von konstanter Breite betrachtet hat, wollen wir sie *Reuleauxpolygone* nennen.

Zwischen den Flächeninhalten F_R und F_D von R und D besteht ein einfacher Zusammenhang. Nehmen wir, um ein bestimmtes Beispiel vor Augen zu haben, wie in der Figur 2 die Eckenzahl $n = 5$! Wir wollen ferner folgende Schreibweise einführen: $\widehat{25}\,\overline{12}$ soll den Flächeninhalt des positiv umfahrenen Dreiecks bedeuten, das von dem Kreisbogen B_1 und den geradlinigen Strecken $\overline{p_5 p_1}$ und $\overline{p_1 p_2}$ umschlossen wird. Wir wählen ferner beliebig einen festen Punkt o und bezeichnen mit $\widehat{25}$ den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten B_1 und $\overline{p_5 o}$ und $\overline{o p_2}$. Ähnlich möge $\overline{512}$ den Flächeninhalt des geradlinigen Vierecks mit den Seiten $\overline{p_5 p_1}$, $\overline{p_1 p_2}$, $\overline{p_2 o}$, $\overline{o p_5}$ bedeuten.

Dann bestehen die Gleichungen

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\widehat{25}\,\overline{12} &= \widehat{25} + \overline{512},\\
\widehat{53}\,\overline{45} &= \widehat{53} + \overline{345},\\
\widehat{31}\,\overline{23} &= \widehat{31} + \overline{123},\\
\widehat{14}\,\overline{51} &= \widehat{14} + \overline{451},\\
\widehat{42}\,\overline{34} &= \widehat{42} + \overline{234}.
\end{aligned}
$$

Summieren wir die untereinander stehenden Glieder! Links erhält man die Summe der Dreiecke

$$\sum \frac{1}{2}(\pi - \alpha_k)\, d^2$$

oder wegen (2)

$$\frac{\pi}{2} d^2.$$

Links erhält man zuerst den Inhalt F_R des Reuleauxpolygons R und an zweiter Stelle — man summiere von unten an! — den doppelten Inhalt $2F_D$ des Diagonalecks D. Wir haben also gefunden

$$(4)\qquad \frac{\pi}{2} d^2 = F_R + 2F_D.$$

Diese Formel, wie auch der angegebene Beweis gilt für beliebiges n $(= 3, 5, 7, \cdots)$.

Nebenbei bemerkt ist der Umfang von B gleich

$$\sum (\pi - \alpha_k)\, d,$$

also nach (2) gleich πd, dem Umfang des Kreises vom Durchmesser d.

§ 2.
Der Beweis für Reuleauxpolygone.

Nehmen wir beispielsweise an, unser Reuleauxpolygon R habe sieben Ecken ($n = 7$). Wir wollen das Polygon R abändern und dabei von den sieben Ecken die fünf festhalten, die in der Figur 3 doppelt geringelt sind, nämlich p_1, p_6, p_4, p_7, p_5. Dann müssen wir, wenn R ein Reuleauxsiebeneck bleiben soll, auch die Kreise in Ruhe lassen, auf denen die diesen Ecken gegenüberliegenden Polygonseiten B_1, B_6, B_4, B_7, B_5 liegen. Es bleiben also nur die Ecken p_2, p_3 und die ihnen gegenüberliegenden Bogen B_2, B_3 beweglich.

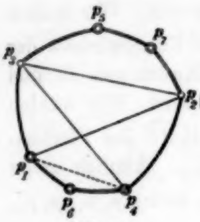


Fig. 3.

Die Fläche des Diagonalecks D von R ist gleich der Summe der Inhalte des geradlinigen Vierecks mit den Ecken p_1, p_2, p_3, p_4 und des geradlinigen Fünfecks mit den Ecken p_4, p_5, p_6, p_7, p_1, was wir in den zuvor eingeführten Zeichen so ausdrücken können

$$(5) \qquad \overline{12345671} = \overline{12341} + \overline{145671}.$$

Bei der besprochenen Abänderung von R bleibt das Fünfeck in Ruhe sein Flächeninhalt also unverändert. Vergrößert sich bei der Änderung die Vierecksfläche, so wächst nach (5) auch die Fläche des Diagonalecks D und nach (4) vermindert sich dabei der Inhalt des zugehörigen Reuleauxpolygons R.

Diese Vergrößerung der Vierecksfläche können wir etwa so bewerkstelligen. Die Außenwinkel von R bei p_1 und p_4 sind $\pi - \alpha_1$ und $\pi - \alpha_4$. Es sei etwa $\pi - \alpha_1 \leq \pi - \alpha_4$. Dann bewegen wir (vgl. die Figur) den Eckpunkt p_3 auf der Verlängerung des Bogens B_4, bis er in die rückwärtige Fortsetzung des Kreisbogens B_7 zu liegen kommt, nach p_3'. Dadurch ist dann die neue Lage $p_1' p_2' p_3' p_4'$ des „Gelenkvierecks" $p_1 p_2 p_3 p_4$ schon bestimmt, es ist nämlich $p_1' = p_1$, $p_4' = p_4$ und $p_2' = p_7$. Daß dabei die Vierecksfläche wirklich vergrößert wird, ist natürlich leicht zu zeigen: wir kommen darauf im nächsten Abschnitt zurück.

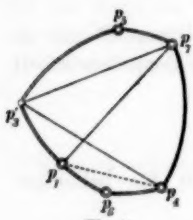


Fig. 4.

Das neue Reuleauxpolygon R' mit den „Ecken" $p_1, p_6, p_4, p_3', p_7, p_5, p_2'$ hat also die gleiche Breite d und kleineren Flächeninhalt als das alte Polygon R. Da aber die Eckpunkte p_2' und p_7 zusammenfallen und entsprechend die gegenüberliegenden Seiten B_2' und B_7

auf demselben Kreise liegen, so hat R' tatsächlich nur $n-2=5$ Ecken p_3', p_6, p_4, p_7, p_5.

Durch diesen einfachen Prozeß, der einem Verfahren von Steiner nachgebildet ist, gelingt es, jedes Reuleauxpolygon mit $2m+1$ ($m=2,3,4,\cdots$) Ecken in ein gleich breites Reuleauxpolygon mit $2m-1$ Ecken zu verwandeln, das kleineren Flächeninhalt hat. Wiederholt man diesen Schritt im ganzen $m-1$ mal, so erhält man schließlich ein Reuleauxdreieck von der Breite d, das ist ein Kreisbogendreieck, dessen Ecken und Bogenmittelpunkte in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks von der Seitenlänge d zusammenfallen (Fig. 1).

Wir haben damit bewiesen: *Sind F_n und F_3 die Flächen eines Reuleaux-n-ecks und eines Reuleauxdreiecks von derselben Breite, so ist für*

$$3 < n \quad \textit{auch} \quad F_3 < F_n.$$

§ 3.

Die Vierecksfläche.

Zu dem im vorigen Abschnitt gegebenem Beweis ist eine Bemerkung über den Flächeninhalt eines Vierecks $p_1p_2p_3p_4$ nachzutragen, das bei unveränderten Seitenlängen deformiert wurde und das wir deshalb als *Gelenkviereck* bezeichnet haben. Drei Seiten $\overline{p_1p_2}=\overline{p_2p_3}=\overline{p_3p_4}=d$ des Vierecks sind einander gleich und die vierte $\overline{p_4p_1}=a<d$ ist kleiner. Es gehört dieses Gelenkviereck zu denen, die die Kinematiker als „durchschlagend" bezeichnen, da eine Bewegung des Vierecks möglich ist, bei der die durch die festgehaltenen Punkte p_1 und p_4 gehenden beweglichen Seiten volle Umläufe um 2π machen.

Bedeuten α und β die Außenwinkel des Vierecks bei p_1 und p_3, so unterscheidet sich die (nach unseren Voraussetzungen über den Umlaufsinn von D stets *positive*) Vierecksfläche

$$\overline{4\,1\,2\,3\,4} = \overline{4\,1\,2\,4} + \overline{4\,2\,3\,4}$$

nur um den konstanten Faktor $d:2$ von der Funktion

$$\varphi = a \sin\alpha + d \sin\beta.$$

Wendet man andererseits auf die Dreiecke $p_4p_1p_2$ und $p_4p_2p_3$ den Kosinussatz an, so findet man, daß bei der Bewegung der Ausdruck

$$\psi = a\cos\alpha - d\cos\beta$$

sich nicht ändert. Für ein relatives Extrem von φ unter der Nebenbedingung $\psi=$ const. ist das Verschwinden der Funktionaldeterminante

$$\frac{d(\varphi,\psi)}{d(\alpha,\beta)} = ad\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

notwendig. $\sin(\alpha+\beta)=0$ bedeutet aber, daß unser Gelenkviereck einem

Kreise einbeschrieben ist, oder, was dasselbe besagt, daß es bezüglich des Mittellots von $\overline{p_1 p_4}$ symmetrisch liegt.

Da sich die Vierecksfläche bei der Bewegung stetig ändert, so erreicht sie bei einem Umlauf jedenfalls einen größten und einen kleinsten Wert. Der symmetrischen, nicht überschlagenen Lage (Fig. 5) entspricht nun

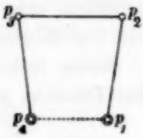


Fig. 5.

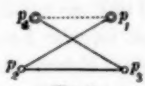


Fig. 6.

jedenfalls ein größerer Wert des Flächeninhalts als der symmetrischen aber überschlagenen (Fig. 6).

Wir finden also: *Bei einem Umlauf unseres Gelenkvierecks wird seine Fläche ein Extrem in den symmetrischen Lagen, und zwar ein Maximum in der gewöhnlichen und ein Minimum in der überschlagenen symmetrischen Lage. Zwischen diesen beiden Extremen ändert sich die Fläche monoton.*

Daraus ergibt sich, daß bei der zuvor betrachteten Abänderung $p_1 p_2 p_3 p_4 \rightarrow p_1 p_2' p_3' p_4$ die Vierecksfläche wirklich vergrößert wurde. Man kann aber dieses Ergebnis natürlich auch ohne Anwendung der Differentialrechnung auf elementarem Wege herleiten, etwa indem man von der bekannten Formel für das Quadrat des Flächeninhalts ausgeht,

$$F^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos \vartheta,$$

in der a, b, c, d die Vierecksseiten, s ihre halbe Summe und ϑ die halbe Summe zweier gegenüberliegender Außenwinkel bedeutet.*)

§ 4.

Übertragung auf beliebige Bereiche konstanter Breite.

Wir gehen jetzt daran, die Ergebnisse des § 2 zu verallgemeinern, und zwar dadurch, daß wir eine beliebige Kurve konstanter Breite durch Reuleauxpolygone annähern.**)

Es sei K eine beliebige Kurve von der konstanten Breite d und K_ε eine Parallelkurve außerhalb von K im Abstand ε. K_ε ist dann ebenfalls konvex und von der konstanten Breite $d + 2\varepsilon$. Wir wollen zeigen, daß man in dem ringförmigen Streifen zwischen K und K_ε ein Reuleauxpolygon einschreiben kann.

*) Für diese und für die analoge Formel der sphärischen Geometrie hat G. Hessenberg in der H. A. Schwarz-Festschrift (Berlin 1914), S. 76—83 elegante Beweise erbracht.

**) Als „Kurve konstanter Breite" wird die Begrenzung eines Bereichs konstanter Breite verstanden.

Schlägt man um einen beliebigen Punkt p von K_ε einen Kreis vom Halbmesser $d+\varepsilon$, so schneidet dieser den von K_ε umschlossenen konvexen Bereich in einem Kreisbogen B, dringt aber nicht ins Innere des von K umschlossenen konvexen Bereichs ein, so daß also B ganz in den Streifen zwischen K und K_ε fällt. Die Entfernung der Endpunkte des Bogens B ändert sich stetig, wenn p auf K_ε fortrückt und hat daher ein positives Minimum $\delta > 0$.

Greifen wir nun eine beliebige Lage p_1 des Punktes p auf K_ε heraus und bezeichnen wir den zugehörigen Kreisbogen mit B_1. Wir durchlaufen B im negativen Drehungsinn und bezeichnen den „Eintrittspunkt“ in K_ε mit p_0 und den „Austrittspunkt“ mit p_2 (vgl. die Fig. 7, in der der Streifen zwischen K und K_ε schraffiert ist). Um p_2 als Mittelpunkt schlagen wir wieder im negativen Drehungsinn und wieder mit dem Halbmesser $d+\varepsilon$ einen Kreisbogen B_2, der in p_1 beginnt und in einem Punkte p_3 von K_ε endigt. Ebenso führt ein um p_3 gezeichneter Kreisbogen B_3 von p_2 nach einem Punkte p_4 von K_ε usf. Die Punkte $p_1, p_3, p_5, \cdots$, die man durch diese Konstruktion erhält, folgen der Reihe nach aufeinander im negativen Umlaufsinn von K_ε und können sich nicht häufen, da die Entfernung zweier benachbarter Punkte immer $\geqq \delta$ bleibt. Man muß also nach endlich vielen Schritten zu einem Punkt p_{2m+1} kommen, der zwischen p_0 und p_2 hineinfällt. Der Schnittpunkt des zu p_{2m+1} hinführenden Bogens B_{2m} mit B_1 soll p^*_{2m+1} genannt werden. Ferner sei der Teilbogen von B_1, der p^*_{2m+1} mit p_2 verbindet, mit B_1^* bezeichnet, der Teilbogen von B_{2m} zwischen p_{2m-1} und p^*_{2m+1} mit B^*_{2m} und der Bogen um p^*_{2m+1} als Mittelpunkt zwischen p_{2m} und p_1 mit B^*_{2m+1}.

Fig. 7.

Die auf diese Art konstruierten Kurvenbogen $B_1^*, B_2, B_3, \cdots, B_{2m-1}, B^*_{2m}, B^*_{2m+1}$ schließen sich in der Tat zu einem Reuleauxpolygon R zusammen, das in dem Streifen zwischen K und K_ε liegt und die Breite $d+\varepsilon$ hat. Die Ecken von R liegen mit Ausnahme von p^*_{2m+1} auf K_ε und die Seiten von R „berühren“ mit Ausnahme von B^*_{2m+1} K von außen.

Der Flächeninhalt F_n von R liegt zwischen den Flächeninhalten der Parallelkurven K und K_ε, unterscheidet sich also für genügend kleines ε um beliebig wenig vom Flächeninhalt F von K. Es sei nun F_3' der Flächeninhalt des Reuleauxdreiecks von der Breite $d+\varepsilon$. Dann ist, wie in § 2 bewiesen wurde,

$$F_3' < F_n.$$

Daraus ergibt sich jetzt, wenn man ε eine nach Null konvergierende Zahlenfolge durchlaufen läßt,

$$F_3 \leqq F,$$

wenn F_3 den Flächeninhalt des Reuleauxdreiecks von der Breite d bezeichnet.

Damit ist unsere Behauptung allgemein bewiesen:

Zwischen dem Flächeninhalt F einer beliebigen konvexen Kurve konstanter Breite und dem Flächeninhalt F_3 des gleichbreiten Reuleauxdreiecks besteht die Beziehung

$$F_3 \leq F.$$

Wir bemerken nebenbei: Aus der am Schlusse des § 1 festgestellten entsprechenden Eigenschaft der Reuleauxpolygone ergibt sich jetzt, daß der Umfang eines beliebigen konvexen Bereichs konstanter Breite gleich dem Umfang der gleichbreiten Kreisscheibe ist (Barbier).

§ 5.

Eine Verschärfung.

Es liegt nahe, das gewonnene Ergebnis folgendermaßen zu vervollständigen:

Zwischen dem Flächeninhalt F eines beliebigen Bereichs konstanter Breite und dem Flächeninhalt F_3 des gleichbreiten Reuleauxdreiecks gilt, sobald die beiden Figuren nicht kongruent sind, stets die Ungleichung

$$F_3 < F.$$

Es soll hier kurz angedeutet werden, wie man dies mittels der zuvor verwendeten Methoden beweisen kann. Dazu lösen wir zuerst folgende Minimumaufgabe: *Gegeben seien zwei Strecken $\overline{pq}$ und $\overline{p'q'}$, beide von der Länge d. Man soll den Bereich von der konstanten Breite d auffinden, der die beiden Strecken enthält und möglichst kleinen Flächeninhalt hat.*

Liegen die beiden Strecken in einem Reuleauxdreieck von der Breite d, so wissen wir bereits die Lösung, wir können also diese „*spezielle Lage*" der Strecken ausschließen. Damit unsere Aufgabe überhaupt lösbar sei und damit die beiden Strecken allgemein liegen, müssen wir voraussetzen, daß die Entfernungen $\overline{pp'}, \overline{qq'}, \overline{pq'}, \overline{qp'} > 0$ und $< d$ seien. Alle Kreisscheiben vom Halbmesser d, die die vier Punkte p, p', q, q' enthalten, schneiden sich dann in einem konvexen Bereich, der von einem Kreisbogenviereck K begrenzt ist. In der biegegebenen Figur 8 ist dieser Bereich schraffiert. Es gibt vier Reuleauxfünfecke, die mit K je zwei aneinanderstoßende Kreisbogen gemein haben. Ihre Ecken sind in der Figur mit $pp'qbc$, $p'qq'cd$, $qq'pda$, $q'pp'ab$ bezeichnet.

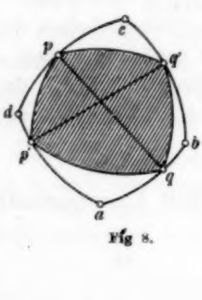


Fig. 8.

Jedes andere Reuleauxpolygon R mit der Breite d,

das die vier gegebenen Punkte und daher auch K enthält, kann mittels des in § 2 eingeführten Prozesses schrittweise so abgeändert werden, daß die neuen Lagen des Reuleauxpolygons unveränderte Breite haben und stets die vorgeschriebenen vier Punkte enthalten, daß der Flächeninhalt bei jedem Schritt verringert wird und daß die Endlage, die man nach endlichvielen Schritten erreicht, mit einem der angegebenen Reuleauxfünfecke zusammenfällt. Ist also F_n der Inhalt von R und F_5 der Inhalt des kleinsten der vier Fünfecke, so ist stets

$$F_5 < F_n.$$

Daraus ergibt sich weiter analog wie in § 4 die entsprechende Ungleichung

$$F_5 \leqq F$$

für die Fläche F eines beliebigen Bereichs von der Breite d, der die vorgeschriebenen vier Punkte enthält. Damit ist die neue Minimumaufgabe gelöst.

Man beweist nun leicht: *Eine Kurve von der konstanten Breite d mit der Eigenschaft, daß zwei beliebige in der Kurve enthaltene Strecken von der Länge d speziell liegen, ist notwendig ein Reuleauxdreieck.*

In jedem anderen konvexen Bereich der konstanten Breite d kann man also sicher zwei Strecken $\overline{pq}$ und $\overline{p'q'}$ ausfindig machen, die allgemein liegen. Ist F der Inhalt dieses Bereichs und F_5 der Inhalt des kleinsten, den vier Punkten p, q, p', q' umschriebenen Reuleauxfünfecks, so ist, wie eben bewiesen wurde,

$$F_5 \leqq F.$$

Andererseits war nach § 2

$$F_3 < F_5$$

und daraus ergibt sich schließlich in der Tat die behauptete Ungleichung

$$F_3 < F.$$

Zur Theorie der konvexen Funktionen.

Von

F. Bernstein und G. Doetsch in Göttingen.

Einleitung.

Unter einer konvexen Funktion versteht man eine in einem Intervall (a, b) für jeden Wert definierte eindeutige reelle Funktion $f(x)$, die für je zwei Werte x_1 und x_2 im Intervall (a, b) der Bedingung

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

genügt.

J. L. W. V. Jensen*) hat gezeigt: *Ist die konvexe Funktion in dem Intervall (a, b) nach oben beschränkt, so ist sie dort stetig.* (Die Stetigkeit erstreckt sich übrigens nur auf die inneren Punkte des Intervalls, an den Enden braucht die Funktion nicht stetig zu sein, z. B.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \quad \text{für} \quad -1 < x < +1, \\ &= 2 \quad\;\; \text{„} \quad\;\; x = -1 \text{ und } x = +1. \end{aligned}$$

F. Bernstein**) hat nun auf Grund der Theorie der konvexen Funktionen, in bezug auf eine, bei der Begründung des Gaußschen Fehlergesetzes auftretende Funktion, folgenden Satz bewiesen:

Erfüllt die eindeutige reelle Funktion $y = \varphi(x)$ die Funktionalbeziehung

$$\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n) < \varphi(x_1 + \varepsilon) + \cdots + \varphi(x_n + \varepsilon)$$

für $\varepsilon \gtrless 0$ *unter der Nebenbedingung*

$$x_1 + \cdots + x_n = 0,$$

so liegen ihre Werte entweder auf einer Parabel der Form

$$y = h^2 x^2 + \varphi(0),$$

oder sie füllen den ebenen Raum oberhalb einer solchen Parabel überall dicht aus.

*) J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre leurs valeurs moyennes. Acta Math. 30, S. 175—201.

**) F. Bernstein, Über das Gaußsche Fehlergesetz, Math. Ann. 64 (1907), S. 417—447.

In der gegenwärtigen Arbeit zeigen wir, daß alle konvexen Funktionen ein ähnliches Verhalten wie diese spezielle Funktion aufweisen. Es gilt nämlich der Satz:

Eine konvexe Funktion ist entweder im Inneren ihres Definitionsintervalls stetig, oder ihre Werte füllen den ebenen Raum oberhalb einer stetigen konvexen Funktion, bzw. den ganzen zum Definitionsintervall gehörigen Streifen überall dicht aus.

Der Jensensche Satz wird in dieser Arbeit nicht benutzt, sondern von Neuem bewiesen. Überhaupt kann die Arbeit ohne Kenntnis der erwähnten Abhandlungen von Bernstein und Jensen gelesen werden.

1.
Hilfssätze.

Hilfssatz 1.*) *Ist $f(x)$ eine im Intervall (a, b) konvexe Funktion, so ist für alle Punkte r, die das Intervall (a, b) in rationalem Verhältnis teilen:*

$$f(r) \leqq g = \operatorname{Max}(f(a), f(b)).$$

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 irgendwelche Argumente im Intervall (a, b), so ist

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \leqq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)$$
$$\leqq \frac{1}{4} f(x_1) + \frac{1}{4} f(x_2) + \frac{1}{4} f(x_3) + \frac{1}{4} f(x_4).$$

Durch den Schluß von $m - 1$ auf m ergibt sich allgemein:

$$2^m f\left(\frac{1}{2^m} \sum_{\nu=1}^{2^m} x_\nu\right) \leqq \sum_{\nu=1}^{2^m} f(x_\nu).$$

Es sei n eine positive ganze Zahl $< 2^m$. Dann wählen wir

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^m} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

und erhalten

$$2^m \cdot f\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) + (2^m - n) f\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)$$

oder

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu). \tag{1}$$

Wir können nun annehmen, daß das Definitionsintervall von $f(x)$ das Intervall $(0, 1)$ ist, indem wir $f(a + x(b-a))$ statt $f(x)$ betrachten. Die

*) Dieser Satz ist von F. Bernstein l. c. S. 430 bewiesen worden.

rationalen Teilpunkte des Intervalls sind dann die Punkte mit rationaler Koordinate $x = r$. Es sei

$$r = \frac{m}{n},$$

wo m und n ganze Zahlen sind und $0 \leqq m \leqq n$ ist. Dann setzen wir in Formel (1)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-m} = 0, \quad x_{n-m+1} = \cdots = x_n = 1$$

und erhalten:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \leqq \frac{1}{n} \cdot ng = g.$$

Hilfssatz 2. *Ist $f(x)$ im Intervall (a, b) eine konvexe Funktion, so ist $f(x)$ in dem Teilintervall $a + \eta \leqq r \leqq b - \eta$ bei beliebig kleinem positivem $\eta < \frac{b-a}{2}$ eine auf der Menge der rationalen Teilpunkte r des Intervalls (a, b) gleichmäßig stetige Funktion, d. h. zu vorgegebenem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \eta) > 0$, so daß für je zwei rationale Teilpunkte r_1 und r_2 des Intervalls (a, b), die der Bedingung $|r_1 - r_2| < \varepsilon$ genügen und noch dem Intervall $a + \eta \leqq r \leqq b - \eta$ angehören, die Ungleichung erfüllt ist:*

$$|f(r_1) - f(r_2)| < \delta.$$

Die auf einer überall dichten Menge definierte Funktion $f(r)$ nennen wir eine Teillösung von $f(x)$. Zu ihr gehört eine für das Innere des Intervalls (a, b) definierte stetige konvexe Funktion, die mit $f(x)$ in den Punkten $a < r < b$ übereinstimmt.

Der Hilfssatz 2, der für die späteren Beweise grundlegend ist, ist von F. Bernstein*) bewiesen worden. Wir geben hier einen neuen Beweis, der die dort gemachten Fallunterscheidungen nicht benötigt.

Wir nehmen wieder an, daß $a = 0$, $b = 1$ ist. Zunächst zeigt man leicht, daß $f(r)$ auf der Menge der inneren rationalen Teilpunkte von $(0, 1)$ stetig ist. Es sei r rational und $0 < r < 1$, ferner n eine positive ganze Zahl $\geqq 2$. Dann wählen wir eine rationale Zahl h so, daß $r \pm nh$ noch dem Intervall $(0, 1)$ angehören und setzen in der Relation (1)

$$x_1 = r + n \cdot h, \quad x_2 = \cdots = x_n = r.$$

Dann ergibt sich

$$f(r \pm h) \leqq \frac{1}{n} f(r \pm nh) + \frac{n-1}{n} f(r)$$

oder

$$f(r + h) - f(r) \leqq \frac{f(r + nh) - f(r)}{n},$$

und

$$f(r) - f(r - h) \geqq \frac{f(r) - f(r - nh)}{n}.$$

*) F. Bernstein, l. c. S. 430—432.

Wegen der Konvexität von $f(x)$ ist

$$f(r+h)-f(r) \geqq f(r)-f(r-h),$$

also

$$\text{(2)} \qquad \frac{f(r)-f(r-nh)}{n} \leqq f(r)-f(r-h) \leqq f(r+h)-f(r) \leqq \frac{f(r+nh)-f(r)}{n}.$$

Da r und h, also auch $r \pm nh$ rational sind, so ist nach Hilfssatz 1

$$f(r-nh) \quad \text{und} \quad f(r+nh) \leqq g = \operatorname{Max}(f(0), f(1)),$$

so daß aus (2) folgt:

$$\text{(3)} \qquad \frac{f(r)-g}{n} \leqq f(r)-f(r-h) \leqq f(r+h)-f(r) \leqq \frac{g-f(r)}{n},$$

Läßt man n bei festem r unbegrenzt wachsen und h entsprechend gegen 0 abnehmen, so folgt:

$$\lim \{f(r \pm h) - f(r)\} = 0,$$

wenn h durch die rationalen Werte gegen 0 läuft.

Um zu zeigen, daß die Stetigkeit von $f(r)$ im Intervall $\eta \leqq r \leqq 1-\eta$ gleichmäßig ist, beweisen wir zunächst die Existenz einer unteren Schranke für $f(r)$ im Intervall $(0, 1)$. In der Formel (1) setzen wir

$$x_1 = r,\ x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{2}$$

und erhalten:

$$n f\left(\frac{r+(n-1)\frac{1}{2}}{n}\right) \leqq f(r) + (n-1) f\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

oder

$$f(r) \geqq n \left\{ f\left(\tfrac{1}{2} + \frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right\} + f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$f(r) \geqq -n \left| f\left(\tfrac{1}{2} + \frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| + f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

$f(x)$ ist für $x = \frac{1}{2}$ in bezug auf die rationalen Argumente stetig. Es gibt also eine positive Zahl ε, so daß, wenn ϱ rational und $|\varrho| \leqq \varepsilon$ ist, die Ungleichung besteht:

$$\left| f\left(\tfrac{1}{2} + \varrho\right) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| < 1.$$

Wir setzen nun speziell:

$$n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Dann ist für alle r zwischen 0 und 1

$$\left|\frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right| < \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} < \varepsilon_1,$$

also

$$\left|f\left(\frac{1}{2}+\frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 1.$$

Mithin gilt für alle r zwischen 0 und 1:

$$f(r) \geqq -\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1 + f\left(\frac{1}{2}\right) = u.$$

Nachdem die Existenz einer unteren Schranke für $f(r)$ bewiesen ist, folgt aus (3):

$$\frac{u-g}{n} \leqq f(r) - f(r-h) \leqq f(r+h) - f(r) \leqq \frac{g-u}{n}$$

und hieraus

$$(4) \qquad |f(r+h) - f(r)| \leqq \frac{g-u}{n}.$$

Hierbei war vorausgesetzt, daß $r \pm nh$ noch im Intervall $(0, 1)$ liegen. Wir wählen nun $n \geqq 2$ so, daß

$$\frac{g-u}{n} < \delta$$

ist.

r_1 und r_2 seien je zwei rationale Argumente im Intervall $\eta \leqq r \leqq 1-\eta$, die die Bedingung

$$|r_2 - r_1| < \frac{\eta}{n} = \varepsilon$$

erfüllen. Weil

$$\eta + n(r_2 - r_1) \leqq r_1 + n(r_2 - r_1) \leqq 1 - \eta + n\,(r_2 - r_1)$$

ist, so ist dann

$$\eta - n\varepsilon \leqq r_1 + n(r_2 - r_1) \leqq 1 - \eta + n \cdot \varepsilon,$$

d. h.

$$0 \leqq r_1 + n(r_2 - r_1) \leqq 1.$$

Die Formel (4) ist also auf $r = r_1$, $h = r_2 - r_1$ anwendbar und liefert:

$$|f(r_2) - f(r_1)| < \delta.$$

Hilfssatz 3. *Eine in einem Intervall (a, b) nicht nach oben beschränkte konvexe Funktion ist in keinem Teilintervall nach oben beschränkt.*

Angenommen, in dem Teilintervall

$$a \leqq \alpha \leqq x \leqq \beta \leqq b$$

sei

$$f(x) < g.$$

Wir setzen

$$\mathrm{Max}\,(g, f(a); f(b)) = G.$$

Zu jedem Werte x im Intervall (a, b) gibt es einen Wert x' im Intervall (α, β) derart, daß x ein rationaler Teilpunkt des Intervalls (a, x'), bzw. (x', b) ist. Nach Hilfssatz 1 ist dann

$$f(x) \leqq \mathrm{Max}\,(f(a), f(x')), \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leqq \mathrm{Max}\,(f(x'), f(b)),$$

also stets

$$f(x) \leqq G.$$

$f(x)$ wäre mithin im ganzen Intervall (a, b) beschränkt.

Hilfssatz 4. *Eine in einem Intervall (a, b) nicht nach unten beschränkte konvexe Funktion ist in keinem Intervall nach unten beschränkt.*

Angenommen, in dem Teilintervall (α, β) sei

$$f(x) > u.$$

Wir können $f(\alpha) = 0$ voraussetzen, indem wir statt $f(x)$ die konvexe Funktion $f(x) - f(\alpha)$ betrachten.

In einem anstoßenden Teilintervall sei $f(x)$ nicht nach unten beschränkt. Wir können annehmen, daß dieses Intervall rechts von (α, β) liegt. (Anderenfalls braucht man nur die konvexe Funktion $f(-x)$ zu betrachten.) Wir nennen es (β, γ). Eine positive ganze Zahl $n \geqq 2$ sei so gewählt, daß

$$\gamma - \alpha < n(\beta - \alpha)$$

ist. In dem Intervall (β, γ) gibt es einen Punkt ξ, wo

$$f(\xi) < nu$$

ist. Wir wenden die Relation (1) auf

$$x_1 = \cdots = x_{n-1} = \alpha, \quad x_n = \xi$$

an und erhalten:

$$f\left(\frac{(n-1)\alpha + \xi}{n}\right) \leqq \frac{1}{n}\left((n-1) f(\alpha) + f(\xi)\right) = \frac{1}{n} f(\xi) < u.$$

Nun ist aber

$$\xi - \alpha \leqq \gamma - \alpha < n(\beta - \alpha),$$

also

$$\frac{(n-1)\alpha + \xi}{n} < \beta.$$

Ferner ist

$$\frac{(n-1)\alpha + \xi}{n} = \alpha + \frac{\xi - \alpha}{n} > \alpha.$$

Die Ungleichung

$$f\left(\frac{(n-1)\alpha + \xi}{n}\right) < u$$

steht also in Widerspruch mit der Annahme, daß $f(x) > u$ im Intervall (α, β) ist.

Hilfssatz 5. *Eine im Intervall (a, b) nach oben beschränkte konvexe Funktion ist dort auch nach unten beschränkt.*

Im Intervall (a, b) sei

$$f(x) < g.$$

Angenommen, $f(x)$ wäre dort nicht nach unten beschränkt, so gäbe es in (a, b) ein Argument $x = \frac{a+b}{2} + h$, $h > 0$, derart, daß

$$f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) < 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g$$

wäre. Nun ist aber

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - h\right),$$

also

$$f\left(\frac{a+b}{2} - h\right) \geqq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) > g.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung $f(x) < g$.

2.

Das Verhalten der konvexen Funktionen.

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall (a, b) *nach unten beschränkte Funktion:*

$$f(x) \geqq u \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Ist ξ ein Punkt des Intervalls und δ eine positive Zahl, so gibt es eine untere Grenze $m = m\,(\xi, \delta)$ von $f(x)$ in dem Intervall

$$\xi - \delta \leqq x \leqq \xi + \delta,$$

soweit es zu (a, b) gehört, derart daß dort

$$f(x) \geqq m(\xi, \delta)$$

ist, daß es aber mindestens ein x in demselben Intervall gibt, wo bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$

$$f(x) < m\,(\xi, \delta) + \varepsilon$$

ist. Läßt man nun δ bei festem ξ gegen 0 wandern, so durchläuft $m\,(\xi, \delta)$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Wertfolge*), konvergiert also gegen eine Zahl $m(\xi)$. Wir nennen diese für jedes Argument ξ des Intervalls (a, b) definierte Zahl $m(\xi)$ *die untere Grenze von $f(x)$ in der Nähe der Stelle* ξ. Die Funktion $m(\xi)$ nennen wir kurz *die untere Grenze von $f(x)$.*

Satz 1. *Die untere Grenze $m(x)$ einer nach unten beschränkten konvexen Funktion $f(x)$ ist eine stetige konvexe Funktion.*

Zunächst zeigen wir, daß $m(x)$ konvex ist. Ist ε eine beliebige positive Zahl und sind ξ_1, ξ_2 zwei beliebige verschiedene Argumente im

*) Denn es ist stets $m(\xi, \delta) \leq f(\xi)$.

Definitionsintervall von $f(x)$, so gibt es wegen der Definition der unteren Grenze eine positive Zahl $\delta = \delta(\xi_1, \xi_2\ \varepsilon)$ derart, daß für

$$\left| x - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right| < \delta$$

$$f(x) > m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

ist. Wir wählen nun irgend zwei Werte x_1 und x_2 so, daß

$$|x_1 - \xi_1| < \delta \quad \text{und} \quad f(x_1) < m(\xi_1) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|x_2 - \xi_2| < \delta \quad \text{und} \quad f(x_2) < m(\xi_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Dann folgt:

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right| < \delta$$

und

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Ungleichung (5) kann auf $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ angewandt werden und liefert:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da nun

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

ist, so ergibt sich:

$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

oder

$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also folgt:

$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) \leqq \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2},$$

d. h. $m(x)$ ist eine konvexe Funktion.

Um die Stetigkeit von $m(x)$ zu beweisen, betrachten wir zunächst nur die inneren Punkte des Intervalls. Um einen inneren Punkt ξ kann man ein Intervall (x_1, x_2) abgrenzen, von dem ξ ein rationaler Teilpunkt ist. Da $m(x)$ konvex ist, so existiert nach Hilfssatz 2 eine Teillösung von $m(x)$, die in den inneren rationalen Teilpunkten r von (x_1, x_2) stetig ist. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so daß $\xi - \varepsilon$ und $\xi + \varepsilon$ noch dem Intervall (x_1, x_2) angehören und für $|r - \xi| < \varepsilon$

$$|m(r) - m(\xi)| < \frac{\delta}{2},$$

also

$$m(r) < m(\xi) + \frac{\delta}{2}$$

ist. Wir behaupten, daß in dem Intervall $|x - \xi| < \varepsilon$

$$m(x) < m(\xi) + \delta$$

ist.

Es sei x ein beliebiger Punkt des Intervalls $|x - \xi| < \varepsilon$. Wir brauchen nur zu zeigen: In jedem Intervall um x liegt ein Punkt $\bar{x}$, wo

$$f(\bar{x}) < m(\xi) + \delta$$

ist. Denn dann muß auch

$$m(x) < m(\xi) + \delta$$

sein. Nun liegt aber in der Tat, weil x dem Intervall $|x - \xi| < \varepsilon$ angehört, in jeder Umgebung von x ein rationaler Teilpunkt r des Intervalls (x_1, x_2), der auch noch im Intervall $|r - \xi| < \varepsilon$ liegt und wo also

$$m(r) < m(\xi) + \frac{\delta}{2}$$

ist. In beliebiger Nähe von r, also auch noch in der angegebenen Umgebung von x, aber gibt es einen Punkt $\bar{x}$, wo

$$f(\bar{x}) < m(r) + \frac{\delta}{2}$$

ist. Dann ist

$$f(\bar{x}) < m(\xi) + \delta.$$

Damit ist gezeigt, daß in einer gewissen Umgebung von ξ

$$m(x) < m(\xi) + \delta$$

ist. Es gibt aber auch ein Intervall um ξ, wo wegen der Definition der unteren Grenze

$$f(x) > m(\xi) - \frac{\delta}{2}$$

ist, so daß dort

$$m(x) \geqq m(\xi) - \frac{\delta}{\varepsilon} > m(\xi) - \delta$$

sein muß. Folglich ist die Funktion $f(x)$ in jedem inneren Punkte ξ des Definitionsintervalls (a, b) von $f(x)$ stetig.

Für die Intervallenden, z. B. für b, ergibt sich die Stetigkeit auf Grund folgender Überlegungen: In einem Intervall $b - x < \varepsilon$ ist

$$f(x) > m(b) - \frac{\delta}{2},$$

also

$$m(x) > m(b) - \delta.$$

In diesem Intervall gibt es auch einen Punkt x_1, wo

$$f(x_1) < m(b) + \frac{\delta}{2},$$

also auch

$$m(x_1) < m(b) + \frac{\delta}{2}$$

ist. In dem Punkte x_1 ist $m(x)$ stetig, also ist in einem gewissen Intervall J um x_1

$$|m(x) - m(x_1)| < \frac{\delta}{2},$$

d. h.

$$m(x) < m(x_1) + \frac{\delta}{2} < m(b) + \delta.$$

Zu jedem Punkt x zwischen x_1 und b gibt es nun einen Wert x' im Intervall J derart, daß x ein rationaler Teilpunkt des Intervalls (x', b) ist. Nach Hilfssatz 1 ist dann

$$m(x) < \operatorname{Max}(m(x'), m(b)) < m(b) + \delta.$$

Im Intervall (a, b) ist also sowohl

$$m(x) > m(b) - \delta$$

als auch

$$m(x) < m(b) + \delta.$$

Mithin ist $m(x)$ in b stetig.

Satz 2. *Stimmt eine nach unten beschränkte konvexe Funktion mit ihrer unteren Grenze an wenigstens einem inneren Punkt des Definitionsintervalles nicht überein, so ist sie nicht nach oben beschränkt.*

Es sei ξ ein innerer Punkt des Intervalls (a, b), wo $f(x)$ von $m(x)$ verschieden ist. Dann ist

$$f(\xi) - m(\xi) = p > 0.$$

Wir werden nun zeigen, daß es eine Stelle im Intervall gibt, wo $f(x)$ größer als eine beliebig vorgegebene Zahl g ist.

Wir wählen eine ganze Zahl n so, daß

$$(n-1)\frac{p}{2} + m(\xi) > g$$

ist. Man kann im Intervall (a, b) ein Argument $x = \xi - h$ so finden, daß $\xi + (n-1)h$ noch im Intervall (a, b) liegt und zugleich

$$|f(x) - m(\xi)| < \frac{p}{2},$$

also

$$f(x) < m(\xi) + \frac{p}{2}$$

ist. Da

$$m(\xi) = f(\xi) - p$$

ist, so folgt

$$f(x) < f(\xi) - \frac{p}{2}$$

oder

$$f(\xi) - f(\xi - h) > \frac{p}{2}\cdot$$

Wir setzen nun in Formel (1)

$$x_1 = \cdots = x_{n-1} = \xi - h, \quad x_n = \xi + (n-1)h$$

und erhalten:

$$nf(\xi) \leqq (n-1)f(\xi - h) + f(\xi + (n-1)h),$$

also

$$f(\xi + (n-1)h) \geqq n(f(\xi) - f(\xi - h)) + f(\xi - h),$$

Nun ist aber

$$|f(\xi - h) - m(\xi)| < \frac{p}{2},$$

also

$$f(\xi - h) > m(\xi) - \frac{p}{2},$$

ferner

$$f(\xi) - f(\xi - h) > \frac{p}{2}\cdot$$

Daraus folgt:

$$f(\xi + (n-1)h) > n\cdot\frac{p}{2} + m(\xi) - \frac{p}{2} = (n-1)\frac{p}{2} + m(\xi) > g.$$

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt der *Jensensche Satz.* Ist nämlich die Funktion $f(x)$ nach oben beschränkt, so ist sie nach Hilfssatz 5 nach unten beschränkt, besitzt also eine untere Grenze. Nach Satz 2 ist $f(x)$ im Innern des Definitionsintervalls mit $m(x)$ identisch, also nach Satz 1 dort stetig.

Satz 3. *Die Werte einer im Intervall (a, b) nach unten beschränkten konvexen Funktion füllen den ebenen Raum oberhalb ihrer unteren Grenze überall dicht aus, wenn die Funktion im Innern von (a, b) nicht mit ihrer unteren Grenze identisch ist.*

Es sei

$$a \leqq \xi \leqq b \quad \text{und} \quad \eta > m(\xi).$$

Dann werden wir zeigen: Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein x, so daß

$$|x - \xi| < \delta$$

und

$$|f(x) - \eta| < \delta$$

ist.

Wegen der Stetigkeit von $m(x)$ gibt es eine Zahl $\Delta > 0$, so daß für

$$|x - \xi| < \Delta$$

$$\eta - \frac{\eta - m(\xi)}{2} > m(x)$$

ist. Wir können uns auf die δ beschränken, die kleiner als

$$\operatorname{Min}\left(\Delta, \frac{\eta - m(\xi)}{2}\right)$$

sind. Dann ist für

$$|x - \xi| < \delta,$$

$$\eta - \delta > m(x).$$

Da die Funktion $f(x)$ im Innern von (a, b) nicht mit $m(x)$ übereinstimmt, so ist sie nach Satz 2 in (a, b) nicht nach oben beschränkt; nach Hilfssatz 3 gilt dasselbe für das Intervall $|x - \xi| < \delta$. Es ist also möglich, x_1 so zu wählen, daß

$$|\xi - x_1| < \delta$$

und

$$f(x_1) > \eta + \delta$$

ist. Ferner kann man x_2 so wählen, daß

$$|\xi - x_2| < \delta$$

und

$$f(x_2) < \eta - \delta$$

ist, da für $|x - \xi| < \delta$ die untere Grenze der Ungleichung genügt:

$$m(x) < \eta - \delta$$

und in beliebiger Nähe der unteren Grenze Funktionswerte liegen. Man kann nun zwei Werte x' und x'' im Intervall (a, b) so wählen, daß x_1 und x_2 innere rationale Teilpunkte des Intervalls (x', x'') sind. Alsdann gibt es nach Hilfssatz 2 eine stetige Funktion $F(x)$, die mit $f(x)$ in den rationalen Teilpunkten von (x', x''), also insbesondere in x_1 und x_2 mit $f(x)$ übereinstimmt. Diese ist für x_1 größer als $\eta + \delta$, für x_2 kleiner als $\eta - \delta$. Sie nimmt also an einer Zwischenstelle $\bar{x}$ den Wert η und in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\bar{x}$ solche Werte an, die sich von η um weniger als δ unterscheiden. In dieser Umgebung liegen auch rationale Teilpunkte des Intervalls (x', x''), wo $F(x) = f(x)$ ist. Also gibt es sicher zwischen x_1 und x_2, d. h. im Intervall $|x - \xi| < \delta$ Argumente, wo

$$|f(x) - \eta| < \delta$$

ist.

Satz 4. *Die Werte einer in einem Intervall (a, b) nicht nach unten beschränkten konvexen Funktion erfüllen den zum Intervall (a, b) gehörigen Streifen der Ebene überall dicht.*

Die Funktion ist auch nicht nach oben beschränkt. Denn wäre dies der Fall, so müßte sie nach Hilfssatz 5 nach unten beschränkt sein.

Ist also $a \leqq \xi \leqq b$ und η ein beliebiger Wert, so ist bei beliebigem $\delta > 0$ die Funktion $f(x)$ im Intervall $|x - \xi| < \delta$ nach den Hilfssätzen

3 und 4 weder nach oben noch nach unten beschränkt. Man kann also zwei Argumente x_1 und x_2 so bestimmen, daß einerseits

$$|\xi - x_1| < \delta$$

und

$$f(x_1) > \eta + \delta,$$

andererseits

$$|\xi - x_2| < \delta$$

und

$$f(x_2) < \eta - \delta$$

ist. Hieraus schließt man auf Grund von Hilfssatz 2 analog wie bei Satz 3, daß $f(x)$ zwischen x_1 und x_2, also im Intervall $|x - \xi| < \delta$ einen Wert zwischen $\eta - \delta$ und $\eta + \delta$ annehmen muß.

Zur Theorie der Integralgleichung dritter Art.

Von

Ernst Garbe.*)

Einleitung.

Eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad \varphi(s) - \lambda \int_0^1 A(s)\, K(s,t)\, \varphi(t)\, dt = f(s)$$

heißt nach Hilbert eine Integralgleichung dritter Art. Wir setzen voraus, daß $A(s)$ im Intervalle 0 bis 1 bis auf eine endliche Anzahl endlicher Sprünge stetig und von beliebigem Vorzeichen und daß $K(s,t)$ eine stetige, in s, t symmetrische Funktion vom positiven Typus ist, d. h. es soll, wenn $u(s)$ irgendeine stetige oder wie $A(s)$ unstetige Funktion bedeutet, die Ungleichung gelten:

$$(2) \qquad \int_0^1\int_0^1 K(s,t)\, u(s)\, u(t)\, ds\, dt \geqq 0.$$

Ist

$$(3) \qquad K_2(s,t) = \int_0^1 K(s,r)\, A(r)\, K(r,t)\, dr$$

eine nicht identisch verschwindende Funktion — und das wollen wir im folgenden annehmen —, so existiert mindestens ein singulärer Parameterwert (sog. (polarer) Eigenwert von $A(s)\, K(s,t)$), für den die zu (1) gehörige homogene Integralgleichung

$$(4) \qquad \varphi(s) = \lambda \int_0^1 A(s)\, K(s,t)\, \varphi(t)\, dt$$

eine Auflösung besitzt. Mit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ bezeichnen wir die dem absoluten Betrage nach geordneten Eigenwerte von (4) — sie sind reell und häufen sich nicht im Endlichen —, jeder soll so oft angeschrieben werden als

*) Der Verfasser ist am 22ten August 1914 in den Vogesen gefallen. D. Red.

seine Vielfachheit beträgt; $\pi_1(s), \pi_2(s), \cdots$ seien die zugehörigen Nulllösungen ((polare) Eigenfunktionen), die wir so normiert annehmen*), daß

$$(5)\qquad \int_0^1\int_0^1 K(s,t)\,\pi_\mu(s)\,\pi_\nu(t)\,ds\,dt = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases}$$

ist; ferner werde

$$(6)\qquad \begin{aligned} K_p(s,t) &= \int_0^1 K(s,r)\,A(r)\,K_{p-1}(r,t)\,dr, \\ K_1(s,t) &= K(s,t) \end{aligned}$$

gesetzt. Für $p \geqq 3$ ist

$$(7)\qquad K_p(s,t) = \frac{1}{A(s)\,A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^{p+1}},$$

wo die rechts stehende Reihe in dem ganzen Gebiet $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert.**) Weiß man, daß die Reihe auch für $p = 2$ gleichmäßig konvergiert, so besteht die Gleichung (7) auch für $p = 2$.

Weiterhin ist bekannt, daß für jede durch Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ in der Form

$$(8)\qquad f(s) = A(s)\int_0^1 K(s,t)\,g(t)\,dt$$

darstellbare Funktion gilt

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_\nu(s) \int_0^1\int_0^1 K(x,y)\,\pi_\nu(x)\,f(y)\,dx\,dy + h(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu\,\pi_\nu(s) + h(s),$$

falls die rechts stehende Reihe gleichmäßig konvergiert; $h(s)$ genügt der Gleichung

$$\int_0^1 K(s,t)\,h(t)\,dt = 0$$

und verschwindet also sicher identisch, wenn $K(s,t)$ abgeschlossen ist.

Im folgenden werde ich nun die neuen Sätze herleiten, daß die auf der rechten Seite von (7) *stehende Reihe auch für* $p = 2$ *in dem ganzen Gebiet*

---

*) J. Marty, Comptes rendus, 150 (1910), S. 603. S. auch H. Hahn, Jahresb. d. D. Math.-Ver. 1911, S. 115 ff.

**) Die Normierung durch (5), die gleichbedeutend mit $\int_0^1 \frac{(\pi_\mu(t))^2}{A(t)}\,dt = \lambda_\mu$ ist, bringt es mit sich, daß in (7) die $(p+1)^{\text{te}}$ Potenz der Eigenwerte in den Nennern auftritt. — Von dem Fall *endlich* vieler (polarer) Eigenwerte, für den die in der Einleitung angeführten Sätze ohne weiteres gelten, sehen wir im folgenden ganz ab.

$0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ *absolut und gleichmäßig konvergiert, und also* (7) *stets auch für* $p = 2$ *gilt; ferner daß für jede in der Gestalt* (8) *darstellbare Funktion* $f(s)$ *die absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung*

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \pi_\nu(s) + h(s)$$

besteht; im Falle eines *allgemeinen* Kernes $K(s,t)$, der ja stets auch abgeschlossen ist, verschwindet $h(s)$ identisch. Mit Hilfe dieses Entwicklungssatzes gelingt es dann, das folgende Theorem zu beweisen, aus dem sich umgekehrt der Entwicklungssatz für einen allgemeinen Kern $K(s,t)$ unmittelbar ergibt: *ist* $K(s,t)$ *allgemein, so gilt stets die „bilineare Formel"*

$$K(s,t) = \frac{1}{A(s)\,A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2},$$

wo die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Reihe absolut und gleichmäßig in dem ganzen Gebiete $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ *konvergiert.* Ich hebe hervor, daß in dem Falle eines allgemeinen Kernes $K(s,t)$ und einer polaren*) Integralgleichung (1) sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative (polore) Eigenwerte existieren.**) —

Aus diesem Entwicklungssatz folgt, daß *schon jede zweimal (nicht nur viermal***)) stetig differenzierbare Funktion, die in bestimmten Punkten (bzw. Kurven) eines Gebietes gewissen Bedingungen genügt, in eine Reihe entwickelbar ist, die nach den Eigenfunktionen der von Hilbert***) betrachteten Differentialgleichungen fortschreitet.* —

Zum Schluß beweise ich noch, daß *im Falle einer polaren Integralgleichung* (1) *die Summe der (absolut genommenen) reziproken polaren Eigenwerte konvergiert und nicht größer ist als die Summe der reziproken orthogonalen Eigenwerte*†) λ_ν' *von* $K(s,t)$:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu'}.$$

*) D. h. die Funktion $A(s)$ ist streckenweise abwechselnd konstant gleich $+1$ oder -1, und zwar so, daß sie innerhalb des Intervalles 0 bis 1 wenigstens an einer Stelle und sicher nur an endlich vielen Stellen ihr Zeichen wechselt.

**) Hilbert, Grundzüge einer allgem. Theorie d. lin. Integralgl., (Fortschr. d. math. Wiss. in Monogr. hrsg. von O. Blumenthal) 1912, S. 204.

***) Hilbert, a. a. O., Kap. XVI.

†) Für sie hat also die homogene orthogonale Integralgleichung

$$\varphi_\nu(s) = \lambda_\nu' \int_0^1 K(s,t)\,\varphi_\nu(t)\,dt$$

eine Lösung.

Daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda'_\nu},$$

gebildet aus den reziproken (positiven) orthogonalen Eigenwerten des Kernes $K(s,t)$, konvergent ist, hat bekanntlich J. Mercer*) gezeigt.

Man erkennt nun leicht, daß die Fredholmsche Determinante $\delta(\lambda)$ des Kernes $A(s)K(s,t)$ ($A(s) = \pm 1$, vgl. Anm. *), S. 529) die Darstellung

$$\delta(\lambda) = e^{a\lambda} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right)$$

gestattet; für einen *allgemeinen* Kern $K(s,t)$ ist $a = 0$ und also die ganze Funktion $\delta(\lambda)$ vom Geschlechte Null.

§ 1.

Die „bilineare Formel" für den zweifach iterierten Kern $K_2(s,t)$.**)

Zuerst erinnern wir an eine bekannte Tatsache.***) Es sei $\theta(s)$ irgendeine stetige oder wie $A(s)$ unstetige Funktion und

$$\theta_\nu = \int_0^1\!\!\int_0^1 K(s,t)\,\pi_\nu(s)\,\theta(t)\,ds\,dt = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\,\theta(t)\,dt.$$

Wegen (2) ist

$$J_m = \int_0^1\!\!\int_0^1 K(s,t)\left[\theta(s) - \sum_{\nu=1}^{m} \theta_\nu \pi_\nu(s)\right]\left[\theta(t) - \sum_{\nu=1}^{m} \theta_\nu \pi_\nu(t)\right] ds\,dt \geqq 0,$$

und bei Berücksichtigung von (5):

$$J_m = \int_0^1\!\!\int_0^1 K(s,t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt - \sum_{\nu=1}^{m} \theta_\nu^2 \geqq 0.$$

Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu^2$ konvergiert also, und es ergibt sich

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 K(s,t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}\left(\int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)\,\theta(t)}{A(t)}\,dt\right)^2 + J, \tag{9}$$

wo J eine nicht negative, endliche Größe bedeutet.

---

*) Philosoph. Transact. of the Royal Society of London, Series A, Vol 209, 1909.
**) Zum Beweis dieses Paragraphen vgl. J. Mercer, a. a. O., S. 441 f.
***) Vgl. Marty oder Hahn, a. a. O.

Wir gehen nun aus von der Funktion

$$(10)\qquad \mathsf{K}(\lambda; s,t) = K(s,t) + \frac{1}{A(s)\,A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2-\lambda)}.$$

Wenn λ von allen λ_ν^2 verschieden ist, so konvergiert die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung absolut und gleichmäßig in dem ganzen Gebiet $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$: denn es ist, wenn n genügend groß gewählt wird ($|\lambda_\nu^2 - \lambda| > \lambda^2$ für alle $\nu \geq n$)

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left| \frac{\lambda\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2-\lambda)} \right| \leq |\lambda| \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{|\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)|}{\lambda_\nu^4} + \lambda^2 \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \left| \frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^4(\lambda_\nu^2-\lambda)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}(|\lambda|) + 1) \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{(\pi_\nu(s))^2 + (\pi_\nu(t))^2}{\lambda_\nu^4};$$

von der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\pi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^4}$$

wissen wir aber, daß sie gleichmäßig konvergiert.*)

Da

$$\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)} = \lambda_\nu \int_0^1 K(s,t)\,\pi_\nu(t)\,dt$$

eine stetige Funktion ist, so stellt auch $\mathsf{K}(\lambda; s, t)$ für alle negativen λ eine stetige, symmetrische Funktion der Variabeln s, t dar. Wir bezeichnen die Summe der m ersten Terme der Reihe

$$\frac{1}{A(s)\,A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2-\lambda)}$$

mit $S_m(\lambda; s,t)$, den Rest mit $R_m(\lambda; s,t)$. Es ist

$$S_m(\lambda; s,t) = \frac{1}{A(s)\,A(t)} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2-\lambda} - \frac{1}{A(s)\,A(t)} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2},$$

$$\lim_{\lambda=-\infty} S_m(\lambda; s,t) = -\frac{1}{A(s)\,A(t)} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2},$$

und aus (10)

$$(11)\qquad \lim_{\lambda=-\infty} [\mathsf{K}(\lambda; s,s) - R_m(\lambda; s,s)] = K(s,s) - \frac{1}{(A(s))^2} \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(\pi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2}.$$

---

*) Marty, a. a. O., S. 604.

Da

$$R_m(\lambda; s,s) = \frac{1}{(A(s))^2} \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{\lambda(\pi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2-\lambda)},$$

so ist

(12) $$R_m(\lambda; s,s) < 0$$

für jeden negativen Wert von λ. —

Bedeutet $\theta(s)$ irgendeine Funktion, die stetig oder wie $A(s)$ unstetig ist, so folgt aus (10)

$$\int_0^1\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda; s,t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt$$
$$= \int_0^1\int_0^1 K(s,t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2-\lambda)}\left(\int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\,\theta(t)\,dt\right)^2,$$

oder nach dem oben bewiesenen Hilfssatz (9):

$$\int_0^1\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda; s,t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2-\lambda}\left(\int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\,\theta(t)\,dt\right)^2 + J,$$

daher

$$\int_0^1\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda; s,t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt \geqq 0 \text{ für } \lambda < 0.$$

$\mathsf{K}(\lambda; s,t)$ ist demnach für $\lambda < 0$ eine Funktion vom positiven Typus; als solche muß sie jedenfalls die Bedingung

(13) $$\mathsf{K}(\lambda; s,s) \geqq 0 \text{ für } \lambda < 0$$

erfüllen*). Gleichermaßen gilt

(14) $$K(s,s) \geqq 0.$$

Wir sehen also ((11) bis (14)), daß

(15) $$K(s,s) - \frac{1}{(A(s))^2}\sum_{\nu=1}^{m} \frac{(\pi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2} > 0$$

ist für alle Werte von m. Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\pi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2}$$

konvergiert somit für jeden Wert von s im Intervalle (0, 1), und ihr Wert übersteigt nie das Maximum der Funktion $(A(s))^2 K(s,s)$.

---

*) J. Mercer, a. a. O., S. 426.

Nun sieht man sofort, daß *die Reihe*

$$\frac{1}{A(s)\,A(t)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^3}$$

absolut und gleichmäßig in dem ganzen Gebiet $0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1$ *konvergiert.* Denn es ist nach (15), wenn K das Maximum von $|K(s,t)|$ bedeutet:

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m}\frac{1}{|\lambda_\nu^3|}\cdot\left|\frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{A(s)\,A(t)}\right| \leq \frac{1}{2\,|\lambda_n|}\sum_{\nu=n}^{n=\nu+m}\frac{1}{\lambda_\nu^2}\left\{\left(\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\right)^2+\left(\frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\right)^2\right\}$$

$$\leq \frac{1}{2\,|\lambda_n|}\left(K(s,s)+K(t,t)\right) \leq \frac{K}{|\lambda_n|},$$

woraus die zu beweisende absolute und gleichmäßige Konvergenz folgt. *Es gilt also stets die Gleichung* (7) *für* $p = 2$. —

Geht man aus von der Gleichung (vgl. (11))

$$\lim_{\lambda=-\infty}\left[\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda;\,s,s)\,ds-\int_0^1 R_m(\lambda;\,s,s)\,ds\right]$$

$$=\int_0^1 K(s,s)\,ds-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^1\left(\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\right)^2 ds,$$

so findet man analog zu (15)

$$\int_0^1 K(s,s)\,ds-\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^1\left(\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\right)^2 ds>0, \tag{16}$$

für jedes m.

§ 2.

Der Entwicklungssatz.

Bildet man für die durch Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ in der Gestalt (8)

$$f(s)=A(s)\int_0^1 K(s,t)\,g(t)\,dt$$

darstellbare Funktion den polaren Fourierkoeffizient f_ν, so wird

$$f_\nu=\frac{1}{\lambda_\nu}\int_0^1\frac{\pi_\nu(t)\,f(t)}{A(t)}\,dt=\frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^1\frac{\pi_\nu(t)\,g(t)}{A(t)}\,dt=\frac{1}{\lambda_\nu}\,g_\nu.$$

Es gilt also

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} f_\nu\,\pi_\nu(s)=\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m}\frac{\pi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\,g_\nu.$$

Nach der „*Schwarz*schen Ungleichung"*)

$$\Big(\sum_{(p)} x_p y_p\Big)^2 \leqq \sum_{(p)} x_p^2 \cdot \sum_{(p)} y_p^2$$

ist daher

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} f_\nu \pi_\nu(s)\right| \leqq \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} |f_\nu \pi_\nu(s)| \leqq \sqrt{\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{(\pi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2} \cdot \sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} g_\nu^2}.$$

Der Wert der Summe

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} g_\nu^2$$

wird mit wachsendem n beliebig klein (vgl. (9)), ferner ist

$$\sum_{\nu=n}^{\nu=n+m} \frac{(\pi_\nu(s))^2}{\lambda_\nu^2} \leqq M,$$

wo M das Maximum der Funktion $(A(s))^2 K(s, s)$ bedeutet (s. S. 532 unten). *Damit ist die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \pi_\nu(s)$$

bewiesen und die Gültigkeit der Entwicklung

$$f(s) = A(s)\int_0^1 K(s, t)\, g(t)\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \pi_\nu(s) + h(s)$$

gezeigt.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, verschwindet für einen *allgemeinen* Kern $K(s, t)$ die Funktion $h(s)$ identisch, die der Gleichung

$$\int_0^1 K(s, t)\, h(t)\, dt = 0$$

genügt. Im folgenden wollen wir nun den Entwicklungssatz

$$f(s) = A(s)\int_0^1 K(s, t)\, g(t)\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \pi_\nu(s)$$

für einen *allgemeinen* Kern direkt beweisen**), ohne uns auf die Tatsache

*) Hilbert, a. a. O., S. 126.

**) Zu dem nachstehenden Beweis vgl. Hilbert, a. a. O., S. 25ff.

zu stützen, daß ein allgemeiner Kern stets auch abgeschlossen ist.*) Dabei soll noch die Annahme gemacht werden, daß (1) eine polare**) Integralgleichung ist. Man findet dann leicht, daß wenn $F(s)$ eine beliebige stetige Funktion von s und ε irgendeine noch so kleine positive Größe bezeichnet, stets mittels geeigneter Koeffizienten eine solche lineare Kombination $F^*(s)$ aus einer endlichen Anzahl der Eigenfunktionen $\pi_1(s), \pi_2(s), \cdots$ gebildet werden kann, daß

$$\int_0^1 (F(s) - F^*(s))^2 ds < \varepsilon$$

ausfällt.***)

Die Funktion $f(s)$ lasse sich also unter Vermittlung einer stetigen Funktion $g(s)$ in der Gestalt (8)

$$f(s) = A(s)\int_0^1 K(s,t)g(t)\,dt$$

darstellen. Nach dem eben Gesagten gibt es eine Funktion

$$\begin{aligned} g^*(s) &= c_1\pi_1(s) + c_2\pi_2(s) + \cdots + c_n\pi_n(s) \\ &= A(s)\int_0^1 K(s,t)[c_1\lambda_1\pi_1(t) + c_2\lambda_2\pi_2(t) + \cdots + c_n\lambda_n\pi_n(t)]\,dt \\ &= A(s)\int_0^1 K(s,t)h(t)\,dt, \end{aligned}$$

so daß, wenn

$$x(s) = g(s) - A(s)\int_0^1 K(s,t)h(t)\,dt$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$(17) \qquad \int_0^1 (x(s))^2 ds < \left(\frac{2\varepsilon}{3(1+M)}\right)^2$$

erfüllt ist, wobei ε irgend eine beliebig kleine positive Größe bedeutet und die Zahl M so gewählt ist, daß

$$\int_0^1 (A(s)K(s,t))^2 dt \leqq M,$$

$$(18) \qquad (A(s))^2 \cdot K(s,s) + \int_0^1 K(s,s)\,ds \leqq 1 + M$$

*) Vgl. Hilbert, a. a. O., S. 27.

**) s. S. 529, Anm. *).

***) Vgl. Hilbert, a. a. O., S. 203 unten.

gilt. Wir setzen

$$\bar{g}(s) = A(s)\int_0^1 K(s,t)\,h(t)\,dt,$$

$$f^*(s) = A(s)\int_0^1 K(s,t)\,\bar{g}(t)\,dt = A(s)\int_0^1 K_2(s,t)\,h(t)\,dt.$$

Die Funktion $f^*(s)$ ist*) in die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach Eigenfunktionen

$$f^*(s) = f_1^*\pi_1(s) + f_2^*\pi_2(s) + \cdots$$

entwickelbar, und man kann gewiß eine ganze Zahl m finden, so daß für alle s

$$|f^*(s) - f_1^*\pi_1(s) - f_2^*\pi_2(s) - \cdots - f_m^*\pi_m(s)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{19}$$

ist und auch diese Ungleichung gültig bleibt, wenn man m hierin durch eine größere Zahl ersetzt.

Nun ist gemäß der Ungleichung von Schwarz

$$\left|\int_0^1 A(s)\,K(s,t)\,x(t)\,dt\right| \leqq \left|\sqrt{\int_0^1 (A(s)\,K(s,t))^2 dt \cdot \int_0^1 (x(t))^2\,dt}\right|$$

und wegen (17) mithin

$$\leqq |\sqrt{M}|\,\frac{2\varepsilon}{3(1+M)} \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da

$$f(s) = f^*(s) + A(s)\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt \tag{20}$$

ist, so folgt die Ungleichung

$$|f(s) - f^*(s)| \leqq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{21}$$

Wegen (20) ist

$$f_\nu - f_\nu^* = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K(r,s)\,\pi_\nu(r)\,A(s)\,K(s,t)\,x(t)\,dt\,dr\,ds,$$

$$= \int_0^1\int_0^1 K_2(r,t)\,\pi_\nu(r)\,x(t)\,dt\,dr = \frac{1}{\lambda_\nu^2}\int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\,x(t)\,dt,$$

und daher

$$(f_\nu - f_\nu^*)\pi_\nu(s) = \frac{\pi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2}\int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\,x(t)\,dt. \tag{22}$$

*) Hilbert, a. a. O., S. 202, oder wie unmittelbar aus der in § 1 bewiesenen Entwicklung für $K_2(s,t)$ folgt.

Setzen wir

$$A = \frac{1}{\lambda_\nu} \frac{\pi_\nu(s)}{A(s)} \cdot A(s) \sqrt[4]{\int_0^1 (x(t))^2 dt}, \quad B = \frac{\frac{1}{\lambda_\nu} \int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)} x(t)\, dt}{\sqrt[4]{\int_0^1 (x(t))^2\, dt}},$$

so erhält man wegen

$$|AB| \leqq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$$

aus (22) die Ungleichung

$$|(f_\nu - f_\nu^*)\pi_\nu(s)| \leqq \frac{(A(s))^2}{2\lambda_\nu^2} \left(\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\right)^2 \sqrt{\int_0^1 (x(t))^2 dt} + \frac{\frac{1}{2\lambda_\nu^2}\left(\int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)} x(t)\, dt\right)^2}{\sqrt{\int_0^1 (x(t))^2\, dt}},$$

oder da

$$\left(\int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)} x(t)\, dt\right)^2 \leqq \int_0^1 \left(\frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\right)^2 dt \cdot \int_0^1 (x(t))^2 dt,$$

so ist

$$|(f_\nu - f_\nu^*)\pi_\nu(s)| \leqq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^1 (x(t))^2 dt} \left\{ A(s)^2 \frac{1}{\lambda_\nu^2} \left(\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\right)^2 + \frac{1}{\lambda_\nu^2} \int_0^1 \left(\frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\right)^2 dt \right\},$$

oder wegen (15), (16) und (17)

$$\sum_{\nu=1}^{m} |(f_\nu - f_\nu^*)\pi_\nu(s)| < \frac{1}{2} \frac{2\varepsilon}{3(1+M)} \left[(A(s))^2 K(s,s) + \int_0^1 K(s,s)\, ds \right]$$

und wegen (18)

$$\sum_{\nu=1}^{m} |(f_\nu - f_\nu^*)\pi_\nu(s)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

d. h. es ist auch

(23) $\quad |f_1\pi_1(s) + \cdots + f_m\pi_m(s) - f_1^*\pi_1(s) - \cdots - f_m^*\pi_m(s)| < \frac{\varepsilon}{3}.$

Aus (19), (21), (23) folgt für alle s

$$|f(s) - f_1\pi_1(s) - f_2\pi_2(s) - \cdots - f_m\pi_m(s)| < \varepsilon,$$

und zugleich ist ersichtlich, daß die Ungleichungen auch noch gelten, die entstehen, wenn man statt m eine größere Zahl wählt. Damit ist der Satz bewiesen, daß *unter den gemachten Voraussetzungen jede in der Gestalt* (8) *darstellbare Funktion in die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \pi_\nu(s)$ *entwickelbar ist.*

§ 3.

Die „bilineare Formel“ für einen allgemeinen Kern $K(s, t)$.

Der Beweis für die absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$K(s,t) = \frac{1}{A(s)A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}, \tag{24}$$

im Falle eines *allgemeinen* Kernes $K(s,t)$, kann nun auf Grund des § 2 in ähnlicher Weise geführt werden, wie J. Mercer (a. a. O.) die Konvergenz der bilinearen Formel für Kerne (einer orthogonalen Integralgleichung) vom positiven Typus zeigt.

Da

$$2\left|\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\right| \leqq \left(\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\right)^2 + \left(\frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\right)^2$$

ist, so ergibt sich aus der Formel (15), daß die Reihe

$$\frac{1}{A(s)A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2} \tag{25}$$

absolut konvergiert für jedes Wertepaar der Variabeln s, t, das den Ungleichungen $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ genügt. Für jedes solche Wertepaar besitzt also die Funktion

$$f(s,t) = K(s,t) - \frac{1}{A(s)A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2} \tag{26}$$

einen bestimmten, endlichen Wert, und wir wollen nun $f(s,t)$ näher betrachten. Es sei bemerkt, daß wegen (15) die Beziehung

$$0 \leqq f(s,s) \leqq K(s,s)$$

gilt. —

σ bezeichne irgend eine vorgegebene positive Größe; aus der absoluten Konvergenz der Reihe (25) folgt, daß für ein beliebiges, fest gewähltes Wertepaar s, t eine Zahl m so groß gefunden werden kann, daß

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2}\left|\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\right| < \frac{\sigma}{3}. \tag{27}$$

Wir betrachten nun wieder die Funktion (10)*)

$$\mathsf{K}(\lambda; s,t) = K(s,t) + \frac{1}{A(s)A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2-\lambda)}.$$

*) $\mathsf{K}(\lambda; s, t)$ spielt hier dieselbe Rolle wie bei Mercer die Funktion $K_\lambda(s, t)$;

Weil

$$\frac{1}{\lambda_\nu^2}\left|\frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{A(s)A(t)}\right| > \left|\frac{\lambda}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2-\lambda)}\,\frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{A(s)A(t)}\right|$$

für $\nu > m$, $\lambda < 0$, so haben wir

$$|R_m(\lambda; s, t)| = \left|\sum_{\nu=m+1}^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2-\lambda)}\,\frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{A(s)A(t)}\right| < \frac{\sigma}{3}, \qquad (\lambda<0).$$

Wegen

$$\lim_{\lambda=-\infty}[\mathsf{K}(\lambda; s, t) - R_m(\lambda; s, t)] = K(s, t) - \frac{1}{A(s)A(t)}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}$$

kann eine negative Zahl L' so groß ihrem absoluten Werte nach gewählt werden, daß für $\lambda < L'$

$$\left|\mathsf{K}(\lambda; s,t) - R_m(\lambda; s,t) - \left[K(s,t) - \frac{1}{A(s)A(t)}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\right]\right| < \frac{\sigma}{3};$$

aus (26) und (27) folgt

$$\left|\left[K(s,t) - \frac{1}{A(s)A(t)}\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\pi_\nu(s)\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}\right] - f(s,t)\right| < \frac{\sigma}{3}.$$

Addieren wir die drei letzten Ungleichungen, so erhalten wir

$$|\mathsf{K}(\lambda; s, t) - f(s,t)| < \sigma, \qquad (\lambda < L'),$$

d. h.

(28) $$\lim_{\lambda=-\infty}\mathsf{K}(\lambda; s, t) = f(s, t), \qquad (0 \leqq s \leqq 1,\ 0 \leqq t \leqq 1).$$

Von $\mathsf{K}(\lambda; s, t)$ haben wir gezeigt, daß es für $\lambda < 0$ eine Funktion vom positiven Typus ist (S. 532): es gilt immer

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda; s, t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt \geqq 0, \qquad (\lambda<0)$$

während aber letztere die zum Kerne $k(s, t)$ gehörige lösende Funktion darstellt, ist hier $\varphi(s) = \mathsf{K}(\lambda; s, t)$ eine Lösung der Integralgleichung

$$\varphi(s) - \lambda\int_0^1 K_2(s, r)\,A(r)\,\varphi(r)\,dr = K(s, t),$$

wie man leicht beweisen kann. Darum ist auch die Methode zu Anfang des § 29 (bei Mercer) in unserem Falle nicht unmittelbar anwendbar (vgl. unten S. 540ff.).

für jede beliebige stetige Funktion $\theta(s)$. Wir wollen beweisen, daß auch die Funktion

$$\overline{\mathsf{K}}(\lambda;\, s, t) = \mathsf{K}(\lambda;\, s, t) - \frac{\mathsf{K}(\lambda;\, a_1, s)\, \mathsf{K}(\lambda;\, a_1, t)}{\mathsf{K}(\lambda;\, a_1, a_1) - f(a_1, a_1) + \varepsilon} \tag{29}$$

für alle negativen Werte von λ vom positiven Typus ist, wo a_1 irgend einen Punkt des Intervalles 0 bis 1 und ε irgend eine positive Zahl bedeutet. Aus (10) und (26) folgt

$$\mathsf{K}(\lambda;\, a_1, a_1) = \dot{f}(a_1, a_1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2 - \lambda} \left(\frac{\pi_\nu(a_1)}{A(a_1)}\right)^2, \tag{30}$$

daher wächst $\mathsf{K}(\lambda;\, a_1, a_1)$ monoton mit λ, solange letzteres negativ ist, und es verschwindet somit wegen (28) der Ausdruck

$$\mathsf{K}(\lambda;\, a_1, a_1) - f(a_1, a_1) + \varepsilon$$

für keinen negativen Wert von λ.

Bilden wir nun das Doppelintegral

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \overline{\mathsf{K}}(\lambda;\, s, t)\, \theta(s)\, \theta(t)\, ds\, dt \tag{31}$$

$$= \int_0^1\!\!\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda;\, s, t)\, \theta(s)\, \theta(t)\, ds\, dt - \frac{\left(\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda;\, a_1, t)\, \theta(t)\, dt\right)^2}{\mathsf{K}(\lambda;\, a_1, a_1) - f(a_1, a_1) + \varepsilon},$$

wo $\theta(s)$, wie eben, eine beliebige stetige Funktion bezeichnet. Wie ich schon S. 532 bemerkt habe, besteht die Gleichung

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda;\, s, t)\, \theta(s)\, \theta(t)\, ds\, dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\theta^{(\nu)})^2}{\lambda_\nu^2 - \lambda} + J, \tag{32}$$

wo J eine nicht negative, endliche Größe und

$$\theta^{(\nu)} = \int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\, \theta(t)\, dt$$

ist. Ferner gilt nach (10)

$$A(s) \int_0^1 \mathsf{K}(\lambda;\, s, t)\, \theta(t)\, dt = A(s) \int_0^1 K(s, t)\, \theta(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda\, \pi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu^2 - \lambda)}\, \theta^{(\nu)}. \tag{33}$$

Nach dem von mir für allgemeine Kerne $K(s, t)$ in § 2 bewiesenen Entwicklungssatz ist

$$f(s) = A(s)\int_0^1 K(s,t)\,\theta(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_\nu(s) \int_0^1\int_0^1 K(x,y)\,\pi_\nu(x)\,f(y)\,dx\,dy$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_\nu(s) \int_0^1\int_0^1\int_0^1 K(x,y)\,\pi_\nu(x)\,A(y)\,K(y,t)\,\theta(t)\,dt\,dx\,dy$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_\nu(s) \int_0^1\int_0^1 K_2(x,t)\,\pi_\nu(x)\,\theta(t)\,dt\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2} \int_0^1 \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\,\theta(t)\,dt$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2}\,\theta^{(\nu)},$$

also folgt aus (33)

$$\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda; s, t)\,\theta(t)\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta^{(\nu)}}{\lambda_\nu^2 - \lambda} \cdot \frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}. \tag{34}$$

Wenn (34) mit $\theta(s)\,ds$ multipliziert und von 0 bis 1 integriert wird, sieht man übrigens in (32), daß (für allgemeine Kerne) $J = 0$ ist. Aus (30), (31), (32) und (34) ergibt sich

$$\int_0^1\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda; s, t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\theta^{(\nu)})^2}{\lambda_\nu^2 - \lambda} - \frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta^{(\nu)}}{\lambda_\nu^2 - \lambda}\,\frac{\pi_\nu(a_1)}{A(a_1)}\right)^2}{\varepsilon + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2 - \lambda}\left(\frac{\pi_\nu(a_1)}{A(a_1)}\right)^2}. \tag{35}$$

Wenn nun

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2 - \lambda}\left(\frac{\pi_\nu(a_1)}{A(a_1)}\right)^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\theta^{(\nu)})^2}{\lambda_\nu^2 - \lambda} - \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta^{(\nu)}}{\lambda_\nu^2 - \lambda}\,\frac{\pi_\nu(a_1)}{A(a_1)}\right)^2 \geqq 0 \quad \text{für} \quad \lambda < 0 \tag{36}$$

ist, so folgt auch aus (35)

$$\int_0^1\int_0^1 \mathsf{K}(\lambda; s, t)\,\theta(s)\,\theta(t)\,ds\,dt \geqq 0, \qquad (\lambda < 0), \tag{37}$$

und $\mathsf{K}(\lambda; s, t)$ ist für $\lambda < 0$ vom positiven Typus, wie wir beweisen wollten. Daß die Relation (36) richtig ist, erkennt man sofort; denn es gilt für jedes negative λ:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(a_1)}{A(a_1)\sqrt{\lambda_\nu^2 - \lambda}} \cdot \frac{\pi_\nu(a_1)}{A(a_1)\sqrt{\lambda_\nu^2 - \lambda}} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\theta^{(\nu)}}{\sqrt{\lambda_\nu^2 - \lambda}} \cdot \frac{\theta^{(\nu)}}{\sqrt{\lambda_\nu^2 - \lambda}}$$

$$\geqq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(a_1)}{A(a_1)}\,\frac{\theta^{(\nu)}}{\lambda_\nu^2 - \lambda}\right)^2$$

nach der „Schwarzschen Ungleichung".*) $\mathsf{K}(\lambda;\, s, t)$ muß daher als Funktion vom positiven Typus für alle negativen Werte von λ der Bedingung

$$\mathsf{K}(\lambda;\, s, s) \geqq 0, \qquad (\lambda < 0)$$

genügen $(0 \leqq s \leqq 1)$. Aus (28) und (29) folgt also

$$f(s, s) - \frac{[f(a_1, s)]^2}{\varepsilon} \geqq 0, \qquad (0 \leqq s \leqq 1).$$

Diese Beziehung ist offenbar nur möglich, wenn $f(a_1, s)$ verschwindet, da wir die positive Größe ε beliebig klein wählen können. a_1 und s sind ganz beliebige Werte im Intervalle 0 bis 1, und es muß daher

$$f(s, t) = 0$$

sein für jedes Wertepaar der Variabeln s, t, das den Ungleichungen $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ genügt; somit ist nach (26)

$$K(s, t) = \frac{1}{A(s)\, A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\, \pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2}.$$

Daß die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Reihe absolut konvergiert, haben wir bereits gezeigt; daß sie in dem ganzen Gebiet $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ auch gleichmäßig konvergiert, folgt aus einem Theorem von Dini**), auf Grund dessen die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \left(\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\right)^2,$$

die nur Glieder positiven Vorzeichens hat und gleich einer stetigen Funktion, nämlich $K(s, s)$ ist, gleichmäßig konvergiert. Wegen

$$2 \left| \frac{\pi_\nu(s)}{A(s)} \frac{\pi_\nu(t)}{A(t)} \right| \leqq \left(\frac{\pi_\nu(s)}{A(s)}\right)^2 + \left(\frac{\pi_\nu(t)}{A(t)}\right)^2$$

ergibt sich daher die Richtigkeit des zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochenen Satzes.

§ 4.

Die Summe der reziproken polaren Eigenwerte konvergiert absolut.

Um den letzten in der Einleitung ausgesprochenen Satz zu beweisen, müssen wir uns auf die Hilbertsche Theorie der polaren Integralgleichung stützen, wobei die Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variabeln zur Anwendung kommt, insbesondere der Hauptsatz***):

*) Vgl. oben S. 534.

**) Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali (Pisa 1878), § 99.

***) Hilbert, a. a. O., S. 162.

„Es sei eine positiv definite, vollstetige quadratische Form $K(x)$ und außerdem eine quadratische Form von der Gestalt

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots$$

vorgelegt, wo $v_1, v_2, \cdots$ bestimmte Werte $+1$ oder -1 sind: alsdann gibt es stets eine Reihe von teils positiven oder negativen, teils verschwindenden Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots$, die, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergieren, und von zugehörigen beschränkten Linearformen $\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \cdots$ derart, daß die „Polaritätsrelationen"

$$\Lambda_p(\cdot)\, V(\cdot, \bullet)\, \Lambda_p(\bullet) = \varkappa_p,$$
$$\Lambda_p(\cdot)\, V(\cdot, \bullet)\, \Lambda_q(\bullet) = 0, \qquad (p \neq q)$$

erfüllt sind, und daß ferner die vorgelegte quadratische Form die Darstellung

$$K(x) = (\Lambda_1(x))^2 + (\Lambda_2(x))^2 + \cdots$$

gestattet."

Die Linearformen $\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \cdots$ erhält man auf folgende Weise: die Form $K(x)$ wird durch eine orthogonale Transformation der Variabeln. $x_1, x_2, \cdots$ in die Gestalt einer Quadratsumme:

$$K(x) = k_1 x_1'^2 + k_2 x_2'^2 + \cdots = k_1 (L_1(x))^2 + k_2 (L_2(x))^2 + \cdots \tag{38}$$

gebracht; die nicht negativen Größen $k_1, k_2, \cdots$ konvergieren gegen Null. $V'(x')$ bezeichne die durch jene orthogonale Transformation aus $V(x)$ entstehende quadratische Form der Variabeln $x_1', x_2', \cdots$; setzt man in derselben an Stelle von $x_1', x_2', \cdots$ die Ausdrücke $\sqrt{k_1}\,\xi_1, \sqrt{k_2}\,\xi_2, \cdots$, so werde die dadurch aus $V'(x')$ hervorgehende quadratische Form der Variabeln $\xi_1, \xi_2, \cdots$ mit $V'(\sqrt{k}\,\xi)$ bezeichnet. Man beweist leicht*), daß $V'(\sqrt{k}\,\xi)$ eine vollstetige Form der Variabeln $\xi_1, \xi_2, \cdots$ ist; sie kann also so orthogonal in neue Variabeln transformiert werden, daß sie die Gestalt

$$V'(\sqrt{k}\,\xi) = \varkappa_1 \xi_1'^2 + \varkappa_2 \xi_2'^2 + \cdots$$

erhält; $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots$ sind reelle, teils positive oder negative, teils verschwindende Größen und konvergieren, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null. Es mögen die Formeln

$$\xi_1' = o_{11}\xi_1 + o_{12}\xi_2 + \cdots,$$
$$\xi_2' = o_{21}\xi_1 + o_{22}\xi_2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die zuletzt gebrauchte orthogonale Transformation bezeichnen; die obigen Linearformen $\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \cdots$ sind dann durch

*) Hilbert. a. a. O., S. 157.

$$\begin{aligned}\Lambda_1(x) &= o_{11}\sqrt{k_1}\,L_1(x) + o_{12}\sqrt{k_2}\,L_2(x) + \cdots,\\ \Lambda_2(x) &= o_{21}\sqrt{k_1}\,L_1(x) + o_{22}\sqrt{k_2}\,L_2(x) + \cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned} \tag{39}$$

gegeben. —

Von den quadratischen Formen geht man zu der polaren*) Integralgleichung (1) über, indem man nach dem Vorgange von Hilbert ein polares vollständiges Funktionensystem $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \cdots$ für das Intervall $s=0$ bis $s=1$ benutzt. Die Funktionen $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \cdots$ sind stetig, eventuell stückweise stetig mit endlichvielen Sprungstellen im Intervalle 0 bis 1 und erfüllen die folgenden Eigenschaften:

I. Die Polaritätseigenschaft

$$\int_0^1 A(s)\,\Pi_p(s)\,\Pi_q(s)\,ds = 0, \qquad (p \neq q)$$

$$\int_0^1 A(s)\,(\Pi_p(s))^2 ds = v_p,$$

wobei

$$v_1 = +1,\; v_2 = -1,\; v_3 = +1,\; v_4 = -1,\; v_5 = +1, \cdots$$

gesetzt ist;

II. Die Vollständigkeitsrelation

$$\int_0^1 A(s)\,u(s)\,v(s)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[v_\nu \cdot \int_0^1 A(s)\,u(s)\,\Pi_\nu(s)\,ds \cdot \int_0^1 A(s)\,v(s)\,\Pi_\nu(s)\,ds\right]$$

für jedes Paar stetiger Funktionen $u(s)$, $v(s)$ der Variabeln s.

Das von Hilbert gebrauchte polare vollständige Funktionensystem $\Pi_1(s), \Pi_2(s), \cdots$ ist zugleich auch ein *orthogonales* vollständiges Funktionensystem für das Intervall 0 bis 1**); daher lassen sich die Koeffizienten K_{pq} der quadratischen, positiven definiten Form $K(x)$, die durch

$$K_{pq} = v_p v_q \int_0^1\!\!\int_0^1 A(s)\,A(t)\,K(s,t)\,\Pi_p(s)\,\Pi_q(t)\,ds\,dt$$

gegeben sind, auch als Fourierkoeffizienten von $K(s,t)$ in bezug auf ein orthogonales System auffassen.

---

*) Siehe S. 529, Anm. *). Statt unserer mit $A(s)$ bezeichneten Funktion steht bei Hilbert $\frac{1}{V(s)}$ $(= V(s) = \pm 1)$.

**) Vgl. Hilbert, a. a. O., S. 198 und 177.

Wenden wir den oben angeführten Hauptsatz auf die Form $K(x)$ und die mit alternierenden Vorzeichen gebildete Form

$$V(x) = v_1 x_1^2 + v_2 x_2^2 + \cdots = x_1^2 - x_2^2 + \cdots$$

an, so erhalten wir für $K(x)$ die Darstellung

$$K(x) = (\Lambda_1(x))^2 + (\Lambda_2(x))^2 + \cdots;$$

die Linearformen $\Lambda_1(x), \Lambda_2(x), \cdots$ genügen den Relationen

$$(40) \qquad \begin{aligned} &\Lambda_p(\cdot)\, V(\cdot, \bullet)\, \Lambda_p(\bullet) = \varkappa_p, \\ &\Lambda_p(\cdot)\, V(\cdot, \bullet)\, \Lambda_q(\bullet) = 0, \qquad (p \neq q) \end{aligned}$$

wo die Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots$, wenn in unendlicher Anzahl vorhanden, gegen Null konvergieren. Bezeichnen wir die reziproken Werte der von Null verschiedenen Größen $\varkappa_p$ mit λ_p $(p = 1, 2, \cdots)$, so sind nach Hilbert die Größen λ_p die Eigenwerte der polaren Integralgleichung (1). Nach (39) ist

$$\Lambda_p(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} o_{p\nu} \sqrt{k_\nu}\, L_\nu(x) = \sum_{\nu, q=1}^{\infty} o_{p\nu} \sqrt{k_\nu}\, l_{\nu q}\, x_q,$$

wenn

$$L_\nu(x) = \sum_{q=1}^{\infty} l_{\nu q}\, x_q$$

gesetzt wird; wegen (40) ist

$$\varkappa_p = \sum_{q=1}^{\infty} v_q \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} o_{p\nu} \sqrt{k_\nu}\, l_{\nu q} \right)^2,$$

also

$$|\varkappa_p| \leqq \sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} o_{p\nu} \sqrt{k_\nu}\, l_{\nu q} \right)^2.$$

Da die Linearformen $L_\nu(x)$ mit den Koeffizienten $l_{\nu q}$ ein vollständiges Orthogonalsystem*) bilden, ist

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} o_{p\nu} \sqrt{k_\nu}\, l_{\nu q} \right)^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} o_{p\nu}^2 k_\nu,$$

und daher

$$|\varkappa_p| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} o_{p\nu}^2 k_\nu,$$

$$\sum_{p=1}^{m} |\varkappa_p| \leqq \sum_{p=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{\infty} o_{p\nu}^2 k_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu \sum_{p=1}^{m} o_{p\nu}^2.$$

*) Siehe Hilbert, a. a. O., S. V.

Da man nun die Form $K(x)$ aus $K(s, t)$ durch Vermittlung eines *orthogonalen* vollständigen Funktionensystems entstanden ansehen kann, so sind die (nicht negativen) Größen k_ν, soweit sie von Null verschieden sind, nichts anderes als die reziproken orthogonalen Eigenwerte $\frac{1}{\lambda'_\nu}$ des Kernes $K(s, t)$ (vgl. (38) und Hilbert, a. a. O., S. 186 ff.). Weil $K(s, t)$ vom positiven Typus ist, so konvergiert nach Mercer die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda'_\nu},$$

und wir erhalten

$$\sum_{p=1}^{m} |\varkappa_p| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu, \tag{41}$$

da

$$\sum_{p=1}^{m} o_{p\nu}^2 \leqq 1$$

ist (die $o_{p\nu}$ sind ja die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation). Aus (41) folgt, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\varkappa_\nu| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_\nu|} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda'_\nu} \tag{42}$$

ist, w. z. b. w.

Die polaren Eigenwerte λ_ν sind die Nullstellen der Fredholmschen Determinante $\delta(\lambda)$ des Kernes

$$H(s, t) = A(s) K(s, t).$$

Da diese bekanntlich höchstens das Laguerresche Geschlecht 2 besitzt, gestattet sie wegen (42) die Darstellung

$$\delta(\lambda) = e^{a\lambda + b\lambda^2} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}\right).$$

Vergleicht man diese Formel mit der für genügend kleine λ konvergenten Fredholmschen Entwicklung

$$\frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} = -H_1 - H_2 \lambda - \cdots - H_{n+1} \lambda^n - \cdots,$$

$$H_n = \int_0^1 H_n(s, s)\, ds,$$

wo $H_n(s,t)$ der n^{te} iterierte Kern von $H(s,t)$ ist, so folgt

$$a - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu} = -H_1,$$

$$2b - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2} = -H_2.$$

Nach § 1 ist

$$H_2(s,t) = A(s)\int_0^1 K(s,r)\,A(r)\,K(r,t)\,dr = \frac{1}{A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu^2},$$

$$H_2 = \int_0^1 H_2(s,s)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu^2},$$

$$b = 0.$$

Für einen *allgemeinen* Kern $K(s,t)$ gilt (24)

$$H(s,t) = A(s)\,K(s,t) = \frac{1}{A(t)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi_\nu(s)\,\pi_\nu(t)}{\lambda_\nu},$$

$$H_1 = \int_0^1 H(s,s)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\nu},$$

$$a = 0.$$

Damit ist die zum Schlusse der Einleitung aufgestellte Behauptung bewiesen.

Einleitung in die Theorie der Elementarflächen dritter Ordnung.

Von

C. Juel in Kopenhagen.

Inhalt.

Vorwort.

Die Lehre von den algebraischen Flächen dritten Grades hat sich seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts teils an der Hand der Theorie der auf den Flächen liegenden Geraden, teils mittels der Polarentheorie entwickelt. Während die letztgenannte Theorie an das algebraische Gebiet gebunden scheint, beabsichtige ich in der vorliegenden Arbeit nachzuweisen, daß die Theorie der Geraden, von der algebraischen Grundlage, auf der sie aufgewachsen, unabhängig ist.

Nachdem ich in § 1 die Flächen, die im folgenden behandelt werden, charakterisiert habe, betrachte ich in § 2 das Auftreten der einfachsten Singularitäten der ebenen Schnitte und der Umrisse dieser Flächen. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die angegebenen Resultate auch für jeden allgemeinen Punkt einer beliebigen Elementarfläche gültig bleiben. Alle Schlüsse beruhen nämlich auf Paritätsbestimmungen und jede Elementarfläche ist ihrer Definition zufolge endlicher Ordnung; ein allgemeiner Punkt ist aber ein Punkt der Fläche, für welchen keine Tangente mehr als drei

mit dem Berührungspunkte zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein hat.*)

Nachdem in § 3 die Existenz einer einzelnen Gerade der Fläche nachgewiesen worden ist, findet sich in § 4 der Hauptsatz der ganzen Theorie, nämlich daß jede allgemeine Elementarfläche immer drei in einer Ebene liegende Gerade enthält. Darauf fußend wird in § 6 bewiesen, daß die Fläche entweder 3, 7, 15 oder 27 Gerade enthält; dies geschieht durch eine schrittweise fortgehende Diskussion der Umrisse der Fläche.

Es kann übrigens kaum bezweifelt werden, daß die Sätze in den §§ 3, 4 und 5 verschiedene Gültigkeitsbereiche haben. So wird man mit größter Wahrscheinlichkeit finden, daß der Satz in § 3 nicht nur für Elementarflächen und der Satz in § 4 nicht nur für allgemeine Elementarflächen gültig sind, während die allgemeine Gültigkeit der Sätze in § 6 eine „allgemeine Elementarfläche dritter Ordnung" voraussetzen wird.

Mein Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen war der Beweis in § 5, der nach einer kleinen Änderung wesentlich mit der bekannten Salmonschen Konstruktion der 27 Geraden zusammenfällt. Das Hauptmittel der Untersuchung ist aber die Betrachtung des Umrisses der Fläche aus einem Punkte desselben auf eine Ebene. Für algebraische Flächen ist diese Methode seit Geisers Arbeit: „Über die Doppeltangenten einer ebenen Kurve vierten Grades" in Bd. 1 der Math. Annalen sehr bekannt. Um sie aber auf nicht-algebraische Flächen anwenden zu können, waren einige Sätze über ebene Elementarkurven vierter Ordnung notwendig, die ich in einer vorstehenden Note: „Einige Sätze über Elementarkurven vierter Ordnung" gesammelt habe.**)

Die Beweise habe ich, wie man sehen wird, überall so zu führen versucht, daß die Schlüsse auch für nicht-analytische Flächen gültig bleiben. Man kann dieses Bestreben vielleicht etwas verfrüht nennen, denn man hat in der Tat bis jetzt keine nicht-analytische allgemeine Elementarfläche dritter Ordnung wirklich hergestellt. Weil sich aber doch in dieser Richtung gewisse Anfänge vorfinden — nicht-analytische Flächen zweiter Ordnung sind mehrmals bemerkt, konstruktive Bestimmungen von gewissen nicht-analytischen Regelflächen dritter Ordnung oder auch von gewissen Umdrehungsflächen habe ich anderswo gegeben —, so darf man sich doch denken, daß man in absehbarer Zeit auch nicht-analytische Elementarflächen dritter Ordnung wird konstruieren lernen.***)

*) Vgl. die Note: „Über Elementarflächen", Jahresb. d. deutschen Math.-Vereinigung 22, S. 345 (Vortrag auf der Jahresversammlung in Wien 1913).

**) Diese Ztschr. Bd. 76, S. 343—353. Ich zitiere diese Arbeit als „Sätze".

***) Daß solche Flächen überhaupt vorhanden sind, ist aber selbstverständlich, weil man nur einer algebraischen Fläche dritten Grades eine passend kleine Deformation zu geben braucht, um sie zu gewinnen.

Die einzigen Flächen dritter Ordnung, deren Theorie ich in der vorliegenden Arbeit zu einem gewissen Abschluß bringe, sind jene Elementarflächen, die keine Doppelpunkte und keine zusammenfallende und keine „singuläre" Gerade enthalten — ich nenne sie allgemeine Elementarflächen dritter Ordnung. Soweit ich sehe, reicht die Betrachtung der Umrisse auch für die ausgelassenen Fälle aus, aber alle Möglichkeiten so mitzunehmen, wird zu großen Weitläufigkeiten führen. Es wird dies wohl auch nicht der richtige Weg sein. Die Bestrebungen müssen vielmehr darauf gerichtet werden, eine Theorie der Nachbarflächen aufzustellen, wodurch man eine besondere Fläche in eine benachbarte allgemeine überführen kann. Für die algebraischen Flächen ist dies schon von Hrn. F. Klein ausgeführt.*) Wenn man aber das Gebiet der algebraischen Flächen dritten Grades verläßt, dann treten dem Problem der Nachbarflächen besondere Schwierigkeiten entgegen, von denen man in § 7 nur wenige gelöst finden wird. Hiermit steht auch in Verbindung, daß ich nicht neue Flächen mit 27 Geraden habe finden können, sondern nur Flächen mit drei oder sieben Geraden; diese sind Flächen beliebig hohen unpaaren Grades oder jedenfalls analytische Flächen.**)

Der letzte Abschnitt ordnet die Stellung der Flächen dritten Grades in das Gebiet der analytischen Flächen dritter Ordnung ein, nämlich durch den Satz, daß eine analytische, überall reguläre Fläche, welche höchstens sechs Punkte mit einer nicht auf der Fläche liegenden Kurve zweiter Ordnung gemein hat, notwendigerweise algebraisch sein muß. Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, daß die Fläche wenigstens eine „allgemeine" Gerade enthält.

Ich habe im obigen kein Hehl daraus gemacht, daß viele hierher gehörige und teilweise sehr naheliegende Fragen noch ihrer Beantwortung harren. Es ist aber zu hoffen, daß das Interesse, das sich in diesem Jahrhundert wieder den interessanten algebraischen Flächen dritten Grades zuzuwenden scheint, nicht ganz die Elementarflächen dritter Ordnung bei Seite liegen lassen wird.

§ 1.

Voraussetzungen und einleitende Sätze.

Jede hier in Betracht kommende Fläche F^{III} ist erstens eine stetige geschlossene Fläche, welche von jeder Ebene in einer Kurve dritter Ordnung geschnitten wird. Die Fläche soll zweitens in jedem Punkte eine

*) Siehe F. Klein: Über Flächen dritter Ordnung, Math. Ann. 6, S. 551; siehe auch V. H. Blythe: On Models of cubic surfaces (Cambridge 1905).

**) Die Ergebnislosigkeit meiner Bestrebungen, eine neue analytische Fläche mit 27 Geraden zu finden, möchte mich zu der Hypothese verleiten, daß eine solche nur entweder als algebraische Fläche dritten Grades oder auch als nicht-analytische Fläche existiert; ich habe aber auch keine stichhaltigen Gründe für die Hypothese finden können.

mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde berührende Ebene haben und kein ebenes Flächenstück enthalten. Wesentlich ist es ferner, daß wir die Fläche als eine *Elementarfläche* voraussetzen, d. h. es soll nicht nur jede ebene Schnittkurve, sondern auch jeder geometrische Umriß der Fläche von einem beliebigen Punkte des Raumes aus eine Elementarkurve ohne Winkelpunkte und ohne geradlinige Segmente sein; eine Elementarkurve ist aber eine Kurve, von der jeder Zweig aus einer endlichen Zahl von Konvexbögen zusammengesetzt ist.

Eine Fläche dritter Ordnung kann zwei getrennte Schalen haben, deren eine ein projektives Ovaloid ist. Dieses lassen wir, auch wenn es vorhanden ist, weg, so daß in unseren Betrachtungen nur eine unpaare Schale in Betracht kommt.

Weil auch eine berührende Ebene μ in einer Kurve dritter Ordnung γ schneidet, kann eine in μ liegende und durch den Berührungspunkt M gehende Gerade außerhalb M höchstens einen Punkt N mit γ gemein haben. Es muß deshalb M entweder ein eigentlicher Doppelpunkt oder eine Spitze von γ oder auch ein außerhalb γ liegender Punkt der Art sein, daß jede durch M gehende Gerade nur einen Punkt mit γ gemein hat. Einen solchen Punkt nennen wir einen *uneigentlichen Doppelpunkt*. Den genannten Fällen entsprechend wird M ein hyperbolischer, ein parabolischer oder ein elliptischer Punkt der Fläche genannt. Die Tangenten des Doppelpunktes nennt man die *Haupttangenten* der Fläche in M. Zerfällt γ in eine Gerade und ein Oval, so ist wieder M entweder hyperbolisch oder parabolisch. Das letztere ist der Fall, entweder wenn das Oval $\varkappa$ die Gerade a berührt oder wenn $\varkappa$ ein auf a liegendes Punktoval ist oder wenn $\varkappa$ sich in zwei durch M gehende Gerade auflöst.

Unsere Aufgabe im folgenden ist besonders die Untersuchung der Geraden der Fläche. Wir setzen hierbei voraus, daß die Fläche *keine Regelfläche* ist, und ferner, daß sie *keine zusammenfallende Gerade* hat. Darunter verstehen wir folgendes: Vier verschiedene Tangenten, welche die Fläche in vier Punkten einer Geraden a berühren, dürfen erstens nicht in einer Ebene liegen, und wenn sie das nicht tun, darf die zweite Gerade, welche im allgemeinen außer a die Tangenten schneidet, nicht mit a zusammenfallen.

Legt man durch eine Gerade a der Fläche F^{III} eine beliebige Ebene μ, so hat diese außerhalb a entweder keine Punkte mit der Fläche gemein oder sie schneidet dieselbe noch in einer Kurve zweiter Ordnung. Diese kann sich in zwei Geraden auflösen oder auch ein Punktoval sein, in welchen beiden Fällen wir die Ebene eine dreifach berührende Ebene nennen. Wenn wir aber im folgenden ausdrücklich sagen, daß eine durch a gehende Ebene noch in einer Kurve zweiter Ordnung schneidet, werden

wir, wenn nicht anderes ausdrücklich bemerkt, dabei das Punktoval *nicht* mit einschließen.

Ist M ein Punkt der Geraden a, μ die in a berührende Ebene, dann geht μ durch a, und die Kurve α zweiter Ordnung, in der μ die Fläche noch schneidet, hat außer M noch einen Punkt N mit a gemein, der aber auch mit M zusammenfallen kann. Es wäre möglich, daß M und N überall zusammenfallen; wir setzen aber noch voraus — und dies ist unsere *letzte Voraussetzung* —, daß solche „singuläre Gerade" nicht vorkommen.

Jedem Punkte M entspricht ein und nur ein Punkt N, denn erstens hat die Fläche in jedem Punkte nur eine berührende Ebene und zweitens kann die Kurve α, in der eine Ebene μ die Fläche außer in a noch schneidet, nicht außer M zwei (getrennte oder zusammenfallende) Punkte mit a gemein haben, ohne in a und noch eine Gerade zu zerfallen; dann würde aber jede in μ liegende Gerade eine Tangente der Fläche sein, was unseren Voraussetzungen widerspricht. Aber auch jedem Punkte N entspricht ein und nur ein Punkt M, denn μ muß auch in N eine berührende Ebene sein.

Die Abhängigkeit MN ist also umkehrbar eindeutig und zugleich involutorisch. Weil ferner den Voraussetzungen nach die Abhängigkeit zwischen M und μ gegenseitig stetig ist, wird auch die Abhängigkeit MN stetig sein. Aus der Ein-ein-Deutigkeit und Stetigkeit folgt offenbar, daß N sich in einem bestimmten Sinne bewegt, wenn M es tut, und umgekehrt.

Wenn nun M und N sich in demselben Sinne bewegen, dann können sie nie zusammenfallen. Fielen nämlich M und N in E zusammen, dann müßten EMN und ENM denselben Sinn bestimmen, was sich widerspricht.

Wenn aber M und N sich nicht in demselben Sinne bewegen, dann sieht man, daß M und N zweimal und in getrennten Punkten zusammenfallen werden und daß diese Punkte R_1 und R_2 immer zwei zusammengehörige Punkte M und N voneinander trennen. Die in R_1 und R_2 berührenden Ebenen ϱ_1 und ϱ_2 müssen auch getrennt sein, weil das Paar $R_1 R_2$ nicht mit einem Paar MN zusammenfallen kann.

Hat die Gerade a keine parabolischen Punkte, so wird jede durch a gehende Ebene μ die Fläche noch in einer Kurve α zweiter Ordnung schneiden. Weil nämlich keine Kurve α mit a zusammenfallende Punkte gemein hat, muß entweder jede oder auch keine durch a gehende Ebene μ die Fläche in einer Kurve schneiden, die mit a Punkte gemein hat; die letztere Möglichkeit ist aber ausgeschlossen, weil dann a nicht auf der Fläche liegen würde.

Wenn aber a zwei parabolische Punkte R_1 und R_2 hat, so braucht nicht jede durch a gehende Ebene in einer Kurve α zu schneiden, die Punkte mit a gemein hat. Um dies zu untersuchen, betrachten wir die in einem Punkte berührende Ebene μ, wenn M der Geraden a entlang in einem bestimmten Sinne von R_1 über einen Punkt Q nach R_2 läuft. Man sieht dann, daß μ sich in einem bestimmten Drehsinne um a drehen muß, weil man sonst eine Ebene μ finden könnte, die in zwei auf dem Geradenstück $R_1 Q R_2$ liegenden Punkten berühren würde, während nach dem früheren zusammengehörige Punkte M und N durch R_1 und R_2 getrennt sein sollen.

Geht aber M immer in demselben Sinne laufend über R_2 weiter, dann muß der Drehsinn μ sich umkehren, denn wenn M von R_2 nach R_1 nicht über Q geht, dann wird N von R_2 nach R_1 über Q gehen und zwei zusammengehörige Punkte M und N haben dieselbe berührende Ebene.

Es folgt hieraus, daß die Ebenen in dem einen durch ϱ_1 und ϱ bestimmten Winkelraume die Fläche in Kurven α schneiden, die Punkte mit a gemein haben, während die Ebenen des anderen durch ϱ_2 und ϱ begrenzten Winkelraumes entweder außerhalb a keinen Punkt mit der Fläche gemein haben oder auch in Kurven α schneiden, die keinen Punkt mit a gemein haben. Schnittkurven der letzteren Art sind jedenfalls vorhanden.

Die im folgenden aufzustellenden Sätze gelten für die hier charakterisierten Flächen, die man *allgemeine Elementarflächen dritter Ordnung* nennen kann. Dieselben sind einschalige Elementarflächen dritter Ordnung ohne Doppelpunkte und Doppelkurven (Spitzkurven eingeschlossen), welche sowohl als Punkt- wie als Ebenengebilde stetig sind. Ferner sollen sie nicht unendlich viele Gerade enthalten und unter den Geraden der Fläche sind zusammenfallende sowie auch singuläre Gerade ausgeschlossen.

§ 2.

Allgemeine Sätze über die Umrisse einer Elementarfläche dritter Ordnung.

Man erhält in bekannter Weise die Punkte des Umrisses einer Fläche aus einem Punkte P, indem man durch P eine beliebige Ebene μ legt und aus P an die Schnittkurve σ von μ mit der Fläche die berührende Gerade zieht. Ist die Fläche dritter Ordnung, dann gehen wie bekannt aus P an σ entweder sechs oder vier oder auch keine Tangenten. Ist die Fläche also eine Elementarfläche, so wird der Umriß eine Elementarkurve sechster oder vierter oder zweiter Ordnung sein, insofern sie überhaupt vorhanden ist, was in jedem Falle besonders untersucht werden muß.

Ehe wir die singulären Punkte des Umrisses untersuchen, betrachten

wir erst das Auftreten von singulären Punkten auf den ebenen Schnittkurven der Fläche, wobei wir uns erinnern müssen, daß die Fläche F keine Doppelpunkte (im weiteren Sinn) haben soll.

Ein Doppelpunkt M kann auf einer ebenen Schnittkurve σ nur dann auftreten, wenn die Ebene μ von σ die Fläche in M berührt. Jede durch M gehende und in μ liegende Gerade l hat nämlich in diesem Falle höchstens einen außerhalb M liegenden Punkt mit F gemein, so daß l in M die Fläche berühren muß. Die Tangenten an σ in M nennt man, wie bemerkt, die Haupttangenten in M, einen Punkt der Fläche mit zwei Haupttangenten — also einen hyperbolischen Punkt — nennen wir einen *allgemeinen* hyperbolischen Punkt, wenn er nicht auf einer Geraden der Fläche liegt. Eine Haupttangente, die nicht ganz auf der Fläche liegt, nennen wir eine *allgemeine* Haupttangente.

Eine *Spitze* kann σ nur dann haben, wenn ihre Ebene die Fläche in einem nicht auf einer Geraden der Fläche liegenden Punkte mit zusammenfallenden Haupttangenten — wir sagen in einem *allgemeinen* parabolischen Punkte — berührt. Dies sieht man ganz wie oben.

Hat σ einen *Inflexionspunkt* in M, dann hat die σ in M berührende Gerade m keinen Punkt außerhalb M mit σ und also auch mit F gemein. Es muß deshalb m eine allgemeine Haupttangente in M sein.

Ist umgekehrt m eine in einem Punkte M berührende allgemeine Haupttangente, so wird eine durch m gehende, aber nicht in M berührende Ebene μ die Fläche in einer Kurve σ schneiden, die in M einen Inflexionspunkt hat. Es hat nämlich m außerhalb M keinen Punkt mit F und also auch mit σ gemein, und M muß deshalb entweder eine Spitze oder auch ein Inflexionspunkt sein; das erstere ist aber, wie wir oben sahen, in diesem Falle nicht möglich.

Wir gehen jetzt zu den Umrissen ω über und fragen, wann ω im Bilde M_1 eines Punktes M einen Inflexionspunkt haben kann. Das Projektionszentrum P sei von M verschieden und es liege der letztere Punkt nicht auf einer Geraden der Fläche. Es ist nun, wie oben gesagt, ω eine paare Kurve, so daß in diesem Falle die ω in M_1 berührende Gerade m_1 außerhalb M_1 eine unpaare Zahl von Punkten mit ω gemein haben muß. Aus P geht deshalb an die Schnittkurve γ von F mit der Ebene (Pm_1) eine unpaare Zahl von (von PM_1 verschiedenen) Tangenten, und es muß deshalb entweder γ eine Kurve dritter Ordnung mit einer Spitze sein oder auch P muß auf einer der in M berührenden Tangenten an γ liegen — daß γ nicht einen uneigentlichen Doppelpunkt in M haben kann, ist einleuchtend. Legt man aber durch PM eine allgemeine von μ verchiedene Ebene μ_1, so muß in dem hier betrachteten Falle aus P an die Schnittkurve γ_1 von F mit μ_1, außer PM eine unpaare Zahl von Tangenten gehen.

Deshalb kann P nicht auf der Wendetangente einer allgemeinen Kurve dritter Ordnung liegen, und es bleibt nur die Möglichkeit, daß die obige Schnittkurve γ in M eine Spitze hat, auf deren Tangente P nicht liegt. Ist M ein auf einer Geraden a liegender parabolischer Punkt, so kann das Bild M_1 von M kein Inflexionspunkt sein, weil das Bild von a eine paare Zahl von Punkten mit ω gemein haben würde.

Weil die Schlüsse auch in umgekehrter Ordnung genommen werden können, hat man:

Der Umriß einer F^{III} aus einem Punkte P hat im Bilde M_1 eines von M verschiedenen Punktes M dann und nur dann einen Inflexionspunkt, wenn M ein allgemeiner parabolischer Punkt ist, auf dessen Tangente P nicht liegt.

Denken wir uns nun das Bild M_1 von M sei eine Dornspitze. Weil auch hier die ω in M_1 berührende Gerade außerhalb M_1 eine unpaare Zahl von Punkten mit ω gemein hat, muß wieder die in M berührende Ebene μ die Fläche entweder in einer Kurve γ mit Spitze schneiden oder es muß auch P auf einer Doppelpunktstangente von γ in M liegen. Hier ist aber die erstere Möglichkeit auszuschließen. Eine beliebige von μ verschiedene durch PM gehende Ebene muß hier nämlich in einer Kurve γ_1 schneiden, an die durch P außer PM noch eine paare Zahl von Tangenten geht; das ist nicht möglich, wenn γ_1 eine Spitze hat — und P nicht auf der Tangente in M liegt, ein Fall, den wir hier ausschließen. Man hat also:

Der Umriß ω kann im Bilde M_1 eines von P verschiedenen Punktes M dann und nur dann eine Dornspitze haben, wenn P in einer Haupttangente von M liegt (den Fall, daß M ein parabolischer Punkt ist, ausgeschlossen; und ebenso den, daß P auf einer durch M gehenden Gerade der Fläche liegt).

Der Umriß kann ferner keinen *Doppelpunkt* haben, wenn P nicht auf einer Geraden der Fläche liegt, denn eine Gerade kann nicht zweimal die Fläche berühren, ohne ganz auf der Fläche zu liegen.

Aus demselben Grund muß eine *Doppeltangente* a_1 des Umrisses das Bild einer Geraden a der Fläche sein. Die Ebene (Pa) schneidet dann F außer in a noch in einer Kurve zweiter Ordnung $\varkappa$, und die Bilder der Punkte, die $\varkappa$ mit a gemein hat, sind die Berührungspunkte von a_1 mit ω. Man sieht hieraus zugleich, daß nicht das Bild a_1 jeder Geraden der Fläche eine Doppeltangente von ω wird, und zugleich die *wesentliche* Tatsache, *daß a_1, wenn sie keine Doppeltangente ist und wenn P auf F liegt, dann keinen Punkt mit ω gemein haben kann.*

Die Wendepunkte und Spitzen des Umrisses sind jedenfalls nur in endlicher Zahl vorhanden, weil ω eine Elementarkurve ist. Ist das Bild M_1

von M keine Spitze und kein Inflexionspunkt, dann ist es ein gewöhnlicher Punkt, d. h. ein innerer Punkt eines Konvexbogens. Ist also PN eine PM naheliegende, aber nicht in der in M berührenden Ebene μ liegende Gerade, dann gehen durch PN entweder keine oder auch zwei μ naheliegende, F berührende Ebenen.

Im folgenden kommt durchgehend nur der Umriß ω aus einem Punkt P der Fläche selbst in Betracht. Es ist dann leicht zu sehen, daß Schnabelspitzen nicht vorkommen können. Aber weil eine Haupttangente außerhalb des Berührungspunktes keinen Punkt mit der Fläche gemein hat, sind Dornspitzen auch nicht vorhanden. Der Fall, daß P mit M zusammenfällt, bleibt freilich besonders zu betrachten, was wir jetzt tun werden. Es sei in diesem Falle erstens P ein elliptischer Punkt, dann ist P für die Schnittkurve γ von F mit der in P berührenden Ebene π ein uneigentlicher Doppelpunkt, und aus P geht keine Tangente an γ. Die Spur von π in der Bildebene ist also eine Gerade, die mit ω keinen Punkt gemein hat. Ist aber P ein allgemeiner hyperbolischer Punkt, dann ist es leicht nachzuweisen, daß die Spur p von π eine Doppeltangente von ω wird, deren Berührungspunkte T_1 und T_2 die Spuren der beiden in P berührenden Haupttangenten t_1 und t_2 sind. Legt man nämlich durch t_1 eine beliebige von π verschiedene Ebene, so erhält man als Schnittkurve mit F^{III} eine Kurve γ dritter Ordnung, die in P einen Inflexionspunkt hat. Jede in der Bildebene liegende, von p verschiedene und durch T_1 gehende Gerade hat deshalb außerhalb T_1 eine unpaare Zahl von Punkten mit ω gemein. Weil ω paar ist, muß T_1 deshalb auf ω liegen und daselbst entweder ein gewöhnlicher Kurvenpunkt oder auch ein Inflexionspunkt sein. Nur für die Gerade p selbst weiß man nicht, ob sie außerhalb T_1 eine paare oder eine unpaare Zahl von Punkten mit ω gemein hat. Weil aber ω auch in T_1 eine Tangente haben soll, kann dies keine andere als p sein. Ebenso sieht man, daß p auch in T_2 eine Tangente an ω ist; p ist also eine Doppeltangente an ω.*)

Liegt P auf einer Geraden oder Fläche, dann sieht man, indem man durch a Schnittebenen legt, daß die Spur A von a ein uneigentlicher Doppelpunkt ist, wenn a keine parabolischen Punkte hat. Hat sie aber solche und ist P kein parabolischer Punkt, dann ist P ein gewöhnlicher Doppelpunkt von ω, deren Tangenten die Spuren der in den parabolischen Punkten von a berührenden Ebenen sind. Eine Tangente in A wird eine Wendetangente, wenn eine der genannten berührenden Ebenen in zwei Geraden oder auch in einem Punktoval schneidet. Die Spur der in P

*) Daß T_1 und T_2 nicht beide Inflexionspunkte von ω sein können, kann man direkt auch durch Betrachtung des Umrisses schließen.

berührenden Ebene ist eine aus A an ω gehende berührende Gerade, die in der Spur der anderen in P berührenden Haupttangente berührt.

Wir sind im obigen ohne weiteres davon ausgegangen, daß der Umriß ω vorhanden ist. Es ist dies nicht notwendig, wenn P ein elliptischer Punkt der Fläche ist. Wenn aber P ein allgemeiner hyperbolischer Punkt ist, dann existiert der Umriß sicher. Man sieht dies, indem man durch eine in P berührende Haupttangente Schnittebenen legt, denn aus einem Inflexionspunkte P einer Kurve γ dritter Ordnung gehen sicher Tangenten, die γ außerhalb P berühren.

Dies bleibt noch richtig, wenn P ein nicht parabolischer Punkt einer Geraden a der Fläche ist, denn durch P geht dann auch eine allgemeine Haupttangente, den Fall ausgenommen, wo P ein Schnittpunkt zweier Geraden a und b der Fläche ist. Hat aber wenigstens die eine dieser Geraden z. B. a zwei parabolische Punkte, dann gehen wie in § 1 Seite 553 angegeben, durch a Ebenen, welche F in Kurven zweiter Ordnung schneiden, die keine Punkte mit a gemein haben. An diese Kurven gehen Tangenten aus P, und der Umriß ist also vorhanden. Noch unerledigt ist nur der Fall, daß beide durch P gehende Gerade a und b ohne parabolische Punkte sind. Die Ebene (ab) schneidet dann F außer in a und b noch in einer Geraden c. Wir können davon ausgehen, daß diese drei Gerade nicht durch denselben Punkt gehen, denn sonst würde sich auf a noch ein parabolischer Punkt vorfinden, so daß wir auf den früheren Fall zurückkommen. Legt man durch a Ebenen, so schneiden dieselben F in Kurven $\varkappa$ zweiter Ordnung, deren Schnittpunkte N mit a eine Reihe von Punktepaaren bilden, die einander trennen (siehe § 1 Seite 552). Weil (ab) und (ac) ein solches Paar ist, gibt es Kurven γ, an denen man entweder aus (ab) oder aus (ac) Tangenten ziehen kann. Es gelte dies z. B. für (ac), so daß ein Umriß ω_1 aus $Q=(ac)$ vorhanden ist. Für diesen Umriß sind die Spuren A und C von a und c zwei uneigentliche Doppelpunkte; infolge der *„Sätze“* (§ 2, Nr. 11), gehen dann durch A wenigstens zwei Tangenten an ω_1, welche außerhalb A berühren. Deshalb gehen durch die Gerade a wenigstens zwei Ebenen, welche F außerhalb a in zwei Punkten R und S berühren. Aber dann müssen auch die Geraden PR und PS bzw. in R und in S berühren, d. h. der Umriß ω aus P enthält jedenfalls die Bilder R_1 und S_1 der Punkte R und S und hat in diesen Punkten bestimmte Tangenten. Die als Elementarkurve vorausgesetzte Kurve ω hat also jedenfalls zwei Bögen, die durch R_1 und S_1 gehen, und muß also vorhanden sein.

§ 3.

Jede allgemeine Elementarfläche dritter Ordnung enthält wenigstens eine Gerade.

Wir bilden den Umriß ω der Fläche aus einen allgemeinen hyperbolischen Punkte P, in welchem Fall der Umriß sicher existiert; einen hyperbolischen Punkt hat man jedenfalls in dem Inflexionspunkte eines ebenen Schnittes. Indem wir davon ausgehen, daß ω keinen Doppelpunkt hat — sonst würde durch P eine Gerade der Fläche gehen —, kann ω nur paare Zweige haben.

Denken wir uns zuerst, daß die Fläche keine parabolischen Punkte hat. Dann hat ω nicht nur keine Doppelpunkte und Spitzen sondern auch keine Inflexionspunkte. Enthält nun die Fläche keine Gerade, dann hat ω außer der Spur p der in P berührenden Ebene auch keine Doppeltangente. Die Gerade p kann nicht denselben Zweig von ω zweimal berühren, denn der durch die Berührungspunkte bestimmte innere Bogen würde zwei Inflexionspunkte geben.*) Es ist also ω aus projektiven Ovalen zusammengesetzt, von welchen zwei die Gerade p berühren. Darin liegt aber ein Widerspruch, denn zwei Kurven zweiter Ordnung, welche einander nicht schneiden, haben entweder keine oder vier Tangenten miteinander gemein.

Denken wir uns nun, daß die Fläche einen parabolischen Punkt A enthält. Die in A berührende Ebene schneidet F^{III} in einer Kurve dritter Ordnung mit Spitze, die einen Inflexionspunkt P hat: Aus diesen Punkt bilden wir wieder den Umriß ω der Fläche.**) Enthält nun die Fläche keine Gerade, so kann ω keine andere Doppeltangente haben als die Spur p der in P berührenden Ebene. Berührt diese aber zwei getrennte Zweige $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ von ω, dann hat man wieder denselben Widerspruch wie oben, denn $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ schneiden einander nicht.

Es könnte aber p auch einen Zweig $\varkappa$ zweimal berühren, und dann auf diesem einen inneren Bogen bestimmen, der zwei Inflexionspunkte hat. Aber keine von diesen kann das Bild A_1 von A sein, denn die Tangente in A_1 an ω geht der Konstruktion zufolge durch einen Endpunkt des genannten inneren Bogens, was nicht möglich ist, wenn A_1 diesem Bogen angehört.***) Es muß deshalb entweder $\varkappa$ einen neuen Inflexionspunkt haben; oder es muß sich ein anderer Zweig vorfinden, der nicht zweiter und also vierter Ordnung ist. In beiden Fällen muß wenigstens ein neuer

*) Siehe: „Sätze“ § 2 (3).

**) Siehe: „Sätze“ § 2 (5).

***) Siehe: „Sätze“ § 2, Bemerkung zu (3).

innerer Bogen auf einem Zweig von ω vorkommen; und also auch eine von t verschiedene Doppeltangente.

Jede allgemeine Elementarfläche dritter Ordnung enthält also wenigstens eine Gerade.

Es liegt nahe anstatt des obigen Beweises einen anderen zu führen, der einem der für die algebraischen Flächen üblichen ganz analog ist.

Man betrachte zuerst die Regelfläche, welche durch zwei Gerade l_1 und l_2 und eine ebene Elementarkurve α_1 als Leitlinien bestimmt ist; l_1 und l_2 dürfen nicht in der Ebene von α_1 liegen und nicht einander, dagegen wohl α_1 schneiden: im letztgenannten Falle sorge man nur, alle Teile der Regelfläche mit zu berücksichtigen. Die Fläche schneidet eine Gerade l_3 allgemeiner Lage in einer paaren Zahl von Punkten, weil die durch l_1, l_2, l_3 bestimmte Regelfläche eine paare Zahl von Punkten mit α_1 gemein hat. Durch Fortsetzung sieht man sogleich, daß die Regelfläche, die durch drei Elementarkurven $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ als Leitlinien bestimmt ist, paar sein muß, wenn sie existiert, und wenn alle ihre Teile mitgerechnet werden.

Wir wählen nun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ als drei ebene Schnittkurven unserer Fläche, die nicht durch denselben Punkt gehen. Hier kommt offenbar eine unpaare Zahl von Kegelflächen dritter Ordnung in Abrechnung. Als Rest bleibt eine Regelfläche ϱ unpaarer Ordnung, die sicher existiert, und deren Erzeugende $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in getrennten Punkten schneiden. Die Fläche ϱ schneidet eine vierte ebene Schnittkurve α_4 von F^{III} in einer unpaaren Zahl von Punkten; aber es wird nicht jede durch einen solchen Schnittpunkt gehende Erzeugende vier getrennte Punkte mit F^{III} gemein haben. Es sei z. B. P ein Schnittpunkt von α_4 mit α_1. Durch P geht eine unpaare Zahl von Geraden, die α_2 und α_3 schneiden. Aber von diesen sind schon einige früher abgerechnet, nämlich diejenigen, die zugleich durch die Schnittpunkte von α_2 mit α_3 gehen, und die Zahl dieser Geraden ist auch unpaar. Außer diesen Geraden gehen also durch P eine paare Zahl von Geraden, welche F^{III} nicht in getrennten Punkten schneiden. Da dies für jeden der Schnittpunkte $(\alpha_4\alpha_1)$, $(\alpha_4\alpha_2)$, $(\alpha_4\alpha_3)$ gilt, bleibt als Rest eine unpaare Zahl von Geraden, welche die Fläche in vier getrennten Punkten schneiden, und also mindestens eine Gerade.

Dieser Beweis ist ganz davon unabhängig, ob die Fläche Doppelpunkte hat oder nicht, und ist korrekt, wenn *die Fläche analytisch und überall regulär ist;* zwei analytische überall reguläre Kurven können nämlich nur dann unendlich viele Punkte miteinander gemein haben, wenn sie entweder ganz zusammenfallen oder wenigstens einen Zweig miteinander gemein haben. Wenn also die v. Staudtschen Schnittpunktssätze in der größten ihnen mit Wahrscheinlichkeit zukommenden Allgemeinheit bewiesen wären — *was aber, soviel ich weiß, nicht der Fall ist* — dann

würde man den Satz dieses Paragraphen von jeder stetigen und geschlossenen Fläche dritter Ordnung ohne jede Ausnahme aussprechen können.

§ 4.

Jede allgemeine Elementarfläche dritter Ordnung enthält wenigstens drei Gerade, welche in einer Ebene liegen.

Es sei a eine auf der Fläche F^{III} liegende Gerade. Wir bilden den Umriß ω der Fläche aus einem auf a liegenden Punkte P, der nicht auf einer anderen Geraden liegt und kein parabolischer Punkt ist. Unter den aus der Spur A von a an ω gehenden Tangenten ist die eine die Spur p der in P berührenden Ebene π.

Wir denken uns nun erstens, daß a keine parabolischen Punkte enthält. A ist dann ein uneigentlicher Doppelpunkt von ω, und es geht aus A an den Zweig von ω, der von p berührt wird, noch eine Tangente t. Die Ebene (pt) schneidet F^{III} in drei Geraden, denn *jede* durch a gehende Ebene schneidet in diesem Fall die Fläche in einer Kurve zweiter Ordnung*), und diese hat in diesem Fall einen Doppelpunkt.

Wenn auf a zwei parabolische Punkte liegen, dann ist A entweder ein eigentlicher Doppelpunkt auf einem Zweig φ oder auch ein Schnittpunkt zweier Zweige von ω. Im ersten Fall erkennt man erstens das Vorhandensein einer a nicht schneidenden Geraden c auf F^{III}. Weil die Kurve φ nämlich nur den einen Doppelpunkt A hat, wird sie wenigstens eine Doppeltangente haben (siehe „Sätze" § 2, Nr. 6), und diese kann nicht durch A gehen; die Doppeltangente ist aber das Bild einer Geraden c der Fläche. An den Zweig von ω, der von p berührt wird, geht nun wie im ersten Fall aus A noch eine Tangente t, und die Ebene (at) berührt F^{III} in einem Punkt R, der nicht auf c liegen kann. Die Ebene $(at) = \mu$ hat also jedenfalls den nicht auf a liegenden und von R verschiedenen Punkt (μc) mit F^{III} gemein, und schneidet demnach dieselbe in drei Geraden.

Wenn aber A ein Schnittpunkt zweier Zweige dritter Ordnung φ und ψ von ω ist, dann gehen aus A zwei Tangenten f_1 und f_2 an φ und und ebenso zwei g_1 und g_2 an ψ. Es ist nun leicht darzutun, daß f_1 und f_2 durch die zwei in A berührenden Tangenten a_1 und a_2 getrennt sind, wobei a_1 diejenige Tangente sein möge, welche φ berührt. Nehmen wir nämlich an, daß f_1 und f_2 durch a_1 und a_2 nicht getrennt sind. Die Gerade a_1 schneidet φ in drei Punkten, von welchen zwei in A liegen. Drehen wir nun eine Gerade l stetig und in einem bestimmten Sinne um A von a_1 bis a_2; es kann dies unter der gemachten Annahme so ge-

*) Siehe Seite 552.

schehen, daß dabei weder f_1 noch f_2 überschritten wird. Es kann deshalb kein Schnittpunkt von l mit φ verschwinden, und es würde auch a_2 den Zweig φ in drei Punkten schneiden; das ist aber unmöglich, denn a_2 würde dann sechs Punkte (von denen drei in A liegen) mit $\varphi + \psi$ gemein haben. Von den Ebenen (af_1) und (af_2) wird also den Bemerkungen Seite 553 zufolge die eine (aber auch nur die eine) die Fläche in einer Kurve zweiter Ordnung schneiden, die Punkte mit a gemein hat, d. h. die eine (und nur die eine) der Ebenen (af_1) und (af_2) oder auch der Ebenen (ag_1) und (ag_2) schneidet F^{III} in drei Geraden, denn höchstens die eine dieser Ebenen kann die in P berührende Ebene sein. Wir haben im obigen angenommen, daß keine in A berührende Gerade eine Wendetangente ist. Es beeinträchtigt dies aber offenbar nicht den Beweis; nur kann in diesem Falle der oben genannte Punkt R auf a fallen, so daß man drei durch denselben Punkt gehende und in einer Ebene liegende Gerade erhält.

Es ist der obige Beweis ganz unabhängig davon, ob die Fläche analytisch ist oder nicht. Wird dieselbe aber als analytisch und überall regulär vorausgesetzt, dann kann man auch in anderer Weise vorgehen, was hier in Kürze angeführt werden möge. In dem Falle weiß man nämlich, daß durch A nur eine endliche Zahl von Tangenten an ω geht, und man sieht leicht, daß diese Zahl paar ist; unter den Tangenten findet sich die Spur p der in P berührenden Ebene. Dreht man nun stetig eine Ebene μ um a, so kann das Auftreten und das Verschwinden eines (projektiven) Ovals in der Schnittkurve von μ mit F^{III} nur durch Überschreitung einer solchen Stellung geschehen, wo die Ebene die Fläche F^{III} in einem elliptischen Punkte berührt. Deshalb ist die Zahl der letztgenannten berührenden Ebenen paar. Die Zahl der durch a gehenden Ebenen, welche in drei Geraden schneiden muß also unpaar sein, so daß jedenfalls eine durch a gehende Ebene in drei Geraden schneidet.

§ 5.

Jede allgemeine Elementarfläche dritter Ordnung enthält höchstens 27 Gerade.

Um zu zeigen, daß die Fläche F^{III} höchstens 27 Gerade enthalten kann, kommt es offenbar, nachdem der Satz von § 4 bewiesen worden ist, nur darauf an zu zeigen, daß eine Gerade a der Fläche höchstens von zehn anderen geschnitten werden kann, oder auch höchstens von fünf anderen, von denen nicht zwei in derselben Ebene liegen. Nehmen wir nun an, es werde a von sechs anderen Geraden der Fläche: $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ geschnitten, von denen nicht zwei in derselben Ebene liegen. Wir

können davon ausgehen, daß nicht fünf von den Geraden b z. B. b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, von einer und derselben von a verschiedenen Geraden c geschnitten werden, denn sollte dies der Fall sein, so braucht man nur z. B. b_5 mit derjenigen Geraden b_5' zu vertauschen, in welcher die Fläche nochmals von der Ebene (ab_5) geschnitten wird; es kann c nämlich jedenfalls nicht durch den Punkt $(b_5 b_5')$ gehen, weil die Fläche keine Doppelpunkte hat. Es gibt also fünf getrennte einander nicht schneidende Gerade c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, welche je vier der Geraden $b_1 \cdots b_5$ schneiden; daß die Geraden c von a verschieden sind, folgt daraus, daß die Fläche keine zusammenfallende Gerade enthält. Es mögen die Bezeichnungen so gewählt sein, daß c_r sämtliche Gerade $b_1 \cdots b_5$ mit Ausnahme von b_r schneidet ($r \leqq 5$).

Die Geraden c schneiden die Ebene (ab_6) in fünf Punkten, von welchen wenigstens drei entweder auf b_6 oder auf b_6' liegen müssen. Es mögen z. B. die drei Geraden c_1, c_2, c_3 alle die Gerade b_6' schneiden. Das durch b_4, b_5 und b_6' als Leitlinien bestimmte Hyperboloid enthält also die Geraden c_1, c_2, c_3 und a. Aber dann hat jede Leitlinie des Hyperboloids vier Punkte mit der Fläche F^{III} gemein, und diese müßte das Hyperboloid ganz enthalten. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 6.

Eine allgemeine Elementarfläche dritter Ordnung enthält entweder 3 oder 7 oder 15 oder 27 Gerade.

Wir gehen von drei in einer Ebene liegenden Geraden der Fläche a_1, a_2, a_3 aus, und nehmen vor der Hand an, daß diese nicht durch denselben Punkt gehen. Sie bilden ein Dreieck, dessen Ebene mit ϱ bezeichnet werden möge; es liege die Dreiecksecke A_r der Seite a_r gegenüber. Die Spur der Gerade a_r in einer festen Ebene, die wir als Bildebene wählen, nennen wir B_r.

Um nun die *neuen* — die von a_1, a_2 und a_3 verschiedenen Geraden — der Fläche zu bestimmen, betrachten wir den Umriß ω_r der Fläche aus einem Punkte P einer Geraden a_r. Hat a_r zwei parabolische Punkte — was der schwierigere Fall ist — dann wird B_r ein eigentlicher Doppelpunkt von ω_r, und es ergeben sich, wie wir sehen werden, fünf verschiedene Möglichkeiten. Die durch a_r gehenden dreifach berührenden Ebenen werden aus P in Tangenten abgebildet, die aus B_r an ω_r gehen. Um in jedem Fall die durch eine der zwei anderen Geraden a gehenden dreifach berührenden Ebenen zu bestimmen, bilde man den Umriß der Fläche aus dem Schnittpunkte der Geraden. Man erhält dann eine Kurve mit zwei eigentlichen oder uneigentlichen Doppelpunkten, und die Benutzung der Sätze 9, 10, 11 in „Sätze“ § 2 ergibt, daß entweder gleich viele von ϱ

verschiedenen dreifach berührenden Ebenen durch die zwei Geraden gehen, oder auch durch die eine vier, durch die andere keine; doch sind es immer gleich viele, wenn keine der Geraden parabolische Punkte hat.

Die Geraden der Fläche müssen in den dreifach berührenden Ebenen liegen, aber nicht jede dreifach berührende Ebene enthält solche Gerade. Um zu entscheiden, ob in einer durch a_r gehenden dreifach berührenden Ebene μ Gerade der Fläche liegen, haben wir die folgenden schon in § 4 benutzten Hilfsmittel:

Es enthält μ neue Gerade,

I) wenn a_r keine parabolischen Punkte hat;

II) wenn im voraus wenigstens eine a_r nicht schneidende Gerade nachgewiesen worden ist;

III) wenn μ durch die in den parabolischen Punkten von a_r berührenden Ebenen von einer durch a_r gehenden Ebene nicht getrennt ist, von der man im voraus weiß, daß sie die F^{III} in einer Kurve zweiter Ordnung schneidet, die mit a_r Punkte gemein hat.

Wir wollen uns nun zunächst an den Fall halten, daß die Gerade a_1 zwei parabolische Punkte hat, und bilden den Umriß ω_1 der Fläche aus einem *allgemeinen* Punkte P von a_1, d. h. einem Punkte, der kein parabolischer Punkt ist und auch nicht auf a_2 oder a_3 liegt. Es hat ω_1 in B_1 einen eigentlichen Doppelpunkt. Dieser ist entweder ein Schnittpunkt zweier unpaaren Zweige φ und ψ, oder auch ein Doppelpunkt eines paaren Zweiges; B_1 als Doppelpunkt eines unpaaren Zweiges zu nehmen ist ausgeschlossen, weil ω_1 sonst noch einen Doppelpunkt haben würde.

Im ersten Falle gehen aus B_1 zwei Tangenten an φ, und zwei an ψ, indem beide dritter Ordnung sein müssen. Aber unter den Ebenen, die a_1 mit diesen Geraden verbinden, gibt es, wie wir in § 4 Seite 560—561 gesehen haben, nur zwei, welche die Fläche in Kurven zweiter Ordnung schneiden, die Punkte mit a_1 gemein haben. Diese sind teils die in P berührende Ebene π, teils die Ebene $(a_1 a_2 a_3) = \varrho$. Es wird also, *wenn* ω_1 *keine anderen Zweige als* φ *und* ψ hat, a_1 von keiner neuen Geraden geschnitten. Aber auch a_2 und a_3 werden von keiner neuen Geraden geschnitten, denn das Bild einer solchen Geraden aus P würde Punkte mit $\omega = \varphi + \psi$ gemein haben, was unzulässig ist (siehe Seite 555 unten).

Durch a_1 gehen in diesem Falle außer ϱ zwei dreifach berührende Ebenen. Aber ebenso viele müssen durch a_2 und a_3 gehen (Sätze § 2, 9). Wir haben also *eine Fläche mit drei Geraden und sieben dreifach berührenden Ebenen.*

Der Umriß ω_1 kann außer φ und ψ noch einen aber auch nur einen paaren Zweig α haben. An α gehen aus B_1 zwei Tangenten h_1 und h_2. Diese können durch die zwei in B_1 berührenden Tangenten nicht getrennt

sein, weil sonst eine der letztgenannten Tangenten Punkte mit a gemein haben würde, was nicht angeht, weil ω_1 vierter Ordnung ist. Die zwei Ebenen $(a_1 h_1)$ und $(a_1 h_2)$ enthalten deshalb entweder keine neue Gerade, oder jede von ihnen erhält zwei neue Gerade (siehe Seite 553).

Denken wir uns erst, daß keine neuen Geraden auftreten, welche a_1 schneiden. Aus dem oben genannten Grunde (II) werden dann auch a_2 und a_1 von keinen neuen Geraden geschnitten. Nach unserer Voraussetzung hat a_1 parabolische Punkte; wir werden nun zeigen, daß in dem vorliegenden Fall auch a_2 und a_3 parabolische Punkte haben müssen. Betrachten wir nämlich den Umriß $\omega_1{}^*$ aus A_1; dieser hat keine Doppeltangente, weil keine a_1 schneidende Gerade vorhanden ist. Es ist nun nicht möglich, daß B_2 und B_3 beide uneigentliche Doppelpunkte von $\omega_1{}^*$ sein können. Aus jedem dieser Punkte z. B. aus B_2 müßten dann („Sätze“ § 2, Nr. 11) Tangenten $i_1, i_2, \cdots$ an $\omega_1{}^*$ gehen, und in jeder Ebene $(a_1 i_1)$, $(a_2 i_2)$ würden infolge (I) a_2 schneidende Gerade liegen, was ausgeschlossen ist. Es ist aber auch unmöglich, daß B_2 im eigentlicher, während B_3 ein uneigentlicher Doppelpunkt von $\omega_1{}^*$ ist. B_1 kann nämlich nicht ein Doppelpunkt eines Zweiges α von $\omega_1{}^*$ sein, denn α müßte dann wenigstens zwei Doppelpunkte haben („Sätze“ § 2, Nr. 6). Es kann aber B_2 auch nicht ein Schnittpunkt zweier unpaaren Zweige φ' und ψ' von $\omega_1{}^*$ sein, denn sind die aus B_2 an φ' und ψ' gehenden Tangenten $f_1' f_2' g_1' g_2'$, dann müssen einer schon oft benutzten Bemerkung zufolge (siehe Seite 561) zwei der Ebenen $(a_2 f_1') \cdots (a_1 g_2')$ Gerade der Fläche enthalten. Es müssen also B_2 und B_3 beide eigentliche Doppelpunkte sein, d. h. a_2 und a_3 haben beide parabolische Punkte.

Wir bilden nun den Umriß ω_2 aus einem allgemeinen von A_1 und A_2 verschiedenen Punkt von a_2, und es hat diese Kurve einen und nur einen eigentlichen Doppelpunkt B_2, während sie keine Doppeltangente hat. Sie wird deshalb zwei sich in B_2 schneidenden Zweigen dritter Ordnung φ_2 und ψ_2 enthalten („Sätze“ § 2, Nr. 6). Es gehen aus B_2 an ω_2 entweder sechs oder auch vier Tangenten, je nachdem ω_2 außer φ_2 und ψ_2 noch einen paaren Zweig α_2 enthält oder nicht. Im ersten Fall gehen durch a_2 außer ϱ noch vier, im zweiten Falle noch zwei dreifach berührende Ebenen. Nur die erstere Möglichkeit ist aber zulässig („Sätze“ § 2, Nr. 9), denn durch a_1 gehen außer ϱ noch vier dreifach berührende Ebenen. Man sieht in derselben Weise, daß auch durch a_3 vier dreifach berührende Ebenen gehen. Man hat also *eine Fläche mit drei Geraden und dreizehn dreifach berührenden Ebenen.*

Wenn jede der Ebenen $(a_1 h_1)$ und $(a_1 h_2)$ zwei neue Gerade enthält, dann wird a_1 von vier neuen Geraden geschnitten, während wie oben keine neue Gerade a_2 und a_3 schneiden, weil ω_1 keine Doppeltangente hat.

Durch a_2 oder a_3 können dann keine von ϱ verschiedene dreifach berührenden Ebenen gehen, denn in einer solchen müßten Gerade der Fläche liegen, weil Gerade, die a_1 schneiden, vorhanden sind (II). Wir haben also *eine Fläche mit sieben Geraden und mit fünf dreifach berührenden Ebenen.*

Wir sind nun mit den Umrissen ω_1 fertig, die unpaare Zweige enthalten, und gehen zu dem Fall über, daß ω_1 eine einteilige paare Kurve ist, die in B_1 einen eigentlichen Doppelpunkt hat. Die Kurve ω_1 hat hier wenigstens eine Doppeltangente („Sätze" § 2, Nr. 6) und diese muß das Bild einer neuen Gerade l der Fläche sein. Die Gerade l schneidet entweder a_2 und a_3; sie möge a_2 schneiden. Aus B_1 gehen an ω_1 zwei Tangenten nämlich die Spuren der oft erwähnten Ebenen ϱ und π, aber sonst keine („Sätze" § 2, Nr. 4). Es wird also a_1 von keiner neuen Geraden geschnitten. Weil durch a_1 (außer ϱ) keine andere dreifach berührende Ebene geht, so gehen durch a_2 entweder keine oder auch vier solche Ebenen, in diesem Falle aber vier, denn die Ebene $(a_2 l)$ ist schon eine dreifach berührende Ebene. Um zu sehen, wieviele dreifach berührende Ebenen durch a_3 gehen, bilden wir den Umriß der Fläche aus A_2. Der neue Umriß $\omega_2{}^*$ hat in B_1 einen eigentlichen Doppelpunkt, indem wir hier wie weiterhin immer voraussetzen, daß a_1 parabolische Punkte hat. Ferner hat $\omega_2{}^*$ das Bild von l als eine Doppeltangente oder auch als eine Gerade, die keinen Punkt mit $\omega_2{}^*$ gemein hat. Daraus folgt, daß $\omega_2{}^*$ keinen unpaaren Zweig enthält. Es kann nun B_1 kein Doppelpunkt eines paaren Zweiges α von $\omega_2{}^*$ sein. Weil nämlich durch a_1 außer ϱ keine dreifach berührende Ebene geht, kann keine durch B_1 gehende Gerade die Kurve $\omega_2{}^*$ außerhalb B_1 berühren und jede durch B_1 gehende und in der Bildebene liegende Gerade muß außerhalb B_1 noch zwei Punkte mit $\omega_2{}^*$ gemein haben. Wenn nun α nicht durch B_3 gehen würde, dann hätte die Gerade $B_1 B_3$ außerhalb B_3 mehr als zwei Punkte mit $\omega_2{}^*$ gemein, was nicht angeht. Die Kurve $\omega_2{}^*$ muß also aus zwei paaren Zweigen α und β zusammengesetzt sein, die sich in B_1 und B_3 schneiden. Aber an eine solche Kurve *vierter Ordnung* kann aus B_3 keine Tangente gehen, d. h. durch a_3 geht (außer ϱ) keine dreifach berührende Ebene.

Betrachten wir nun endlich den Umriß ω_2 der Fläche aus einem von A_1 und A_3 verschiedenen allgemeinen Punkte von a_2. Dieser Umriß hat, weil keine neue Gerade a_1 oder a_3 schneidet, keine Doppeltangente, und muß deshalb entweder unpaare Kurvenzüge enthalten, welche sich in B_2 schneiden, oder auch lauter paare Kurvenzweige, für welche B_2 ein uneigentlicher Doppelpunkt ist („Sätze" § 2, Nr. 6). Im letzten Falle muß ω_2 aus Ovalen zusammengesetzt sein, die nicht außerhalb einander liegen, weil ω_2 keine Doppeltangenten hat, und zwar aus drei Ovalen, weil aus B_2 sechs Tangenten an ω_2 gehen. Das ist offenbar unmöglich. Deshalb

enthält ω_2 zwei Kurven dritter Ordnung, die sich in B_2 schneiden, und außerdem noch ein Oval, weil sechs Tangenten aus B_2 an ω_2 gehen. Aber dann sind wir zu dem früher betrachteten Falle zurückgekommen — nur mit Umtauschung von a_1 mit a_2 — und wir finden wieder entweder die Fläche mit sieben Geraden oder die Fläche mit drei Geraden und mit 13 dreifach berührenden Ebenen.

Wir gehen nun zu dem Fall über, daß ω_1 zwei paare Zweige hat, von welchen der eine α in B_1 einen eigentlichen Doppelpunkt hat. Aus B_1 gehen zwei Tangenten h_1 und h_2 an α, weil sonst eine Gerade, welche B_1 mit einem Punkte des anderen Zweiges β verbindet, außerhalb B_1 zwei Punkte mit α und wenigstens zwei Punkte mit β gemein haben würde. Aus dem ganz analogen Grunde müssen aus B_1 auch zwei Tangenten h_3 und h_4 an β gehen. Zwei der Ebenen $(a_1 h_1) \cdots (a_1 h_4)$ sind ϱ und π und enthalten also keine neue Gerade. Die zwei übrigen müssen aber neue Gerade enthalten. Die zwei Tangenten in B_1 an ω_1 bestimmen nämlich zwei Winkelräume; in dem einen von diesen liegen die durch B_1 gehenden Geraden, welche die von B_1 ausgehenden Pseudozweige von α in je einem Punkte schneiden, während in dem anderen die durch B_1 gehenden Geraden liegen, welche entweder zwei Punkte mit einem der genannten Pseudozweige gemein haben oder auch keinen Punkt mit α gemein haben. Die vier Tangenten h_1, h_2, h_3, h_4 müssen also in einem bestimmten der zwei Winkelräume liegen, so daß nach (III) entweder alle Ebenen $(a_1 h_1) \cdots (a_1 h_4)$ die Fläche in Kurven zweiter Ordnung schneiden müssen, die Punkte mit a_1 gemein haben, oder auch keine. Das letztere ist aber nicht möglich, weil jedenfalls eine der Ebenen nämlich ϱ in zwei Geraden schneidet. Zwei durch a_1 gehende Ebenen enthalten also neue Gerade.

Weil durch a_1 außer ϱ noch zwei dreifach berührende Ebenen gehen, werden auch durch a_2 und a_3 zwei solche Ebenen gehen, und jede von diesen enthält neue Gerade (II). Die Fläche hat also 15 Gerade. Weil jede neue Gerade der Fläche a_1 oder a_2 oder a_3 schneidet, gehen durch jede Gerade der Fläche drei dreifach berührende Ebenen, und jede von diesen muß drei Gerade enthalten (II). Die Fläche hat also *15 Gerade und 15 dreifach berührende Ebenen.*

Jetzt kommen wir zu dem Falle, daß ω_1 außer α noch zwei andere paare Zweige β und γ hat. Aus B_1 gehen zwei Tangenten an jeden Zweig und in den durch a_1 und diese Tangenten gehenden Ebenen liegen acht neue Gerade. Man sieht hier ganz wie im vorigen Falle die Existenz von vier neuen a_1 schneidenden Geraden. Durch jede der Geraden a_2 und a_3 gehen außer ϱ keine oder auch vier dreifach berührende Ebenen und in jeder dieser Ebenen liegen infolge (II) zwei neue Gerade. Nun haben je zwei der Kurven α, β und γ vier Tangenten miteinander gemein; dies

folgt aber („Sätze“ § 2, Nr. 5), wenn nur das Vorhandensein einer gemeinsamen Tangente feststeht. Um dies z. B. für β und γ nachzuweisen, braucht man nur zu zeigen, daß es Tangenten an β gibt, die γ schneiden, sowie auch solche, die nicht schneiden. Ein beliebiger Punkt M von γ ist aber ein uneigentlicher Doppelpunkt von β; also gehen aus M an β zwei Tangenten, indem MB_1 die Kurve β nicht schneidet. Die aus B_1 an β gehende Tangente schneidet aber γ nicht. Ebenso sieht man, daß z. B. α und β Tangenten gemein haben müssen, denn die aus B_1 an β gehende Tangente schneidet α, während eine β und γ gemeinsame Tangente α nicht schneidet. Die Kurve $\omega_1 = \alpha + \beta + \gamma$ hat also jedenfalls 12 Doppeltangenten, welche Bilder von Geraden der Fläche sein müssen. Nun sahen wir oben, daß die Gerade a_2 und a_3 zusammen von keiner, von acht oder auch von 16 neuen Geraden geschnitten werden müßten. Weil die Zahl dieser Geraden entweder gleich 12 oder größer sein muß, sieht man also, daß a_2 und a_3 beide von acht neuen Geraden geschnitten werden. Wir haben also *eine Fläche mit 27 Geraden* und die Zahl 45 der dreifach berührenden Ebenen erhält man in üblicher Weise.

Hiermit sind wir fertig, denn ω_1 kann nicht mehr als drei Zweige haben. Hätte nämlich ω_1 vier Zweige, dann würde die Kurve wenigstens $4K_{4,2} = 24$ Doppeltangenten haben, was ganz wie oben zu sehen ist. Diese müßten Bilder von a_2 und a_3 schneidenden Geraden sein, was unzulässig ist, weil eine Gerade nach § 5 höchstens von zehn anderen geschnitten werden kann.

Es ist nicht ohne Interesse, daß man dies auch ohne Zurückgreifen auf § 5 sehen kann. Denken wir uns nämlich, daß der Umriß ω_1 aus einer Kurve α mit einem eigentlichen Doppelpunkte in B_1 und außerdem noch aus $s-1$ anderen paaren Kurven $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1}$ zusammengesetzt sei. An diese Kurven gehen aus B_1 („Sätze“ § 2, Nr. 11) $2s$ Tangenten, von welchen zwei die Spuren der Ebenen ϱ und π sind. Durch a_1 gehen also außer ϱ noch $2s-2$ dreifach berührende Ebenen, und wenn $2s-2>4$ ebenso viele durch a_2 und a_3. Ganz wie oben sehen wir, daß in jeder der neuen durch a_1 gehenden dreifach berührenden Ebenen, außer a_1, zwei neue Gerade liegen, und aus II folgt dann, daß auch in jeder der anderen Ebenen zwei neue Gerade liegen. Die Zahl der Doppeltangenten von ω_1 ist deshalb höchstens gleich $4(2s-2)$, weil so viele Gerade a_2 und a_3 schneiden. Aber auf andere Weise erhalten wir eine niedrige Grenze derselben Zahl. Je zwei der Kurven $\alpha, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s-1}$ haben nämlich vier gemeinsame Tangenten, so wie wir es oben gesehen haben. Aber die Kurve α hat wenigstens eine Doppeltangente, denn sonst müßte sie außer B_1 noch einen Doppelpunkt haben („Sätze“ § 2, Nr. 6). Die Bedingung

$$4(2s-2) \geqq 4\,\frac{s(s-1)}{2} + 1$$

ist aber für ganze positive S nur für $s = 1, 2, 3$ befriedigt, so daß wir auch in dieser Weise sehen, daß durch unsere Abzählung die verschiedenen möglichen Formen der Umrisse ω_1 erschöpft sind.

Es erübrigt noch, den Fall in Betracht zu ziehen, daß die Fläche keine Gerade mit parabolischen Punkten hat, was wir in aller Kürze tun können. Hier wissen wir nämlich im voraus, daß jede dreifach berührende Ebene drei Gerade der Fläche enthält und daß durch je zwei Gerade der Fläche immer gleich viele dreifach berührende Ebenen gehen (s. S. 552).

Betrachten wir wieder den Umriß ω_1 der Fläche aus einem allgemeinen Punkte P einer Geraden a_1. Dieselbe kann keine unpaare Zweige haben, denn zwei solche würden sich in einem eigentlichen Doppelpunkte schneiden. Es muß aber ω_1 auch *wenigstens zwei* paare Zweige haben. Der Umriß ω_2^* aus A_2 existiert nämlich (s. Seite 566) und es gehen deshalb aus B_1 wenigstens zwei Tangenten an ω_2^*, d. h. durch a_1 gehen außer ϱ noch wenigstens zwei dreifach berührende Ebenen. Aus B_1 gehen deshalb wenigstens vier Tangenten an ω_1, nämlich außer den Spuren der eben genannten Ebenen noch die Spuren von ϱ und π. Es hat deshalb ω_1 wenigstens zwei Zweige. Die oft erwähnten Schlüsse zeigen dann offenbar, daß die Fläche 15 oder 27 Gerade hat, je nachdem ω_1 zwei oder drei Zweige hat; die Zahl der dreifach berührenden Ebenen bleibt auch wie früher. Daß ω_1 mehr als drei Zweige haben kann, ist infolge § 5 ausgeschlossen.*)

Wir haben in unserer Diskussion vorausgesetzt, daß die drei ursprünglich gegebenen Geraden nicht durch denselben Punkt gehen. Es ist aber nicht nötig, diesen Spezialfall in seinen Einzelheiten durchzuführen. Der einzige Unterschied in den benutzten Umrissen ω besteht darin, daß hier eine der Tangenten im Doppelpunkte B eine Wendetangente ist; wenn man aber diese Tangente den aus B_1 ausgehenden Tangenten hinzurechnet, dann kann man dieselben Schlüsse mit geringen Änderungen durchführen. Ferner haben wir auch den Satz benutzt, daß durch zwei sich schneidende Gerade entweder gleichviele — oder auch 0 oder 4 — dreifach berührende Ebenen gehen. Projiziert man aber in dem vorliegenden Fall die Fläche

*) In dem früheren Falle, wo auf a_1 parabolische Punkte vorhanden waren, konnten wir mittels einer Ungleichung die Maximalzahl der Zweige von ω_1 direkt bestimmen. Auf Grund der gleichen Schlüsse erhält man hier

$$4(2s-2) \leq 4\,\frac{s(s-1)}{2},$$

wo das Gleichheitszeichen nicht auszuschalten ist. Die Möglichkeit $s = 4$ ist also nicht ausgeschlossen. Es kommt, wie ich hier bemerke, darauf an zu beweisen, daß eine allgemeine Elementarfläche dritter Ordnung ohne jegliche parabolische Punkte nicht vorhanden ist, ein Satz der unzweifelhaft richtig ist.

aus A, dann wird der Umriß eine Kurve dritter Ordnung, und für sie sieht man den Satz ohne weiteres; zugleich ist ersichtlich, daß jede der ursprünglichen Geraden höchstens von acht neuen Geraden geschnitten werden kann.

Daß Elementarflächen von den gefundenen Typen tatsächlich existieren, weiß man aus der Theorie der Flächen dritten Grades.

Wir haben in unserer Untersuchung nur den Umriß der Fläche aus einem Punkte P einer Geraden a derselben betrachtet. Daraus ergeben sich aber leicht die wesentlichen Eigenschaften des Umrisses aus einem beliebigen Punkte P_1 der Fläche. Nehmen wir z. B. die Fläche mit 27 Geraden und a mit parabolischen Punkten an. Der Umriß aus P hat dem Obigen zufolge drei getrennte Zweige α, β und γ, von welchen der eine α in der Spur B von a einen Doppelpunkt hat. Aus B gehen zwei Tangenten an jeden Zweig. Verschiebt man nun P in P_1 — wobei keine andere Gerade überschritten werde —, dann gehen β und γ in getrennte Zweige über. Aber α muß sich in zwei Zweige zerlegen. Wenn das nämlich nicht der Fall wäre, dann würde eine aus B an α gelegte Tangente nicht einer Doppeltangente des neuen Umrisses beliebig nahe liegen können, wenn P_1 beliebig nahe an P gewählt wird, was doch notwendig ist. Der neue Umriß hat also vier Zweige. Außer den Tangenten, welche zweien dieser Zweige gemeinsam sind, hat der Umriß, wenn die Spur der in P_1 berührenden Ebene immer mitgerechnet wird, noch vier „Doppeltangenten erster Art" — nach der Benennung von Zeuthen —, die entweder einen Zweig zweimal berühren oder auch keinen Punkt mit der Kurve gemein haben. Insbesondere kann ein beliebiger Umriß höchstens acht Wendetangenten haben. Es ist leicht dieses Resultat auch für die anderen Fälle zu bestätigen.

Ich führe dies nicht näher aus, sondern will nur bemerken, daß die obigen Betrachtungen die Mittel bieten, die bekannten lagengeometrischen Beziehungen auf einer Fläche dritten Grades auch auf die allgemeinen Elementarflächen dritter Ordnung zu übertragen.*) Aber der Umriß einer allgemeinen Elementarfläche dritter Ordnung aus einem Punkte der Fläche ist eine spezielle Elementarkurve vierter Ordnung, was schon daraus ersichtlich ist, daß eine allgemeine Elementarkurve vierter Ordnung beliebig viele Wendetangenten haben kann.

---

*) Siehe F. Klein, Über Flächen dritter Ordnung, Math. Ann. 6, S. 551—581, und H. G. Zeuthen, Études des propriétés de situation des surfaces cubiques, Math. Ann. 8, S. 1—30.

§ 7.

Beispiele von Elementarflächen dritter Ordnung.

Wenn man eine Elementarfläche dritter Ordnung bestimmen will, liegt es nahe, von einer Fläche dritten Grades F^3 auszugehen und eine dieser benachbarte Fläche zu betrachten. Wenn nun die neue Fläche dritter Ordnung ist, dann hat sie ebensoviele Gerade wie die algebraische Fläche F^3. Sei nämlich a eine Gerade von F^3 und μ eine Ebene, die F^3 in einem Punkte von a berührt. Der Umriß von F^3 aus einem Punkte P der Schnittkurve von F^3 mit μ hat dann das Bild von a als Doppeltangente. Der Umriß der neuen Fläche F^{III} aus einem P naheliegenden Punkte von F^{III} hat also auch eine a naheliegende Gerade als Doppeltangente, d. h. jeder Geraden auf F^3 entspricht eine benachbarte Gerade auf F^{III}.

Aber man kann nicht ohne weiteres davon ausgehen, daß eine F^3 benachbarte Fläche F selbst dritter Ordnung ist. Freilich werden nur solche Gerade mehr Schnittpunkte mit F als mit F^3 gemein haben können, welche nach einer Geraden von F^3 konvergieren, wenn F nach F^3 konvergiert, aber F kann sich so röhrenartig um die Geraden von F^3 schlingen, daß man ganz im Unsichern bleibt. Man kann aber vielmehr aus der hier gegebenen Theorie ausdrücklich schließen, daß eine der F^3 benachbarte Fläche im *allgemeinen* keine Fläche dritter Ordnung sein kann. Sei $f = 0$ die Gleichung von F^3 und $\varphi = 0$ die Gleichung irgendeiner anderen *algebraischen* Fläche. Wenn dann

$$f + \varepsilon\varphi = 0 \tag{1}$$

für alle $\varepsilon < \eta$ eine Fläche dritter Ordnung wäre, dann würde (1) für alle diese Werte von ε eine Fläche darstellen, die Gerade enthält. Die Bedingung dafür, daß die Fläche eine Gerade enthält, ist aber algebraisch in ε und müßte also identisch erfüllt sein, so daß auch $\varphi = 0$ Gerade enthalten müßte.

Es ist infolgedessen naheliegend, φ als aus Ebenen zusammengesetzt zu nehmen. Ich bin aber nur mit dem Falle durchgekommen, daß φ aus zusammenfallenden Ebenen gebildet ist. Man hat also die Frage: wann stellt die Gleichung

$$\lambda(v_1 + v_0)^{2n+1} + u_3 + u_2 + u_1 + u_0 = 0 \tag{2}$$

eine Fläche dritter Ordnung dar? Hier bedeuten $u_r = u_r(x, y, z)$ und $v_r = v_r(x, y, z)$ homogene Polynomien vom Grade r in Parallelkoordinaten x, y, z.

Um dies zu untersuchen, betrachten wir zuerst die Gleichung

$$f(t) = At^{2n+1} + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0. \tag{3}$$

Der bekannte Zeichenwechselsatz von Descartes zeigt sogleich, daß (3) höchstens drei reelle Wurzeln hat, wenn A und B dasselbe Vorzeichen haben.

Wir suchen nun die Schnittpunkte der Fläche (2) mit der Geraden:

$$x = \alpha r + a; \; y = \beta r + b; \; z = \gamma r + c.$$

Man erhält so eine Gleichung

$$\lambda (Mr + N)^{2n+1} + Pr^3 + Qr^2 + Rr + S = 0.$$

Diese hat für $M = 0$ höchstens drei reelle Wurzeln. Wir setzen demnach $Mr + N = t$ und erhalten:

$$\lambda t^{2n+1} + P_1 t^3 + Q_1 t^2 + R_1 t + S_1 = 0,$$

wo

$$P_1 = \frac{P}{M^3} = \frac{u_3(\alpha, \beta, \gamma)}{v_1(\alpha, \beta, \gamma)^3}.$$

Wählt man nun λ positiv, so muß auch P_1 positiv sein, d. h. der Quotient $u_3(\alpha, \beta, \gamma) : v_1(\alpha, \beta, \gamma)$ muß, weil α, β, γ voneinander unabhängig sind, eine ganze positive Funktion zweiten Grades sein. Es stellt also (2) eine Fläche dritter Ordnung dar, wenn sie die Form hat:

(4) $$\lambda (v_1 + v_0)^{2n+1} + v_1 w_2 + u_2 + u_1 + u_0 = 0,$$

wo $\lambda > 0$ und w_2 eine definite positive quadratische Form in x, y, z ist. Z. B. ist die Fläche

$$\lambda (x + y + z + 1)^{2n+1} + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) + x^2 + y + 1 = 0$$

eine Fläche dritter Ordnung für $\lambda > 0$.

Die hier gefundenen Flächen schneiden die unendlich ferne Ebene in einer Geraden und in einer nicht reellen Kurve zweiter Ordnung. Das ist aber dem Obigen zufolge nur möglich, wenn die Fläche drei oder sieben Gerade hat. Hier hat also noch eine spätere Untersuchung einzusetzen. In einer anderen Richtung kann man aber mit den hier benutzten Mitteln etwas weiter kommen. Anstatt die Zahl der reellen Wurzeln von (3) durch den Satz von Descartes zu schätzen, kann man davon Gebrauch machen, daß $f(t) = 0$ höchstens drei reelle Wurzeln mehr haben kann, als $f'''(t) = 0$ Es ist aber

$$f'''(t) = A(2n+1)\,2n(2n-1)t^{2n-2} + 6B = 0,$$

und diese Gleichung hat keine reelle Wurzel, wenn A und B dasselbe Vorzeichen haben. Hier sieht man aber, daß dies sich, wenn $A > 0$, nicht ändert, wenn man der linken Seite von $f(t)$ z. B. die Glieder $\sum_{p=1}^{p=m} a_p \sin pt$ hinzufügt, wenn nur

$$\sum_{p=1}^{p=m} p^3 |a_p| + 6B > 0$$

ist.

Indem wir dieses in einer etwas spezielleren Form als oben gebrauchen, finden wir, daß auch die nicht algebraische Gleichung

$$\lambda z^{2n+1} + Az^3 + u_2 + u_1 + u_0 + \sum_{p=1}^{p=m} a_p \sin pz = 0$$

eine Elementarfläche dritter Ordnung darstellt, wenn

$$\lambda > 0, \quad A > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{p=1}^{p=m} p\,|a_p| + 6A > 0.$$

Es schneidet nämlich sowohl die Gerade

$$z = \text{const.}, \quad y = \beta x + b,$$

sowie auch

$$x = \alpha z + a, \quad y = \beta z + b$$

die Fläche in höchstens drei Punkten.

§ 8.

Die algebraische Fläche dritten Grades als Elementarfläche.

Eine Fläche dritten Grades ist eine Elementarfläche und zugleich eine analytische und mit Ausnahme einzelner Punkte überall reguläre Fläche. Man könnte fragen, ob man aus der Menge aller analytischen und regulären Flächen durch rein geometrische Bestimmungen die algebraische Fläche dritten Grades herausheben könnte. In dieser Beziehung leistet der folgende Satz alles, was man verlangen kann.

*Wenn eine reelle analytische und mit möglicher Ausnahme einzelner Punkte überall reguläre Fläche höchstens sechs reelle Punkte mit einer nicht in der Fläche liegenden Kurve zweiter Ordnung gemein hat, dann ist die Fläche, wenn sie wenigstens eine im obigen Sinne allgemeine Gerade a enthält, eine algebraische Fläche dritten Grades.**)

Als Kurve zweiter Ordnung betrachte ich hier wie früher auch das in zwei Gerade zerfallene Gebilde.

Die Fläche F muß erstens dritter Ordnung sein; hätte nämlich eine Gerade l vier getrennte Punkte mit F gemein, dann würde man immer eine l naheliegende und l schneidende Gerade finden können, welche auch vier Punkte mit F gemein hätte, so daß (ll_1) mehr als sechs Punkte mit F gemein haben würde.

Weil F eine analytische Fläche dritter Ordnung ist, kann man dem Obigen zufolge immer eine durch a gehende Ebene μ_1 finden, welche F in drei ge-

*) Ich habe diesen Satz zuerst bei dem zweiten skandinav. Mathematikerkongreß in Kopenhagen 1912 vorgetragen, siehe: Beretning S. 93.

trennten Geraden a, b und c schneidet. Eine durch a gehende und μ_1 hinreichend naheliegende Ebene μ_2 schneidet F außer in a noch in einem projektiven Oval α, das zwei Punkte mit a gemein hat. Wir können davon ausgehen, daß α ganz im Endlichen liegt, denn das läßt sich jedenfalls durch eine a nicht ändernde projektive Transformation erreichen. Man lege nun einen Kegelschnitt $\varkappa$ durch fünf Punkte von α, von welchen drei auf der einen, zwei auf der anderen Seite von a liegen. Ist $\varkappa$ eine Hyperbel, so werden die fünf Punkte auf einem „Zweig" derselben liegen, denn ein im Endlichen liegendes Oval α kann höchstens vier Punkte mit einer Hyperbel gemein haben, wenn die Schnittpunkte sich auf beiden „Zweigen" derselben verteilen sollen. Hätten sie nämlich mehr als vier Punkte miteinander gemein, dann würden sie einem bekannten Satze über Kurven zweiter Ordnung zufolge ebensoviele Tangenten wie Punkte miteinander gemein haben. Eine gemeinsame Tangente t läßt aber α an einer bestimmten Seite liegen, während die zwei „Zweige" der Hyperbel auf verschiedenen Seiten von t liegen müssen. Durch die fünf auf α gewählten Punkte geht also entweder eine Ellipse oder eine Parabel oder der eine „Zweig" einer Hyperbel. Aber in allen diesen Fällen hat $\varkappa$ mit a zwei Punkte und also mit F jedenfalls sieben Punkte gemein, so daß $\varkappa$ mit α zusammenfallend auf F liegen muß.

Wählen wir nun auf α einen μ_1 hinreichend naheliegenden Punkt P, werden auch die Ebenen (bP) und (cP) die Fläche in je einem Kegelschnitte bzw. β und γ schneiden; es ist P der Ebene μ_1 hinreichend nahe gewählt, wenn die spitzen Winkelräume, die durch μ_1 und bzw. (bP) und (cP) begrenzt sind, keine Ebenen enthalten, die F in a berührenden Ovalen schneiden. Die drei Kegelschnitte α, β, γ liegen offenbar auf einer Fläche zweiten Grades φ^2. Durch α, β, γ und a, b, c gehen deshalb zwei Flächen dritten Grades, die eine ist aus φ^2 und μ_1, die andere aus den drei Ebenen (aP), (bP) und (cP) gebildet. Es sei nun Q ein Punkt von F, der nicht auf α, β oder γ liegt, aber im obigen Sinne μ_1 hinreichend nahe gewählt ist. In dem durch die zwei eben genannten Flächen dritten Grades bestimmten Büschel geht nun durch Q eine bestimmte Fläche G^3 und diese wird mit F zusammenfallen.

Erstens werden nämlich die zwei Flächen F und G^3 von der Ebene (cQ) in demselben Kegelschnitte γ_1 geschnitten, weil die zwei Schnittkurven fünf Punkte miteinander gemein haben: Q und die vier Schnittpunkte der Ebene mit α und β. Ferner geht dem Obigen zufolge durch a eine stetige Reihe von Ebenen μ, welche F in Kegelschnitten schneiden, und die Schnittkurven von F und G^3 mit jeder dieser Ebenen fallen auch zusammen, weil sie sechs Punkte miteinander gemein haben, nämlich die auf α, β und γ_1 liegenden Punkte.

Die Flächen F und G^3 haben also ein zusammenhängendes und stetiges Flächenstück miteinander gemein und müssen deshalb zusammenfallen, weil sie beide analytisch und — mit Ausnahme einzelner Punkte — überall regulär sind.

In dem im Satze ausgenommenen Falle ist der Beweis unbrauchbar. Dann ist aber auch der Satz nicht mehr allgemein richtig, wie schon das Beispiel einer Kegelfläche zeigt; eine Elementarkurve dritter Ordnung braucht nämlich nicht algebraisch zu sein, weil sie höchstens sechs Punkte mit einem Kegelschnitte gemein hat.

Kopenhagen, im Dezember 1914.